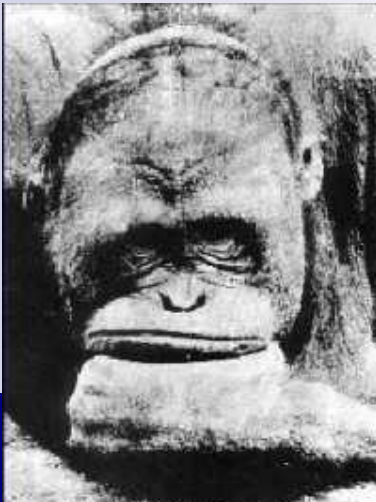
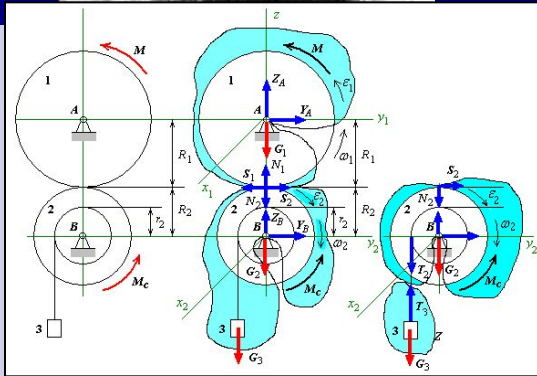


Бондаренко А.Н.



Курс лекций по теоретической механике

Динамика (I часть)



Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional.

Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru.

Москва - 2007

Содержание

- **Лекция 1.** Введение в динамику. Законы и аксиомы динамики материальной точки. Основное уравнение динамики. Дифференциальные и естественные уравнения движения. Две основные задачи динамики. Примеры решения прямой задачи динамики
- **Лекция 2.** Решение обратной задачи динамики. Общие указания к решению обратной задачи динамики. Примеры решения обратной задачи динамики. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, без учета сопротивления воздуха.
- **Лекция 3.** Прямолинейные колебания материальной точки. Условие возникновения колебаний. Классификация колебаний. Свободные колебания без учета сил сопротивления. Затухающие колебания. Декремент колебаний.
- **Лекция 4.** Вынужденные колебания материальной точки. Резонанс. Влияние сопротивления движению при вынужденных колебаниях.
- **Лекция 5.** Относительное движение материальной точки. Силы инерции. Частные случаи движения для различных видов переносного движения. Влияние вращения Земли на равновесие и движение тел.
- **Лекция 6.** Динамика механической системы. Механическая система. Внешние и внутренние силы. Центр масс системы. Теорема о движении центра масс. Законы сохранения. Пример решения задачи на использование теоремы о движении центра масс.
- **Лекция 7.** Импульс силы. Количество движения. Теорема об изменении количества движения. Законы сохранения. Теорема Эйлера. Пример решения задачи на использование теоремы об изменении количества движения. Момент количества движения. Теорема об изменении момента количества движения..
- **Лекция 8.** Законы сохранения. Элементы теории моментов инерции. Кинетический момент твердого тела. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела. Пример решения задачи на использование теоремы об изменении момента количества движения системы. Элементарная теория гироскопа.

Рекомендуемая литература

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.2. М.: Высшая школа. 1977 г. 368 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука. 1986 г. 416 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ /Под ред. А.А. Яблонского. М.:Высшая школа. 1985 г. 366 с.
4. Бондаренко А.Н. “Теоретическая механика в примерах и задачах. Динамика” (электронное пособие www.miit.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm), 2004 г.

Лекция 1



■ **Динамика** – раздел теоретической механики, изучающий механическое движение с самой общей точки зрения. Движение рассматривается в связи с действующими на объект силами.

Раздел состоит из трех отделов:

■ **Динамика точки** – изучает движение материальной точки с учетом сил, вызывающих это движение.

Основной объект - материальная точка – материальное тело, обладающей массой, размерами которого можно пренебречь.

■ **Динамика механической системы** – изучает движение совокупности материальных точек и твердых тел, объединяемых общими законами взаимодействия, с учетом сил, вызывающих это движение.

■ **Аналитическая механика** – изучает движение несвободных механических систем с использованием общих аналитических методов.

Основные допущения:

– существует **абсолютное пространство** (обладает чисто геометрическими свойствами, не зависящими от материи и ее движения).

– существует **абсолютное время** (не зависит от материи и ее движения).

Отсюда вытекает:

– **существует абсолютно неподвижная система отсчета.**

– **время не зависит от движения системы отсчета.**

– **массы движущихся точек не зависят от движения системы отсчета.**

Эти допущения используются в классической механике, созданной Галилеем и Ньютоном. Она имеет до сих пор достаточно широкую область применения, поскольку рассматриваемые в прикладных науках механические системы не обладают такими большими массами и скоростями движения, для которых необходим учет их влияния на геометрию пространства, время, движение, как это делается в релятивистской механике (теории относительности).

■ **Основные законы динамики** – впервые открытые Галилеем и сформулированные Ньютоном составляют основу всех методов описания и анализа движения механических систем и их динамического взаимодействия под действием различных сил.

■ **Закон инерции (закон Галилея-Ньютона)** – **Изолированная материальная точка тело сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.** Отсюда следует эквивалентность состояния покоя и движения по инерции (закон относительности Галилея). Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется **инерциальной**. Свойство материальной точки стремиться сохранить неизменной скорость своего движения (свое кинематическое состояние) называется **инертностью**.

■ **Закон пропорциональности силы и ускорения (Основное уравнение динамики - II закон Ньютона)** – **Ускорение, сообщаемое материальной точке силой, прямо пропорционально силе и обратно пропорционально массе этой точки:**

Здесь m – масса точки (мера инертности), измеряется в кг, численно равна весу, деленному на ускорение свободного падения:
$$m = \frac{G}{g}.$$

$$\vec{a} = \frac{\text{или}}{m} \vec{F}$$

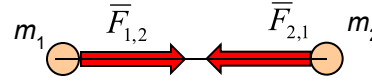
$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

F – действующая сила, измеряется в Н (1 Н сообщает точке массой 1 кг ускорение 1 м/с², 1 Н = 1/9.81 кг·с).

Лекция 1 (продолжение – 1.2)

- **Закон равенства действия и противодействия (III закон Ньютона)** – **Всякому действию соответствует равное по величине и противоположно направленное противодействие:**

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$



Закон справедлив для любого кинематического состояния тел. Силы взаимодействия, будучи приложенные к разным точкам (телам) не уравниваются.

- **Закон независимости действия сил** – **Ускорение материальной точки под действием нескольких сил равно геометрической сумме ускорений точки от действия каждой из сил в отдельности:**

$$\vec{a}(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots) = \vec{a}_1(\vec{F}_1) + \vec{a}_2(\vec{F}_2) + \dots$$

$$\vec{a}(\vec{R}) = \vec{a}_1(\vec{F}_1) + \vec{a}_2(\vec{F}_2) + \dots$$

- **Основное уравнение динамики:** $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$ - соответствует **векторному** способу задания движения точки.

- **Дифференциальные уравнения движения материальной точки:**

Подставим ускорение точки при векторном задании движения

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

в основное уравнение динамики:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F}_i \quad (1)$$

- **дифференциальное уравнение движения точки в векторном виде.**

В координатном виде: Используем связь радиуса-вектора с координатами и вектора силы с проекциями:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{F}_i = X_i\vec{i} + Y_i\vec{j} + Z_i\vec{k}$$

После группировки векторное соотношение распадается на три скалярных уравнения:

$$(x) : m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum X_i;$$

$$(y) : m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum Y_i;$$

$$(z) : m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum Z_i.$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \sum (X_i\vec{i} + Y_i\vec{j} + Z_i\vec{k}).$$

или:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum X_i; \\ m\ddot{y} = \sum Y_i; \\ m\ddot{z} = \sum Z_i. \end{cases}$$

- **дифференциальные уравнения движения точки в координатном виде.**

Этот результат может быть получен формальным проецированием векторного дифференциального уравнения (1).

- **Естественные уравнения движения материальной точки** – получаются

проецированием векторного дифференциального уравнения движения на естественные (подвижные) оси координат:

или:

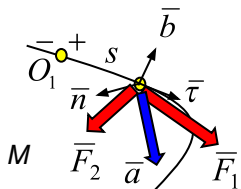
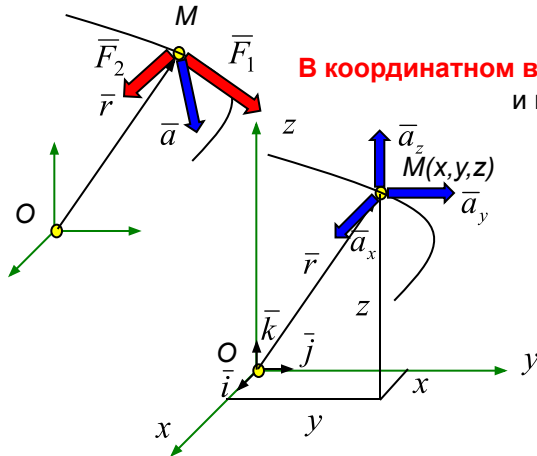
$$(\tau) : m a_{\tau\tau} = \sum F_{i\tau};$$

$$(n) : m a_n = \sum F_{in};$$

$$(b) : m \cdot 0 = \sum F_{ib}.$$

$$\begin{cases} m\ddot{s} = \sum F_{i\tau}; \\ m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{in}. \end{cases}$$

- **естественные уравнения движения точки.**



◀◀ Лекция 1 (продолжение – 1.3) ▶▶

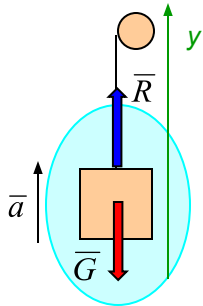
■ Две основные задачи динамики:

- 1. Прямая задача:** Задано движение (уравнения движения, траектория). Требуется определить силы, под действием которых происходит заданное движение.
- 2. Обратная задача:** Заданы силы, под действием которых происходит движение. Требуется найти параметры движения (уравнения движения, траекторию движения).

Обе задачи решаются с помощью **основного уравнения динамики** и проекции его на координатные оси. Если рассматривается движение несвободной точки, то как и в статике, используется **принцип освобожденности от связей**. В результате реакции связей включаются в состав сил, действующих на материальную точку. Решение первой задачи связано с операциями дифференцирования. Решение обратной задачи требует интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений и это значительно сложнее, чем дифференцирование. Обратная задача сложнее прямой задачи.

■ Решение прямой задачи динамики - рассмотрим на примерах:

Пример 1. Кабина весом G лифта поднимается тросом с ускорением a . Определить натяжение троса.



1. Выбираем объект (кабина лифта движется поступательно и ее можно рассматривать как материальную точку).
2. Отбрасываем связь (трос) и заменяем реакцией R .
3. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}$.
4. Проецируем основное уравнение динамики на ось y : $(y): ma_y = R - G$.

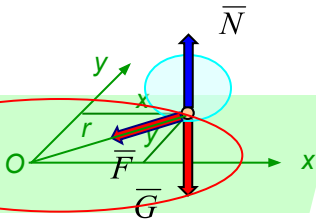
Определяем реакцию троса: $R = G + ma_y = G + \frac{G}{g}a_y = G(1 + \frac{a_y}{g})$.

Определяем натяжение троса: $\bar{T} = -\bar{R}; T = R = G(1 + \frac{a_y}{g})$.

При равномерном движении кабины $a_y = 0$ и натяжение троса равно весу: $T = G$.
При обрыве троса $T = 0$ и ускорение кабины равно ускорению свободного падения: $a_y = -g$.

Пример 2. Точка массой m движется по горизонтальной поверхности (плоскости Oxy) согласно уравнениям: $x = a \cdot \cos kt, y = b \cdot \cos kt$.

Определить силу, действующую на точку.



Таким образом, величина силы пропорциональна расстоянию точки до центра координат и направлена к центру по линии, соединяющей точку с центром.

Траектория движения точки представляет собой эллипс с центром в начале координат:

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 \cos^2 kt; \\ y^2 &= b^2 \sin^2 kt. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Определяем проекции силы:

$$F_x = m\ddot{x} = -mak^2 \cos kt = -mk^2 x;$$

$$F_y = m\ddot{y} = -mak^2 \sin kt = -mk^2 y.$$

Модуль силы:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} =$$

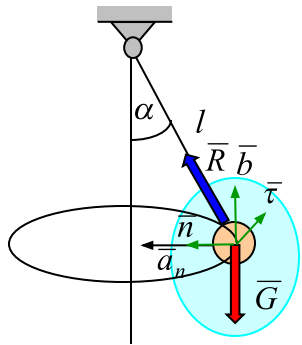
$$= mk^2 \sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r.$$

Направляющие косинусы:

$$(y): m\ddot{y} = F_y.$$

$$\cos(\bar{F}, x) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}; \cos(\bar{F}, y) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

Лекция 1 (продолжение 1.4)



Пример 3: Груз весом G подвешен на тросе длиной l и движется по круговой траектории в горизонтальной плоскости с некоторой скоростью. Угол отклонения троса от вертикали равен α . Определить натяжение троса и скорость груза.

1. Выбираем объект (груз).
2. Отбрасываем связь (трос) и заменяем реакцией R .
3. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}$.
4. Проецируем основное уравнение динамики на оси τ, n, b : $(\tau): ma_\tau = 0$;

Из третьего уравнения определяем реакцию троса: $R = \frac{G}{\cos \alpha}$. $(n): ma_n = R \sin \alpha$; $(b): 0 = R \cos \alpha - G$.

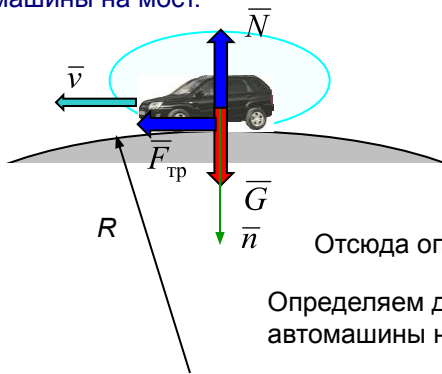
Определяем натяжение троса: $\bar{T} = -\bar{R}$; $T = R = \frac{G}{\cos \alpha}$.

Подставляем значение реакции троса, нормального ускорения во второе уравнение и определяем скорость груза:

$$\frac{G}{g} \frac{v^2}{l \sin \alpha} = \frac{G}{\cos \alpha} \sin \alpha.$$

$$v = \sqrt{\frac{gl \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}}.$$

Пример 4: Автомашина весом G движется по выпуклому мосту (радиус кривизны равен R) со скоростью V . Определить давление автомашины на мост.

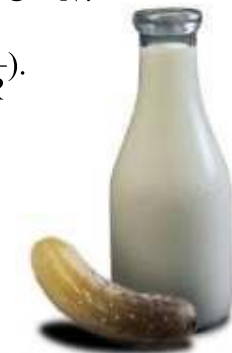


1. Выбираем объект (автомашина, размерами пренебрегаем и рассматриваем как точку).
2. Отбрасываем связь (шероховатую поверхность) и заменяем реакциями N и силой трения $F_{тр}$.
3. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{тр}$.
4. Проецируем основное уравнение динамики на ось n : $(n): ma_n = G - N$.

Отсюда определяем нормальную реакцию: $N = G - ma_n = G - m \frac{v^2}{R} = G(1 - \frac{v^2}{gR})$.

Определяем давление автомашины на мост: $\bar{Q} = -\bar{N}$; $Q = G(1 - \frac{v^2}{gR})$.

Отсюда можно определить скорость, соответствующую нулевому давлению на мост ($Q = 0$): $v = \sqrt{gR}$.



РАСЛАБЬСЯ!

Лекция 2

Решение обратной задачи динамики – В общем случае движения точки силы, действующие на точку, являются переменными, зависящими от времени, координат и скорости. Движение точки описывается системой трех дифференциальных уравнений второго порядка:

После интегрирования каждого из них будет **шесть постоянных** C_1, C_2, \dots, C_6 :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f_1(t, C_1, C_2, C_3); \\ \ddot{y} &= f_2(t, C_1, C_2, C_3); \\ \ddot{z} &= f_3(t, C_1, C_2, C_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= f_4(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ y &= f_5(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ z &= f_6(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned}$$

Значения постоянных C_1, C_2, \dots, C_6 находятся из шести начальных условий

при $t = 0$:

$$\begin{aligned} x &= x_0; & y &= y_0; & z &= z_0; \\ \dot{x} &= \dot{x}_0; & \dot{y} &= \dot{y}_0; & \dot{z} &= \dot{z}_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum X_i; \\ m\ddot{y} &= \sum Y_i; \\ m\ddot{z} &= \sum Z_i. \end{aligned}$$

После подстановки найденных значений постоянных получаем:

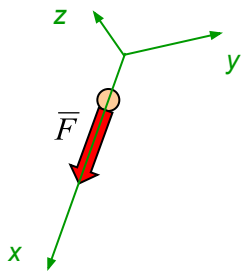
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f_1(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ \ddot{y} &= f_2(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ \ddot{z} &= f_3(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= f_4(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0); \\ y &= f_5(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0); \\ z &= f_6(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Таким образом, **под действием одной и той же системы сил материальная точка может совершать целый класс движений, определяемых начальными условиями.**

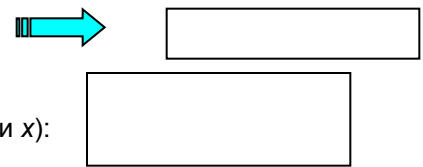
Начальные координаты учитывают исходное положение точки. Начальная скорость, задаваемая проекциями, учитывает влияние на ее движение по рассматриваемому участку траектории сил, действовавших на точку до прихода на этот участок, т.е. начальное кинематическое состояние.

Пример 1 решения обратной задачи: Свободная материальная точка массы m движется по действию силы F , **постоянной по модулю и величине**. В начальный момент скорость точки составляла v_0 и совпадала по направлению с силой. Определить уравнение движение точки.



1. Составляем основное уравнение динамики: $m\ddot{a} = \sum \vec{F}_i = \vec{F} = \overline{const}$.
2. Выберем декартову систему отсчета, направляя ось x вдоль направления силы и спроецируем основное уравнение динамики на эту ось: $(x): m\ddot{a}_x = F_x$ или F . $m\ddot{x} = F$.
3. Понижаем порядок производной: $m \frac{dv_x}{dt} = F$.
4. Разделяем переменные: $dv_x = \frac{F}{m} dt$.
5. Вычисляем интегралы от обеих частей уравнения:

6. Представим проекцию скорости как производную координаты по времени: $\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} t + C_1$.
7. Разделяем переменные: $dx = (\frac{F}{m} t + C_1) dt$. $\Rightarrow v_x = \frac{F}{m} t + C_1$.
8. Вычисляем интегралы от обеих частей уравнения: $\int dx = \int (\frac{F}{m} t + C_1) dt$. $\Rightarrow x = \frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$.
9. Для определения значений постоянных C_1 и C_2 используем начальные условия $t = 0, v_x = v_0, x = x_0$:



В итоге получаем уравнение равнопеременного движения (по оси x):

◀◀ Лекция 2 (продолжение 2.2) ▶▶

■ Общие указания к решению прямой и обратной задачи. Порядок решения:

1. Составление дифференциального уравнения движения:

- 1.1. **Выбрать систему координат** – прямоугольную (неподвижную) при неизвестной траектории движения, естественную (подвижную) при известной траектории, например, окружность или прямая линия. В последнем случае можно использовать одну прямолинейную координату. Начало отсчета совместить с начальным положением точки (при $t = 0$) или с равновесным положением точки, если оно существует, например, при колебаниях точки.
- 1.2. **Изобразить точку** в положении, соответствующем произвольному моменту времени (при $t > 0$) так, чтобы координаты были положительными ($s > 0, x > 0$). При этом считаем также, что проекция скорости в этом положении также положительна. В случае колебаний проекция скорости меняет знак, например, при возвращении к положению равновесия. Здесь следует принять, что в рассматриваемый момент времени точка удаляется от положения равновесия. Выполнение этой рекомендации важно в дальнейшем при работе с силами сопротивления, зависящими от скорости.
- 1.3. **Освободить материальную точку от связей, заменить** их действие реакциями, **добавить** активные силы.
- 1.4. **Записать основной закон динамики** в векторном виде, **спроецировать** на выбранные оси, **выразить** задаваемые или реактивные силы

через переменные время, координаты, или скорости, если они от них зависят.

2. Решение дифференциальных уравнений:

- 2.1. **Понизить производную**, если уравнение не приводится к каноническому (стандартному) виду. например:  или 
- 2.2. **Разделить переменные**, например: 
- 2.3. Если в уравнении три переменных, то **сделать замену переменных**, например:  переменные.
- 2.4. **Вычислить неопределенные интегралы** в левой и правой частях уравнения, например: 

Используя начальные условия, например, $t = 0, v_x = v_{x0}$, **определить постоянную интегрирования:**

Замечание. Вместо вычисления неопределенных интегралов можно **вычислить определенные интегралы с переменным верхним пределом.** Нижние пределы представляют начальные значения переменных (начальные условия). Тогда не требуется отдельного нахождения постоянной, которая автоматически включается в решение, например:



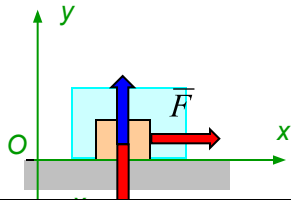
- 2.5. **Выразить скорость** через производную координаты по времени, например,

орить пункты 2.2 -2.4

Замечание. Если уравнение приводится к каноническому виду, имеющему стандартное решение, то это готовое решение и используется. Постоянные интегрирования по прежнему находятся из начальных условий. См., например, колебания (лекция 4, стр.8).

Лекция 2 (продолжение 2.3)

Пример 2 решения обратной задачи: Сила зависит от времени. Груз весом P начинает двигаться по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы F , величина которой пропорциональна времени ($F = kt$). Определить пройденное расстояние грузом за время t .



1. Выбираем систему отсчета (декартовы координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:
2. Принимаем объект движения за материальную точку (тело движется поступательно), освобождаем от связи (опорной плоскости) и заменяем реакцией (нормальной реакцией гладкой поверхности):
3. Составляем основное уравнение динамики:
4. Проецируем основное уравнение динамики на ось x :

6. Разделяем переменные:

7. Вычисляем интегралы от обеих частей уравнения:

8. Подставляем пределы:

Максимальную высоту полета можно найти приравняв скорость нулю:

В итоге получаем выражение для скорости в функции от координаты y :

Максимальная высота полета $\rightarrow \infty$ при обращении знаменателя в нуль:

Отсюда при постановке радиуса Земли и ускорения свободного падения получается II космическая скорость:

Пример 3 решения обратной задачи: Сила зависит от координаты. Материальная точка массой m брошена вверх с поверхности Земли со скоростью v_0 . Сила притяжения Земли обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки до центра тяготения (центра Земли). Определить зависимость скорости от расстояния y до центра Земли.

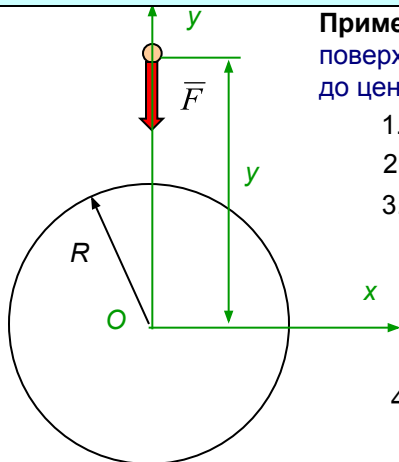
1. Выбираем систему отсчета (декартовы координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:
2. Составляем основное уравнение динамики:
3. Проецируем основное уравнение динамики на ось y :

Коэффициент пропорциональности можно найти, используя вес точки на поверхности Земли:

Отсюда дифференциальное уравнение имеет вид:

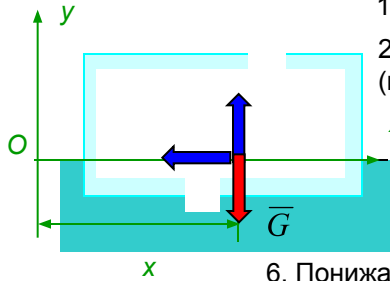
4. Понижаем порядок производной:

5. Делаем замену переменной:



Лекция 2 (продолжение 2.4)

Пример 2 решения обратной задачи: Сила зависит от скорости. Судно массы m имело скорость v_0 . Сопротивление воды движению судна пропорционально скорости. Определить время, за которое скорость судна упадет вдвое после выключения двигателя, а также пройденное расстояние судном до полной остановки.



1. Выбираем систему отсчета (декартовы координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:
2. Принимаем объект движения за материальную точку (судно движется поступательно), освобождаем от связей (воды) и заменяем реакцией (выталкивающей силой – силой Архимеда), а также силой сопротивления движению.
3. Добавляем активную силу (силу тяжести).
4. Составляем основное уравнение динамики:
5. Проецируем основное уравнение динамики на ось x :

6. Понижаем порядок производной:
7. Разделяем переменные:
8. Вычисляем интегралы от обеих частей уравнения:
9. Подставляем пределы:

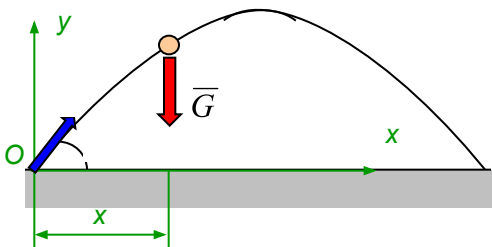


Исключив время из уравнений движения получаем уравнение траектории:

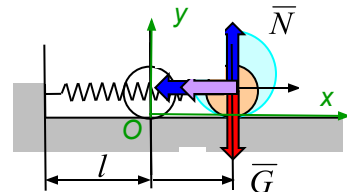
Время полета определяем приравнением координаты y нулю:

Дальность полета определяем подстановкой времени полета:

■ Движение точки, брошенной под углом к горизонту, в однородном поле силы тяжести без учета сопротивления воздуха



Лекция 3 (продолжение 3.2)



- **Затухающие колебания материальной точки** – Колебательное движение материальной точки происходит при наличии **восстанавливающей силы и силы сопротивления движению**.
- Зависимость силы сопротивления движению от смещения или скорости определяется физической природы среды или связи, препятствующей движению. Наиболее простой зависимостью является линейная зависимость от скорости (вязкое сопротивление):

α - коэффициент вязкости

Основное уравнение динамики:

Проекция уравнения динамики на ось:

Приведем уравнение к стандартному виду:



где

Характеристическое уравнение корни:

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет различный вид в зависимости от значений корней:

1. $n < k$ – случай малого вязкого сопротивления:

и комплексные, различные.

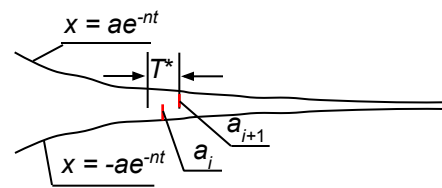
или

Частота затухающих колебаний:

Период:

Декремент колебаний:

Логарифмический декремент колебаний:



Затухание колебаний происходит очень быстро. Основное влияние силы вязкого сопротивления – уменьшение амплитуды колебаний с течением времени.

2. $n > k$ – случай большого вязкого сопротивления:

- корни действительные, различные.

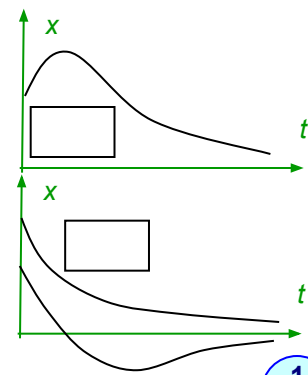
или

- эти функции аperiodические:

3. $n = k$:

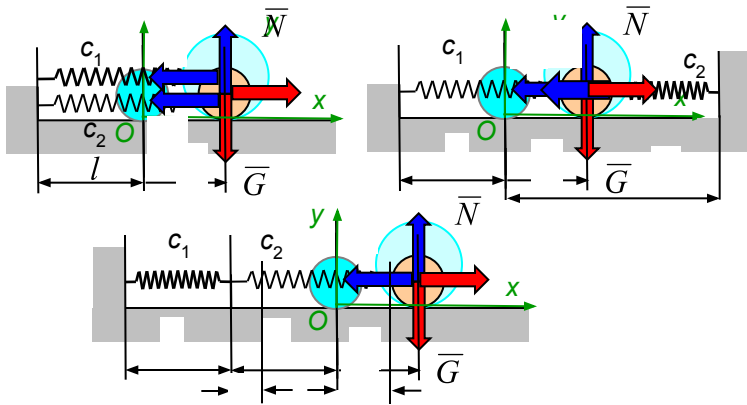
- корни действительные, кратные.

-эти функции также аperiodические:



Лекция 3 (продолжение 3.3)

Способы соединения пружин. Эквивалентная жесткость.

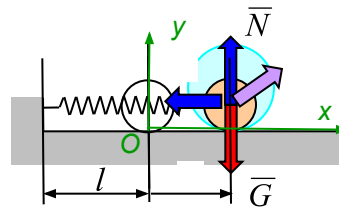
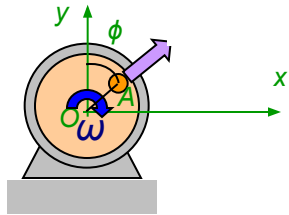


Классификация решений свободных колебаний.

Дифф. уравнение	Характер. уравнение	Корни характ. уравнения	Решение дифференциального уравнения	График
<input type="text"/>	<input type="text"/>		<input type="text"/> <input type="text"/>	
<input type="text"/>	<input type="text"/>	$n < k$	<input type="text"/> <input type="text"/>	
<input type="text"/>	<input type="text"/>	$n > k$	<input type="text"/> <input type="text"/>	
<input type="text"/>	<input type="text"/>	$n = k$	<input type="text"/>	

Лекция 4

- **Вынужденные колебания материальной точки** – Наряду с **восстанавливающей силой** действует периодически изменяющаяся сила, называемая **возмущающей силой**.
- Возмущающая сила может иметь различную природу. Например, в частном случае инерционное воздействие неуравновешенной массы m_1 вращающегося ротора вызывает гармонически изменяющиеся проекции силы:



Основное уравнение динамики:

Проекция уравнения динамики на ось:

Приведем уравнение к стандартному виду:

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения состоит из двух частей $x = x_1 + x_2$: x_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения и x_2 – частное решение неоднородного уравнения:

Общее решение:

Частное решение подбираем в форме правой части:



Полученное равенство должно удовлетворяться при любом t .

Тогда:

или

Таким образом, **частное решение:**

В итоге **полное решение:**

Постоянные C_1 и C_2 , или a и β определяются из начальных условий с использованием **полного решения (!)**:

Таким образом, при одновременном действии восстанавливающей и возмущающей сил материальная точка совершает сложное колебательное движение, представляющее собой **результат сложения** (наложения) **свободных** (x_1) **и вынужденных** (x_2) **колебаний**.

1. Если $p < k$ (вынужденные колебания малой частоты), то **фаза колебаний совпадает с фазой возмущающей силы**:
2. Если $p > k$ (вынужденные колебания большой частоты), то **фаза колебаний противоположна фазе возмущающей силы**:

Лекция 4 (продолжение 4.2)

Коэффициент динамичности – отношение амплитуды вынужденных колебаний к статическому отклонению точки под действием постоянной силы $H = \text{const}$:

Амплитуда вынужденных колебаний:

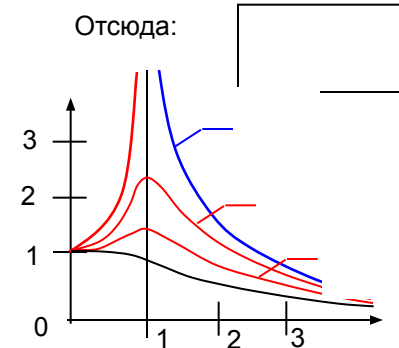
Статическое отклонение можно найти из уравнения равновесия:

Здесь:

При $p > k$ (большая частота вынужденных колебаний) коэффициент динамичности:

Таким образом, при $p < k$ (малая частота вынужденных колебаний) коэффициент динамичности:

Отсюда:



Резонанс – возникает, когда частота вынужденных колебаний совпадает с частотой собственных колебаний ($p = k$). Это наиболее часто происходит при запуске и остановке вращения плохо сбалансированных роторов, закрепленных на упругих подвесках.

Дифференциальное уравнение колебаний при равенстве частот:

Приравняв коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях получаем систему уравнений:

Делением второго уравнения на первое получаем **сдвиг фазы вынужденных колебаний:**

Таким образом, **уравнение движения при вынужденных колебаний с учетом сопротивления движению**, например при $n < k$ (малое сопротивление):

Возведением в степень обоих уравнений и сложением их получаем **амплитуду вынужденных колебаний:**

Вынужденные колебания при сопротивлении движению не затухают. Частота и период вынужденных колебаний равны частоте и периоду изменения возмущающей силы. Коэффициент динамичности при резонансе имеет конечную величину и зависит от соотношения n и k .

Влияние сопротивления движению при вынужденных колебаниях.

Дифференциальное уравнение при наличии вязкого сопротивления имеет вид:

Общее решение выбирается из таблицы (Лекция 3, стр. 11) в зависимости от соотношения n и k ([посмотреть](#)).

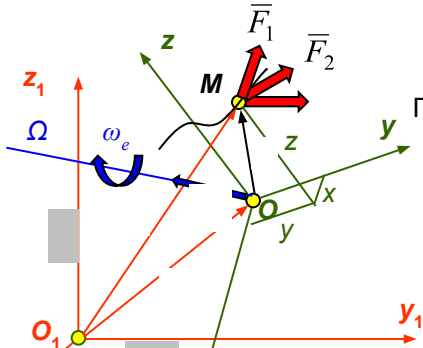
Частное решение возьмем в виде слим производные :



Подставим в дифференциальное уравнение:

Лекция 5

- Относительное движение материальной точки** – Положим, что подвижная (неинерциальная) система координат $Oxyz$ движется по некоторому закону относительно неподвижной (инерциальной) системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Движение материальной точки $M(x, y, z)$ относительно подвижной системы $Oxyz$ – **относительное**, относительно неподвижной системы $O_1x_1y_1z_1$ – **абсолютное**. Движение подвижной системы $Oxyz$ относительно неподвижной системы $O_1x_1y_1z_1$ – **переносное движение**.



Основное уравнение динамики: Абсолютное ускорение точки:

Подставим абсолютное ускорение точки в основное уравнение динамики:

Перенесем слагаемые с переносным и кориолисовым ускорением в правую часть:

Перенесенные слагаемые имеют размерность сил и рассматриваются как соответствующие силы инерции, равные:

Тогда **относительное движение точки можно рассматривать как абсолютное, если к действующим силам добавить переносную и кориолисову силы инерции:**

В проекциях на оси подвижной системы координат имеем:

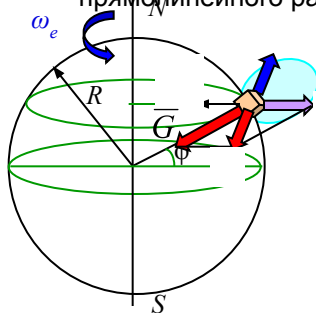
Величина силы тяжести (веса) на поверхности Земли равна $P = mg$.
Центробежная сила инерции составляет малую долю от силы тяжести:

Максимальная величина силы инерции (при $\varphi = 0$ - на экваторе) составляет всего 0.00343 от величины силы тяжести

Отклонение силы тяжести от направления силы притяжения также мало:

Таким образом, **влияние вращения Земли на равновесие тел чрезвычайно мало и в практических расчетах не принимается во внимание.**

Если **движение прямолинейное и равномерное, то подвижная система является инерциальной** и относительное движение может рассматриваться как абсолютное: как явлениями нельзя обнаружить эти классической механики).



- Влияние вращения Земли на равновесие тел** – Положим, что тело находится в равновесии на поверхности Земли на произвольной широте φ (параллели). Земля вращается вокруг своей оси с запада на восток с угловой скоростью ω_e .

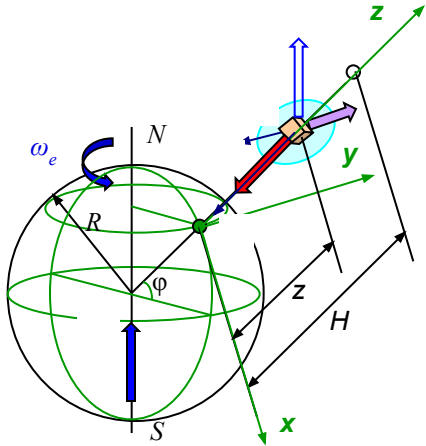
R – полная реакция негладкой поверхности.
 G – сила притяжения Земли к центру.
 Φ – центробежная сила инерции.

Условие относительного равновесия:

Равнодействующая сил притяжения и инерции – сила тяжести (вес):

Лекция 5 (продолжение 5.2)

- Влияние вращения Земли на движение тел в поле тяготения Земли** – Положим тело падает на Землю с некоторой высоты H над поверхностью Земли на широте φ . Выберем подвижную систему отсчета, жестко связанную с Землей, направляя оси x , y по касательной к параллели и к меридиану:



Уравнение относительного движения:

Здесь учтена малость центробежной силы инерции по сравнению с силой тяжести. Таким образом сила тяготения отождествляется с силой тяжести. Кроме того, считаем, что сила тяжести направлена перпендикулярно поверхности Земли вследствие малости ее отклонения, как рассмотрено выше.

Ускорение Кориолиса равно _____ и направлено параллельно оси y на запад.

Сила инерции Кориолиса равна _____ и направлена в противоположную сторону.

Спроецируем уравнение относительного движения на оси:

Решение первого уравнения дает: _____

Начальные условия: _____

Решение третьего уравнения дает: _____

Начальные условия: _____

Третье уравнение принимает вид _____

Его решение дает: _____

Начальные условия: _____

Полученное решение показывает, что тело при падении отклоняется к востоку. Вычислим величину этого отклонения, например, при падении с высоты 100 м. Время падения найдем из решения второго уравнения:

Таким образом, **влияние вращения Земли на движение тел чрезвычайно мало для практических высот и скоростей и в технических расчетах не учитывается.**

Из решения второго уравнения также следует существование скорости по оси y , которая также должна вызывать и вызывает соответствующее ускорение и силу инерции Кориолиса. Влияние этой скорости и силы инерции, связанной с ней, на изменение движения будет еще меньше, чем рассмотренная сила инерции Кориолиса, связанная с вертикальной скоростью.

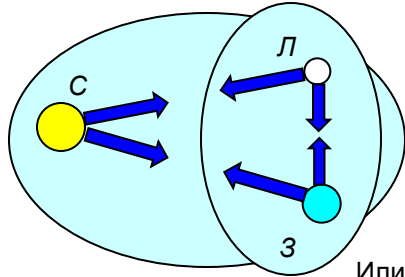
Лекция 6

- **Динамика механической системы.**
- **Система материальных точек или механическая система** – Совокупность материальных точек или материальных тел, объединяемых общими законами взаимодействия (положение или движение каждой из точек или тела зависит от положения и движения всех остальных).
- **Система свободных точек** – движение которых не ограничивается никакими связями (например, планетная система, в которой планеты рассматриваются как материальные точки).
- **Система несвободных точек или несвободная механическая система** – движение материальных точек или тел ограничиваются наложенными на систему связями (например, механизм, машина и т.п.).

■ **Силы, действующие на систему.** В дополнение к ранее существовавшей классификации сил (активные и реактивные силы) вводится новая классификация сил:

1. **Внешние силы (e)** – действующие на точки и тела системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы.
2. **Внутренние силы (i)** – силы взаимодействия между материальными точками или телами, входящими в данную систему.

Одна и та же сила может являться как внешней, так и внутренней силой. Все зависит от того, какая механическая система рассматривается. Например: В системе Солнце, Земля и Луна все силы тяготения между ними являются внутренними. При рассмотрении системы Земля и Луна силы тяготения, приложенные со стороны Солнца – внешние:



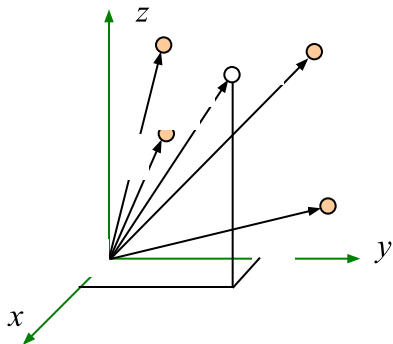
На основании закона действия и противодействия каждой внутренней силе F_k соответствует другая внутренняя сила F_k' , равная по модулю и противоположная по направлению.

Из этого следуют **два замечательных свойства внутренних сил:**

1. **Главный вектор всех внутренних сил системы равен нулю:**
2. **Главный момент всех внутренних сил системы относительно любого центра равен нулю:**

Или в проекциях на координатные оси:

Замечание. Хотя эти уравнения похожи на уравнения равновесия, они таковыми не являются, поскольку внутренние силы приложены к различным точкам или телам системы и могут вызывать движение этих точек (тел) относительно друг друга. Из этих уравнений следует, что внутренние силы не влияют на движение системы, рассматриваемой как одно целое.



■ **Центр масс системы материальных точек.** Для описания движения системы в целом вводится геометрическая точка, называемой **центром масс**, радиус-вектор которой определяется выражением – масса всей системы:

Или в проекциях на координатные оси:

Формулы для центра масс аналогичны формулам для центра тяжести. Однако, понятие центра масс более общее, поскольку оно не связано с силами тяготения или силами тяжести.

Лекция 6 (продолжение 6.2)

- Теорема о движении центра масс системы** – Рассмотрим систему n материальных точек. Приложенные к каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их на соответствующие равнодействующие F_k^e и F_k^i . Запишем для каждой точки основное уравнение динамики:

Просуммируем эти уравнения по всем точкам:



В левой части уравнения внесем массы под знак производной и заменим сумму производных на производную суммы:

Из определения центра масс:

Подставим в полученное уравнение:

Произведение массы системы на ускорение ее центра массе равно главному вектору внешних сил.

После вынесения массы системы за знак производной получаем

В проекциях на координатные оси:

Центр масс системы движется как материальная точка массой, равной массе всей системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Следствия из теоремы о движении центра масс системы (законы сохранения):

1. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ главный вектор внешних сил системы равен нулю, $R^e = 0$, то скорость центра масс постоянна, $v_C = \text{const}$ (центр масс движется равномерно прямолинейно – **закон сохранения движения центра масс**).

2. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ проекция главного вектора внешних сил системы на ось x равна нулю, $R_x^e = 0$, то скорость центра масс по оси x постоянна, $v_{Cx} = \text{const}$ (центр масс движется по оси равномерно).

Аналогичные утверждения справедливы для осей y и z .

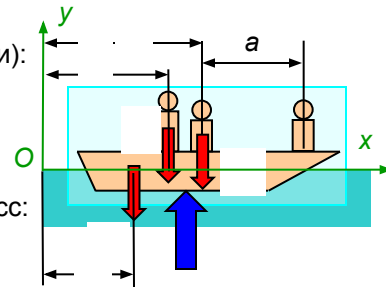
3. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ главный вектор внешних сил системы равен нулю, $R^e = 0$, и в начальный момент скорость центра масс равна нулю, $v_C = 0$, то радиус-вектор центра масс остается постоянным, $r_C = \text{const}$ (центр

Определим на какое расстояние надо пересечь человеку массы m_1 , чтобы лодка осталась на месте:



Пример: Два человека массами m_1 и m_2 находятся в лодке массой m_3 . В начальный момент времени лодка с людьми находилась в покое. Определить перемещение лодки, если человек массой m_2 пересел к носу лодки на расстояние a .

1. Объект движения (лодка с людьми):
2. Отбрасываем связи (воду):
3. Заменяем связь реакцией:
4. Добавляем активные силы:
5. Записываем теорему о центре масс:



Проецируем на ось x :





Лодка переместится на расстояние l в противоположную сторону.

Лекция 7

- **Импульс силы** – мера механического взаимодействия, характеризующая передачу механического движения со стороны действующих на точку сил за данный промежуток времени:

В проекциях на координатные оси:

В случае постоянной силы:

В проекциях на координатные оси:

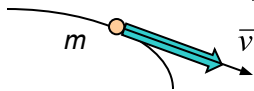
- **Импульс равнодействующей** – равен геометрической сумме импульсов приложенных к точке сил за один и тот же промежуток времени:

Умножим на dt :

Проинтегрируем на данном промежутке времени:



- **Количество движения точки** – мера механического движения, определяемая вектором, равным произведению массы точки на вектор ее скорости:



- **Количество движения системы материальных точек** – геометрическая сумма количеств движения материальных точек:

По определению центра масс:

Тогда:

Вектор количества движения системы равен произведению массы всей системы на вектор скорости центра масс системы.

В проекциях на координатные оси:

- **Теорема об изменении количества движения системы** – Рассмотрим систему n материальных точек. Приложенные к каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их на соответствующие равнодействующие F_k^e и F_k^i . Запишем для каждой точки основное уравнение динамики:

Просуммируем эти уравнения по всем точкам:

В левой части уравнения внесем массы под знак производной и заменим сумму производных на производную суммы:

Из определения количества движения системы:





Производная вектора количества движения системы по времени равна главному вектору внешних сил системы.

В проекциях на координатные оси:

Лекция 7 (продолжение 7.2)

Следствия из теоремы об изменении количества движения системы (законы сохранения):

1. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ главный вектор внешних сил системы равен нулю, $R^e = 0$, то вектор количества движения постоянен, $Q = \text{const}$ – закон сохранения количества движения системы).
2. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ проекция главного вектора внешних сил системы на ось x равна нулю, $R_x^e = 0$, то проекция количества движения системы на ось x постоянна, $Q_x = \text{const}$.

Аналогичные утверждения справедливы для осей y и z .

1. Запишем теорему об изменении количества движения:

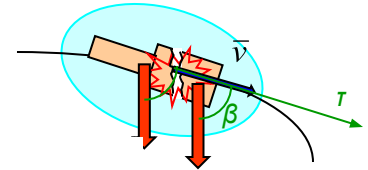
Проецируем на ось τ :

Разделяем переменные и интегрируем:

Отсюда закон сохранения:

Пример: Граната массы M , летевшая со скоростью v , разорвалась на две части. Скорость одного из осколков массы m_1 возросла в направлении движения до величины v_1 . Определить скорость второго осколка.

1. Объект движения (граната):
2. Объект – свободная система, связи и их реакции отсутствуют.
3. Добавляем активные силы:

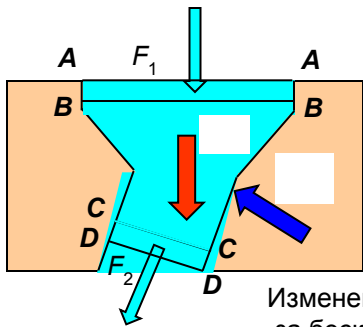


Правый интеграл практически равен нулю, т.к. время взрыва $t \ll 1$.



Теорема Эйлера – Применение теоремы об изменении количества движения системы к движению сплошной среды (воды).

1. Выбираем в качестве объекта движения объем воды, находящийся в криволинейном канале турбины:
2. Отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями ($R_{\text{пов}}$ – равнодействующая поверхностных сил)
3. Добавляем активные силы ($R_{\text{об}}$ – равнодействующая объемных сил):



В проекциях на оси:

Разность проекций векторов секундных количеств движения жидкости на ось равна сумме проекций главных векторов объемных и поверхностных сил на ту же ось.

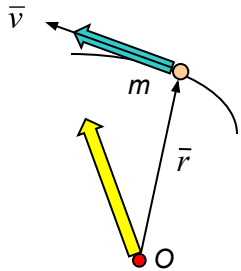
Принимая произведение плотности, площади поперечного сечения и скорости за **секундную массу**

Подставляя дифференциал количества движения системы в теорему об изменении получаем:

Геометрическая разность векторов секундных количеств движения жидкости равна сумме главных векторов объемных и поверхностных сил.

Лекция 7 (продолжение 7.3)

- **Момент количества движения точки или кинетический момент движения относительно некоторого центра** – мера механического движения, определяемая вектором, **равным векторному произведению радиуса-вектора материальной точки на вектор ее количества движения:**



В проекциях на оси:

- **Кинетический момент системы материальных точек относительно некоторого центра** – геометрическая сумма моментов количеств движений всех материальных точек относительно этого же центра:

В проекциях на оси:

- **Теорема об изменении момента количества движения системы** – Рассмотрим систему n материальных точек. Приложенные к каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их на соответствующие равнодействующие F_k^e и F_k^i . Запишем для каждой точки основное уравнение динамики:

Умножим векторно каждое из равенств на радиус-вектор слева:

Посмотрим, можно ли вынести знак производной за пределы векторного произведения:

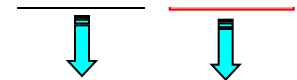
Таким образом, получили:

Заменим сумму производных на производную суммы:

Выражение в скобках есть момент количества движения системы. Отсюда:

В проекциях на координатные оси:

Просуммируем эти уравнения по всем точкам:



Производная вектора момента количества движения системы относительно некоторого центра по времени равна главному моменту внешних сил системы относительно этого же центра.

Производная момента количества движения системы относительно некоторой оси по времени равна главному моменту внешних сил системы относительно этой же оси.

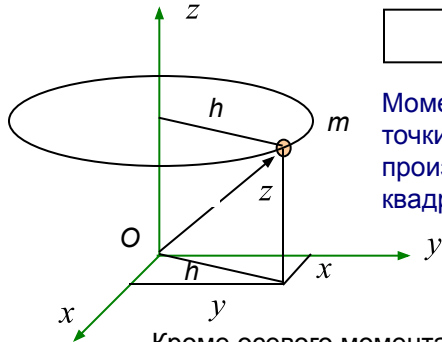
Лекция 8

Следствия из теоремы об изменении момента количества движения системы (законы сохранения):

1. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ вектор главного момента внешних сил системы относительно некоторого центра равен нулю, $M_O^e = 0$, то вектор момента количества движения системы относительно этого же центра постоянен, $K_O = \text{const}$ – закон сохранения момента количества движения системы).
2. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ главный момент внешних сил системы относительно оси x равен нулю, $M_x^e = 0$, то момент количества движения системы относительно оси x постоянен, $K_x = \text{const}$.
Аналогичные утверждения справедливы для осей y и z .

■ **Элементы теории моментов инерции** – При вращательном движении твердого тела мерой инерции (сопротивления изменению движения) является момент инерции относительно оси вращения. Рассмотрим основные понятия определения и способы вычисления моментов инерции.

1. Момент инерции материальной точки относительно оси:

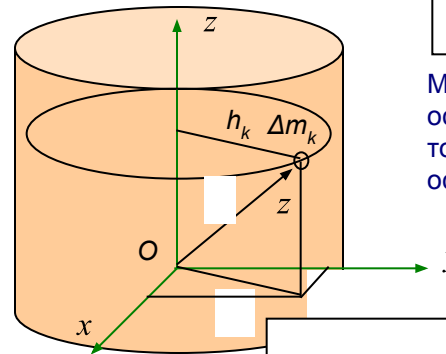


Момент инерции материальной точки относительно оси равен произведению массы точки на квадрат расстояния точки до оси.

Кроме осевого момента инерции твердого тела существуют другие виды моментов инерции:

- центробежный момент инерции твердого тела.

2. Момент инерции твердого тела относительно оси:



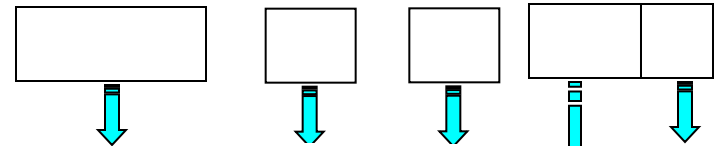
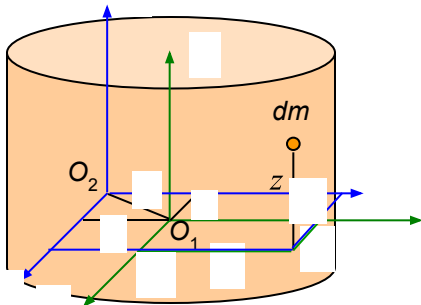
Момент инерции твердого тела относительно оси равен сумме произведений массы каждой точки на квадрат расстояния этой точки до оси.

При переходе от дискретной малой массы к бесконечно малой массе точки предел такой суммы определяется интегралом:

- осевой момент инерции твердого тела.

- полярный момент инерции твердого тела.

3. Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей – формула перехода к параллельным осям:



Момент инерции относительно исходной оси

Таким образом:

Статические моменты инерции относительно исходных осей

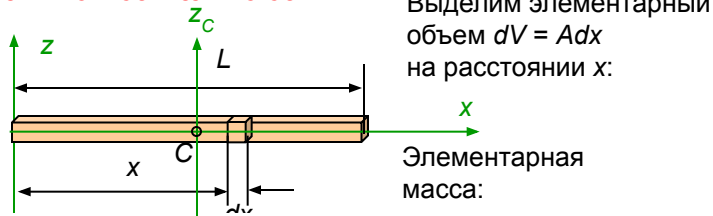
Масса тела

Если ось z_1 проходит через центр масс, то статические моменты равны нулю:

Расстояние между осями z_1 и z_2

Лекция 8 (продолжение 8.2)

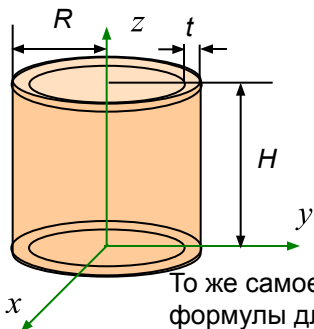
4. Момент инерции однородного стержня постоянного сечения относительно оси:



Для вычисления момента инерции относительно центральной оси (проходящей через центр тяжести) достаточно изменить расположение оси и задать пределы интегрирования $(-L/2, L/2)$. Здесь продемонстрируем формулу перехода к параллельным осям:



6. Момент инерции тонкого цилиндра относительно оси симметрии ($t \ll R$):



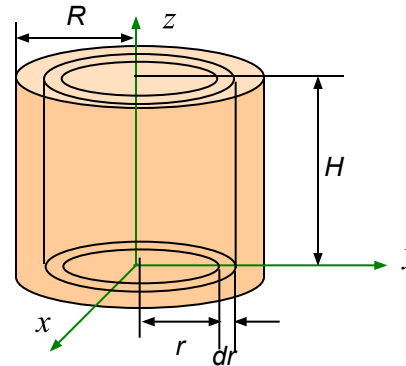
В силу малости толщины цилиндра считаем, что все точки находятся на одинаковом расстоянии R до оси и интегрирования не требуется. Объем $V = 2\pi R t H$. (тонкий цилиндр радиуса R с толщиной стенки t).



То же самое можно получить с использованием формулы для толстостенного цилиндра, учитывая малость t .



5. Момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно оси симметрии:



Выделим элементарный объем $dV = 2\pi r dr H$ (тонкий цилиндр радиуса r):
Элементарная масса:

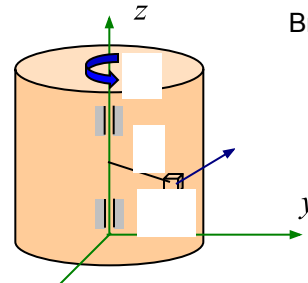


Здесь использована формула объема цилиндра $V = \pi R^2 H$. Для вычисления момента инерции пустотелого (толстого) цилиндра достаточно задать пределы интегрирования от R_1 до R_2 ($R_2 > R_1$):



Поскольку высота цилиндров в результате не входит в формулы моментов инерции, то они остаются справедливыми для тонкого сплошного диска и обода колеса (тонкого кольца).

■ Кинетический момент твердого тела



Выделим дискретный малый объем массы Δm_i :



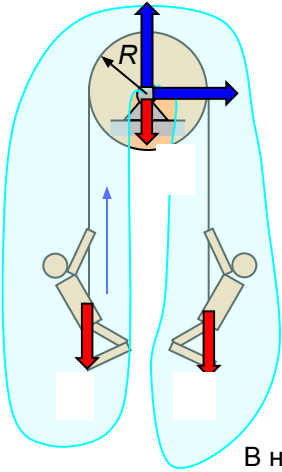
Или переходя к бесконечно малым:



Кинетический момент вращающегося тела равен произведению угловой скорости на момент инерции относительно оси вращения.

Лекция 8 (продолжение 8.3)

Пример: Два человека одинакового веса $G_1 = G_2$ висят на канате, переброшенном через сплошной блок весом $G_3 = G_1/4$. В некоторый момент один из них начал подниматься по канату с относительной скоростью u . Определить скорости подъема каждого из людей.



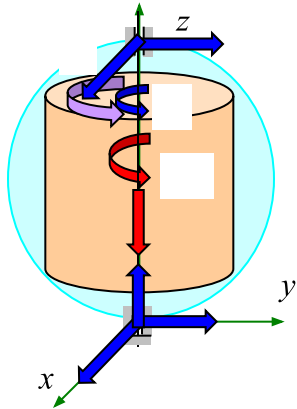
1. Выбираем объект движения (блок с людьми):
2. Отбрасываем связи (опорное устройство блока):
3. Заменяем связь реакциями (подшипника):
4. Добавляем активные силы (силы тяжести):
5. Записываем теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения блока:

Так как момент внешних сил равен нулю, то кинетический момент должен оставаться постоянным:



В начальный момент времени $t = 0$ было равновесие и $K_{z0} = 0$.

■ Дифференциальное уравнение вращения твердого тела относительно оси:



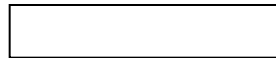
Запишем теорему об изменении кинетического момента твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:



Кинетический момент вращающегося твердого тела равен:

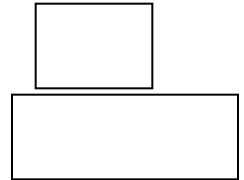
Момент внешних сил относительно оси вращения равен вращающему моменту (реакции и сила тяжести моментов не создают):

Подставляем кинетический момент и вращающий момент в теорему

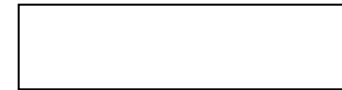


После начала движения одного человека относительно каната вся система пришла в движение, но кинетический момент системы должен остаться равным нулю: $K_z = 0$. Кинетический момент системы складывается из кинетических моментов обоих людей и блока:

Здесь v_2 – скорость второго человека, равная скорости троса,



Пример: Определить период малых свободных колебаний однородного стержня массы M и длиной l , подвешенного одним концом к неподвижной оси вращения.

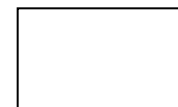


Или:

В случае малых колебаний $\sin \varphi \approx \varphi$:

Период колебаний:

Момент инерции стержня:

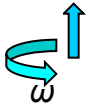


Лекция 8 (продолжение 8.4 – дополнительный материал)

■ Элементарная теория гироскопа:

Гироскоп – твердое тело, вращающееся вокруг оси материальной симметрии, одна из точек которой неподвижна.

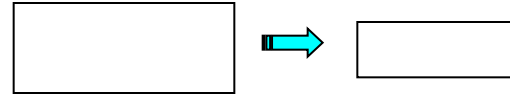
Свободный гироскоп – закреплен так, что его центр масс остается неподвижным, а ось вращения проходит через центр масс и может принимать любое положение в пространстве, т.е. ось вращения изменяет свое положение подобно оси собственного вращения тела при сферическом движении.



Основное допущение приближенной (элементарной) теории гироскопа – вектор момента количества движения (кинетический момент) ротора считается направленным вдоль собственной оси вращения. Таким образом, несмотря на то, что в общем случае ротор участвует в трех вращениях, принимается в расчет только угловая скорость собственного вращения $\omega = d\phi/dt$. Основанием для этого является то, что в современной технике ротор гироскопа вращается с угловой скоростью порядка 5000-8000 рад/с (около 50000-80000 об/мин), в то время как две другие угловые скорости, связанные с прецессией и нутацией собственной оси вращения в десятки тысяч раз меньше этой скорости.

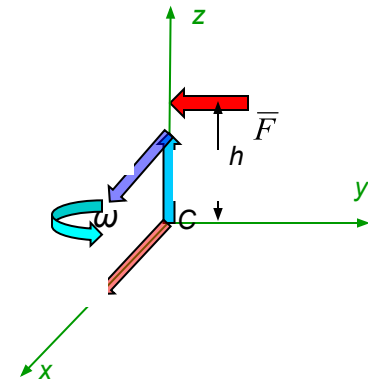
Основное свойство свободного гироскопа – ось ротора сохраняет неизменное направление в пространстве по отношению к инерциальной (звездной) системе отсчета (демонстрируется маятником Фуко, сохраняющим неизменной по отношению к звездам плоскость качания, 1852 г.).

Это вытекает из закона сохранения кинетического момента относительно центра масс ротора при условии пренебрежения трением в подшипниках осей подвески ротора, внешней и внутренней рамы:



Действие силы на ось свободного гироскопа.

В случае действия силы, приложенной к оси ротора, момент внешних сил относительно центра масс не равен нулю:



Производная кинетического момента по времени равна скорости конца этого вектора (теорема Резаля):



Это означает, что ось ротора будет отклоняться не в сторону действия силы, а в сторону вектора момента этой силы, т.е. будет поворачиваться не относительно оси x (внутренняя подвеска), а относительно оси y (внешняя подвеска).

При прекращении действия силы ось ротора останется в неизменном положении, соответствующем последнему моменту времени действия силы, т.к. с этого момента времени момент внешних сил вновь становится равным нулю. В случае кратковременного действия силы (удара) ось гироскопа практически не меняет своего положения.

Таким образом, быстрое вращение ротора сообщает гироскопу способность противодействовать случайным воздействиям, стремящимся изменить положение оси вращения ротора, а при постоянном действии силы сохраняет положение плоскости, перпендикулярной действующей силе, в которой лежит ось ротора. Эти свойства используются в работе инерциальных систем навигации.