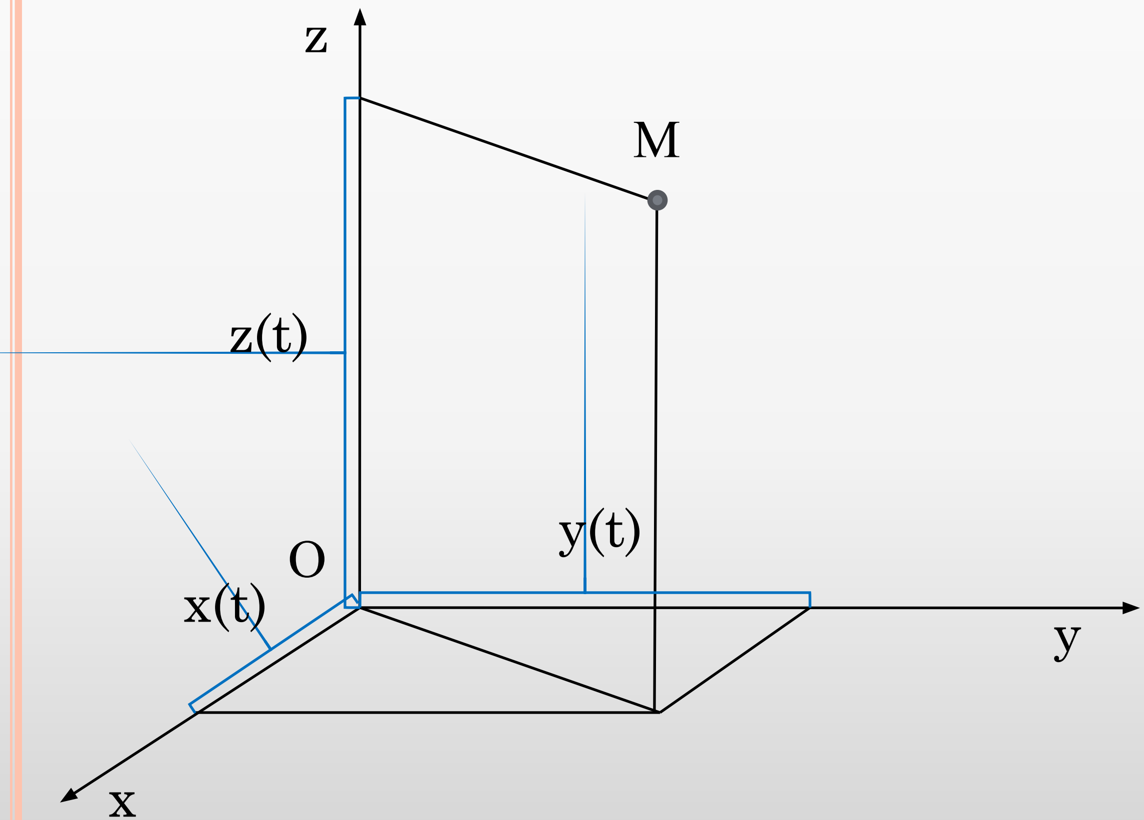
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Координатный способ задания движения

Координатный способ задания движения точки состоит в том, что в некоторой системе отсчета Oxyz задаются координаты движущейся точки M как функции времени:



$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

Эти уравнения, заданием которых полностью определяется движение точки, называются *уравнениями движения точки в координатной форме*.

Уравнения являются *параметрическими*, в которых роль параметра играет время t.

По ним легко определить *уравнение траектории точки* в декартовых координатах.

Чтобы записать уравнение траектории в явном форме, надо исключить из них время.

Как известно из математики, радиус–вектор выражается формулой:

$$\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \qquad (1)$$

где

$x\,(t)$, $y\,(t)$, $z\,(t)$ – проекции радиус–вектора на оси декартовой системы координат;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы координатных осей.

Формула (1) выражает связь между *координатным* и *векторным* способами задания движения.

Определение скорости точки

По определению $$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Так как $$\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

Следовательно,

$$\vec{\upsilon} = \frac{d}{dt}\left(x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}\right)$$

▼

Продифференцировав выражение, получаем:

$$\vec{\upsilon} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

С другой стороны $\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}$

Следовательно,

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \qquad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \qquad \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

Проекции скорости точки на оси неподвижных декартовых координат равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

Модуль и *направление* скорости определяются выражениями:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z{}^2}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{\upsilon}, \vec{i}}\right) = \frac{\upsilon_x}{\upsilon}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{\upsilon}, \vec{j}}\right) = \frac{\upsilon_y}{\upsilon}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{\upsilon}, \vec{k}}\right) = \frac{\upsilon_z}{\upsilon}$$

Определение ускорения точки

Из определения ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

Так как

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}$$

Следовательно,

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}\right)$$

Продифференцировав выражение, получаем:

$$\vec{a} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k}$$

С другой стороны

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Следовательно,

$$a_x = \dot{\upsilon}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{\upsilon}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{\upsilon}_z = \ddot{z}$$

Проекции ускорения точки на оси неподвижных декартовых координат равны вторым производным от соответствующих координат точки по времени.

Модуль и *направление* ускорения определяются выражениями:

$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}\right) = \frac{a_x}{a}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}\right) = \frac{a_y}{a}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}\right) = \frac{a_z}{a}$$