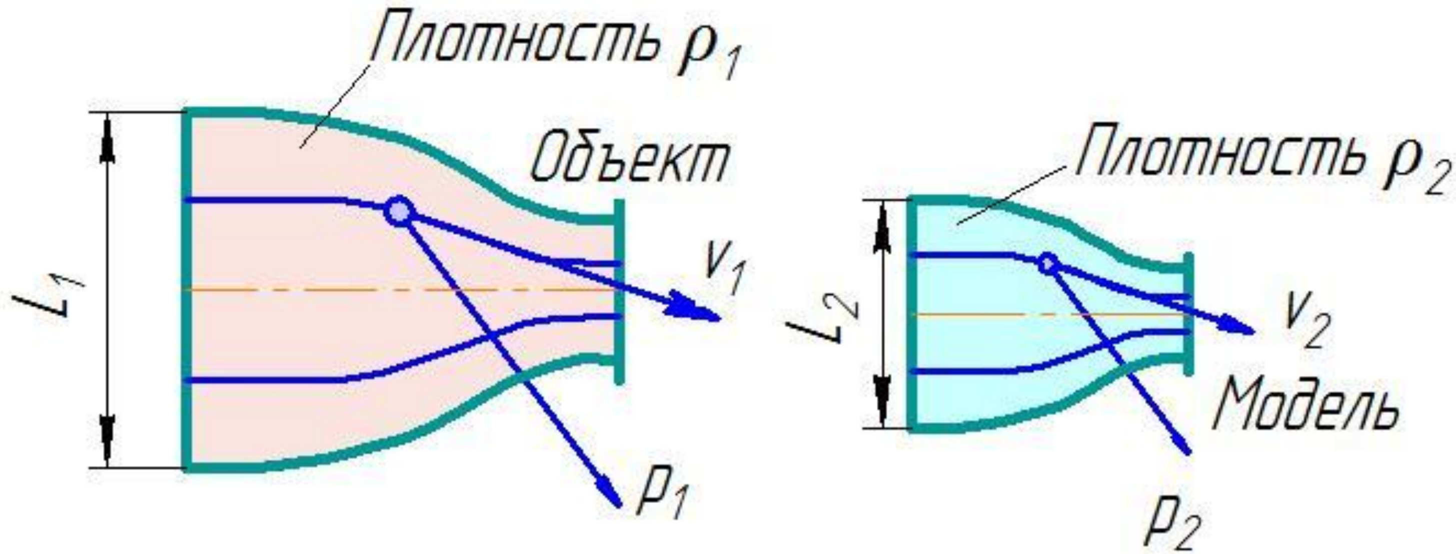
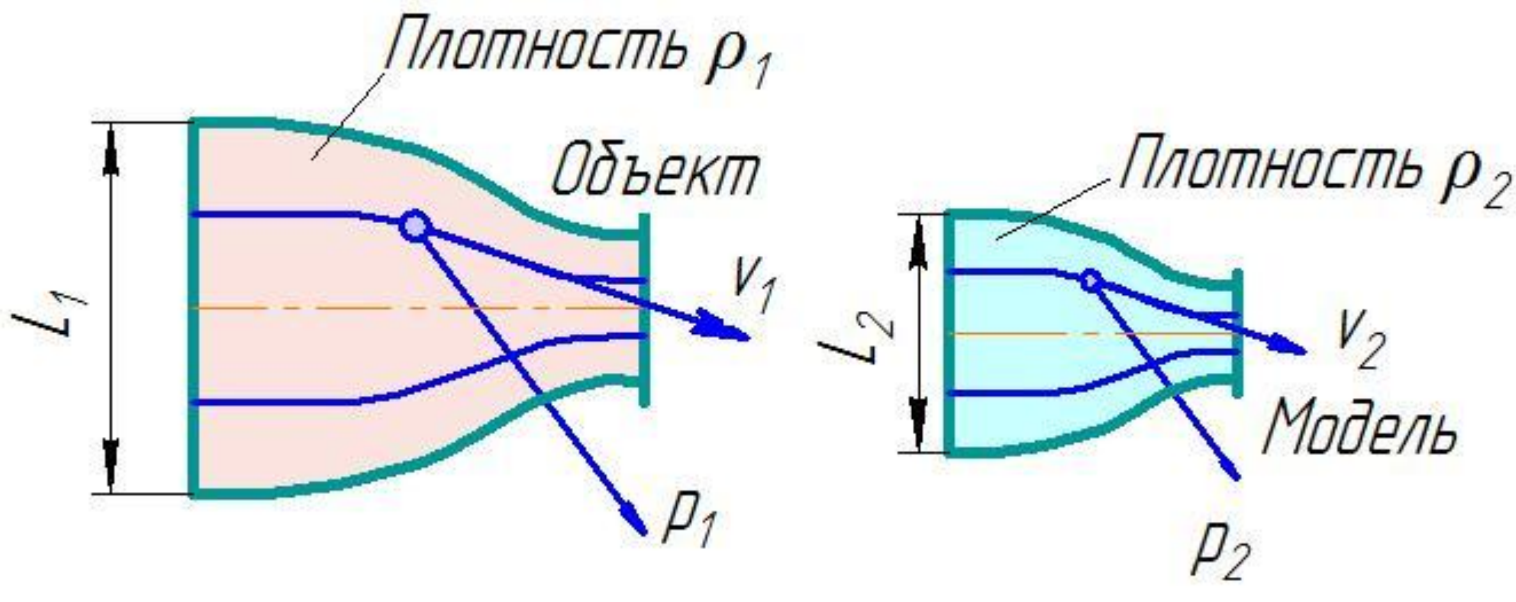
Критерии гидродинамического подобия



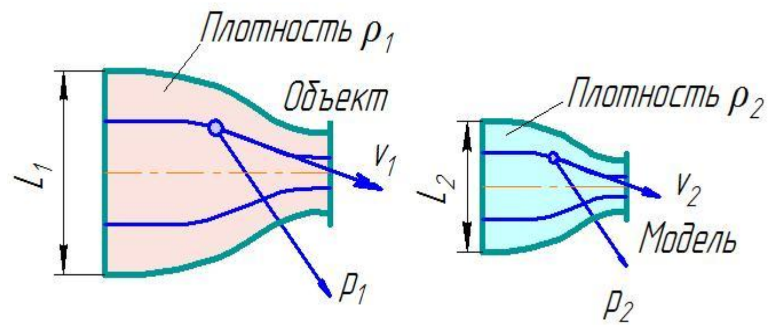
- Но если потоки механически подобны, то сами уравнения представленные в безразмерном виде, должны быть одинаковыми. Имея это в виду, можно записать уравнения движения (Навье-Стокса) и привести их к безразмерному виду. Для всех динамически подобных потоков они должны быть одинаковыми, а следовательно, необходимо, чтобы коэффициенты каждого из членов для этой группы потоков были также одинаковыми.



- Подобными называют такие потоки жидкости, у которых каждая характеризующая их физическая величина находится для любых сходственных точек в одинаковом отношении.

Понятие гидродинамического подобия включает

- подобие поверхностей, ограничивающих потоки (геометрическое подобие);
- пропорциональность скоростей в сходственных точках и подобие траекторий движения сходственных частиц жидкости (кинематическое подобие);
- пропорциональность сил, действующих на сходственные частицы жидкости, и пропорциональность масс этих частиц (динамическое подобие).



Геометрическое подобие

- Два потока будут геометрически подобными, если любой линейный размер одного из них можно получить из линейного размера другого путем умножения на постоянный множитель.

$$k_l = \frac{l_1}{l_2}.$$

- Таким образом получаем связь между геометрическими параметрами натуры l_1 и модели l_2 .

Кинематическое подобие

- Допустим теперь, что потоки 1 и 2 геометрически подобны. Обозначим через v_1 и v_2 скорости в их сходственных точках. Если отношение

$$\frac{v_1}{v_2} = k_u.$$

одинаково

 для любой пары сходственных точек, то потоки 1 и 2 будем считать <u>кинематически подобными</u>.

Динамическое подобие

- Рассмотрим далее какую-либо пару сходственных точек и обозначим силы действующие в этих точках F_1 и F_2. Если

$$\frac{F_1}{F_2} = k_F .$$

есть величина постоянная для любой пары сходственных точек, то потоки 1 и 2 называются <u>динамически подобными</u>.

Основные коэффициенты подобия

- Соответственно принятыми в Международной системе единиц основным физическим величинам (длина L время T и масса M) выделяют три основных коэффициента подобия:
- линейный масштаб $k_L = L_1 / L_2$;
- масштаб времени $k_T = T_1 / T_2$;
- и масштаб масс $k_м = M_1/M_2$.

Производные коэффициенты

- Так, масштаб скоростей $k_V = k_L / к_T$; сил одинаковой физической природы $k_F = k_L k_M / k^2_T$, плотностей $k_\rho = k_M / k^3_L$ и т.д.
- Используя выражения масштабов k_V и k_ρ можно получить для масштаба сил $k_F = k_\rho k^2_V k^2_L$, которая дает *общий закон динамического подобия Ньютона:*

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho_1 v_1^2 L_1^2}{\rho_2 v_2^2 L_2^2}.$$

Его можно представить в форме

$$Ne = \frac{F}{\rho v^2 L^2} = idem.$$

Критерий Рейнольдса

- Условием пропорциональности сил инерции и сил вязкостного трения является одинаковое значение числа Re для потоков в натуре и модели:

$$Re = \frac{\rho v^2}{\mu \frac{v}{L}} = \frac{vL}{\upsilon} = idem,$$

- где *v* - характерная (обычно средняя в сечении) скорость;
- L - характерный размер (обычно диаметр сечения D);
- μ - динамическая вязкость.

Данное условие приводит к соотношению для коэффициентов подобия:

$$\frac{k_V k_L}{k_\upsilon} = 1,$$

и для скоростей в натуре и модели $\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_2 \upsilon_1}{L_1 \upsilon_2},$

Критерий Фруда

- Условием пропорциональности сил инерции и сил тяжести является одинаковое значение числа Fr:

$$Fr = \frac{\rho v^2}{\rho g L} = \frac{v^2}{gL} = idem,$$

- Так как ускорение свободного падения g *в натуре и модели практически всегда одинаково (масштаб ускорений $k_g = 1$), то данное условие приводит к соотношению для коэффициентов подобия*

$$\frac{k_V^2}{k_L} = 1,$$

- и для скоростей в натуре и модели $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}.$

Соотношения вязкостей

- Подобие потоков в натуре и модели требует одновременного выполнения условий для чисел **Re** и **Fr** или условий для коэффициентов подобия. Последнее возможно только тогда, когда масштабы линейных размеров и вязкостей находятся в соотношении

$$\frac{k_L^{3/2}}{k_V} = 1,$$

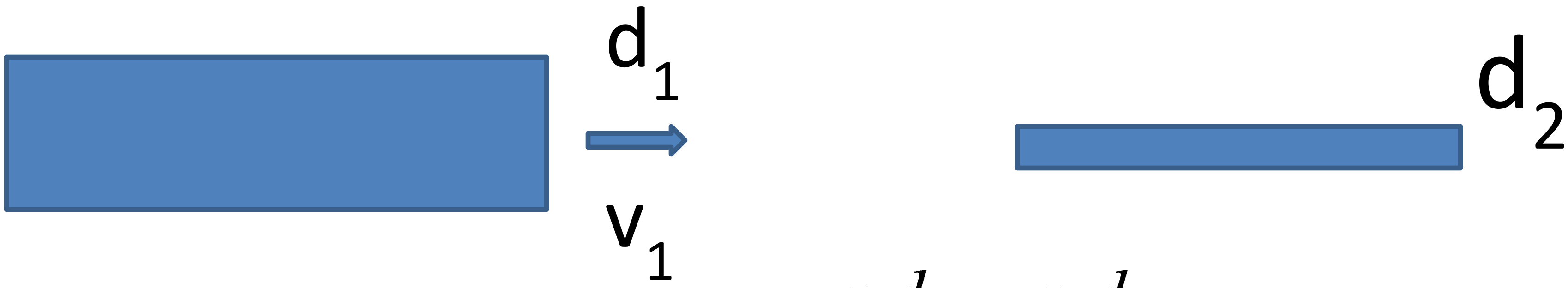
- из которого следует, что в модели меньших по сравнению с натурой размеров должна применяться менее вязкая жидкость:

$$\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{3/2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}.$$

- При выполнении условий подобия все безразмерные характеристики потока, т. е. безразмерные комбинации различных физических величин (например, коэффициенты сопротивления ξ, скорости φ, расхода μ и т.д.), имеют в натуре и модели одинаковое численное значение.

Задача

- В лаборатории исследуется вопрос о гидравлических сопротивлениях, которые будут иметь место в проектируемом водопроводе диаметром d_1 *=1м. Исследование ведется на воде. Диа*метр лабораторного трубопровода принят равным d_2 = 0,1 *м.* Определить, какой расход Q необходимо пропускать по этому трубопроводу для выполнения условий динамического подобия.



$$Re = \frac{v_1 d_1}{\upsilon_1} = \frac{v_2 d_2}{\upsilon_2},$$

При этом, так как в натуре и на модели — одинаковая жидкость (вода), $v_1 = v_2$ и, следовательно,

$$v_1 d_1 = v_2 d_2,$$

Отсюда находим:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{d_2}{d_1},$$

т. е. скорость на модели должна быть во столько же раз больше скорости в натуре, во сколько раз диаметр лабораторного трубопровода меньше диаметра проектируемого трубопровода.

- Теперь легко находится искомый расход жидкости. Для этого подставим в обычное уравнение расхода вместо v_2 и d_2 их значения, выраженные через d_1 *и* v_1.

$$Q_2 = 0{,}1\frac{\pi d_1^2}{4}v_1,$$

- Таким образом, для подобия наблюдаемых явлений необходимо, чтобы расход на модели Q_2 был в десять раз меньше, чем в проектируемом трубопроводе.

Задача

- Изучается движение воды при переливе через водосливную плотину. Лабораторная модель плотины выполнена в масштабе $k_L=L_1/L_2=10$, где L_1 — геометрические размеры плотины, а L_2 — соответственные размеры её модели. Определить, какую скорость движения жидкости необходимо осуществить на модели.

- Так как в натуре и на модели движется одна и та же жидкость (вода), то $\nu_1 = \nu_2$, а $g_1 = g_2$. При этом закон подобия Рейнольдса получит выражение

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_2}{L_1},$$

- в то время как закон подобия Фруда будет

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}.$$

- Это значит, что при моделировании по Рейнольдсу уменьшение модели по сравнению с натурой в 10 раз требует увеличения скорости движения жидкости на модели во столько же раз. По второму условию (закон Фруда) то же самое уменьшение модели потребует уменьшения скорости в $\sqrt{10}$ раз.