Квантовая теория свободного поля излучения

Лекция 3

5. Квантование поля излучения

- Из задачи о тепловом равновесии излучения с черным телом классическая теория приводит к „ультрафиолетовой катастрофе” (плотность энергии для коротких волн стремится к бесконечности).
- Для преодоления этой трудности, Планк допустил, что энергия монохроматической волны с частотой ν может принимать дискретные значения:

$$E = n\hbar\nu \qquad (5.1)$$

- Здесь n — целое число, число световых квантов или фотонов; $2\pi\hbar = h$ — универсальная постоянная Планка.
- В соответствии с (5.1) пучок света состоит из некоторого числа фотонов.
- С другой стороны, он может приводить к дифракционным явлениям, характерным для классического представления о волне.

5. Квантование поля излучения

- Необходимость квантования электромагнитного поля также возникает из-за того, что квантовые свойства частицы выражаются в соотношении неопределенностей между координатой и импульсом

$$\Delta q \Delta p \sim \hbar c \qquad (5.2)$$

- Это соотношение было бы неверно, если бы для пучка света выполнялась классическая теория. В этом случае возможно точное определение координаты частицы с помощью сходящегося пучка света, без передачи ей импульса, поскольку импульс светового пучка можно сделать очень малым.
- Поэтому, если бы импульс p был измерен ранее, можно было бы узнать положение и импульс с точностью, выходящей за пределы (5.2).
- Для выполнения (5.2) необходимо квантование световых волн.
- Тогда световой пучок, если его частота и форма позволяют произвести измерение координаты с точностью Δq, обязательно будет обладать некоторым минимальным импульсом, который имеет неопределенность Δp.
- Этот импульс будет передаваться частице способом, не допускающим контроля экспериментатора, и соотношение неопределенностей (5.2) сохранится и после измерения положения частицы.

5.2 Квантование свободного поля излучения

- При построении формализма квантовой электродинамики руководствуются аналогией между классической механикой и классической электродинамикой.
- Поэтому для описания поля используют набор канонических переменных.
- Рассмотрим свободное поле излучения, которое образуется суперпозицией поперечных волн.
- В случае кулоновской калибровки никаких других волн не существует .
- Такое поле получается из векторного потенциала $\mathbf{A}$, который можно записать в виде ряда по плоским волнам:

$$A = \sum_{\lambda} (q_\lambda \mathbf{A}_\lambda + q_\lambda^* \mathbf{A}_\lambda^*)\,, \qquad \operatorname{div} \mathrm{A}_\lambda = 0 \qquad (5.3)$$

$$\mathbf{A}_\lambda = \sqrt{4\pi c^2}\,\mathbf{e}_\lambda c^{i(\boldsymbol{\kappa}_\lambda \mathbf{r})}$$

- $\boldsymbol{\kappa}_\lambda$ - вектор, задающий направление распространения; $\mathbf{e}_\lambda$ - направление поляризации

5.2 Квантование свободного поля излучения

- Вводя канонические переменные $Q_\lambda = q_\lambda + q_\lambda^*$ и $P_\lambda = -i\nu_\lambda(q_\lambda - q_\lambda^*)$, (5.4)
- можно получить для энергии отдельной волны

$$H_\lambda = \frac{1}{2}\left(P_\lambda^2 + \nu_\lambda^2 Q_\lambda^*\right) \qquad (5.5)$$

- Если квантовая теория излучения записана в такой форме, то возможно ввести квант действия h.
- По аналогии с квантовой механикой считаем теперь канонические переменные каждого осциллятора поля некоммутирующими операторами с перестановочными соотношениями:

$$[P_\lambda Q_\lambda] \equiv P_\lambda Q_\lambda - Q_\lambda P_\lambda = -i\hbar, \qquad (5.6)$$
$$\left[P_\lambda Q_\mu\right] \equiv [P_\lambda P_\mu] = [Q_\lambda Q_\mu] = 0, \qquad (7.6)$$

- Собственные значения энергии для такого осциллятора равны

$$E_\lambda = \left(n_\lambda + \frac{1}{2}\right)\hbar\nu_\lambda, \qquad (5.7)$$

- где n_λ— целое число.

5.2 Квантование свободного поля излучения

- В соответствии с гипотезой Планка (5.1) каждый осциллятор поля обладает энергией, кратной $\hbar\nu_\lambda$.
- Однако получается, что каждый осциллятор обладает еще нулевой энергией $\frac{1}{2}\hbar\nu_\lambda$ даже в низшем состоянии с $n_\lambda = 0$.
- Поскольку число осцилляторов поля в некотором заданном объеме бесконечно, то этот вывод приводит к необходимости приписать вакууму бесконечную нулевую энергию.

5.2 Квантование свободного поля излучения

- Эта трудность, формальная. Примененный метод перехода от классической теории к квантовой не единственен, поскольку q и q^* являются некоммутирующими величинами.
- Гамильтониан (5.5), записанный через операторы q, имеет вид

$$H_\lambda = \nu^2 (q_\lambda q_\lambda^* + q_\lambda^* q_\lambda). \qquad (5.8)$$

- Но (5.8) можно было бы записать, не нарушая соответствия с классической теорией, с измененным порядком следования операторов q_λ^* и q_λ в одном из членов. Например, написать вместо (5.8)

$$H_\lambda = 2\nu_\lambda^2 q_\lambda^* q_\lambda = \frac{1}{2}\left(P_\lambda^2 + \nu^2 Q_\lambda^2\right) - \frac{1}{2}\hbar\nu_\lambda. \qquad (5.9)$$

- Но тогда гамильтониан (5.9) имел бы собственные значения

$$E_\lambda = n_\lambda \hbar\nu_\lambda, \qquad \frac{\hbar}{2\nu_\lambda} n_\lambda = q_\lambda^* q_\lambda \qquad (5.10)$$

- и нулевая энергия исчезла бы.

5.2 Квантование свободного поля излучения

- Состояние поля излучения описывается теперь числами n_λ для всех осцилляторов.
- В классической теории амплитуды Q_λ или q_λ и q_λ^* зависят от времени.
- В квантовой теории они были заменены операторами, не зависящими от времени. Зависимость какого-либо явления от времени будет выражаться теперь изменением со временем волновой функции.
- Из (5.4) производные от q_λ и q_λ^* по времени переходят в операторы
- $\dot{q}_\lambda \to -i\nu_\lambda q_\lambda$ вместо и $\dot{q}_\lambda^* \to +i\nu_\lambda q_\lambda^*$.
- Отсюда следует, что напряженности полей (5.3) будут представляться операторами:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} = +\frac{i}{c}\sum_\lambda \nu_\lambda (q_\lambda \mathbf{A}_\lambda - q_\lambda^* \mathbf{A}_\lambda^*)\,, \qquad (5.11)$$

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = i\sum_\lambda (q_\lambda[\boldsymbol{\kappa}_\lambda \mathbf{A}_\lambda] - q_\lambda^*[\boldsymbol{\kappa}_\lambda \mathbf{A}_\lambda^*]).$$

5.2 Квантование свободного поля излучения

- Для гамильтониана мы получим тогда

$$H = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 + H^2)d\tau = \sum_{\lambda} H_\lambda = \sum_{\lambda} n_\lambda \hbar \nu_\lambda \,. \qquad (5.12)$$

- Такое представление, в котором амплитуды выражаются операторами, не зависящими от времени, называется представлением Шредингера.

5.2 Квантование свободного поля излучения

- Рассмотрим теперь импульс поля, определяемый в классической теории формулой

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi}\int [\mathbf{E}\mathbf{H}]\, d\tau$$

- Импульс $\mathbf{G}$ также можно представить в виде суммы

$$\mathbf{G} = \sum_{\lambda} \mathbf{G}_{\lambda}\,, \qquad \mathbf{G}_{\lambda} = \frac{1}{4\pi}\int [\mathbf{E}_{\lambda}\mathbf{H}_{\lambda}]\, d\tau, \tag{5.13}$$

- где $\mathbf{G}_{\lambda}$ — импульс плоской волны.

5.2 Квантование свободного поля излучения

- $$\mathbf{G}_\lambda = 2\nu_\lambda c \boldsymbol{\kappa}_\lambda q_\lambda^* q_\lambda, \qquad \kappa_\lambda = \frac{\nu_\lambda}{c}, \qquad (5.14)$$
- где $\boldsymbol{\kappa}_\lambda$ — вектор, направленный по направлению распространения волны, длина которого равна обратному значению длины волны.
- Порядок операторов q и q^* в (5.14) выбран таким образом, чтобы не появилось нулевого импульса.
- Выражение (5.14) для импульса совпадает с точностью до численного множителя с выражением (5.12) для энергии.
- Поэтому импульс коммутирует с энергией, а его собственные значения равны

$$\mathbf{G}_\lambda = c\boldsymbol{\kappa}_\lambda n_\lambda \hbar = n_\lambda \mathbf{k}_\lambda, \qquad |\mathbf{k}_\lambda| = \hbar\nu_\lambda, \qquad (5.15)$$

- где $\mathbf{k}_\lambda$ — вектор, совпадающий по направлению с вектором распространения.

5.2 Квантование свободного поля излучения

- Таким образом, энергия и импульс световой волны являются целыми кратными величин $\mathbf{k}_\lambda$.
- С точки зрения свойств ее энергии и импульса плоская волна ведет себя как пучок n свободных частиц с энергией $\hbar\nu$ и импульсом $\mathbf{k}$.
- Эти частицы называются световыми квантами, или фотонами.
- Энергия покоя светового кванта равна, в силу (5.10) и (5.15), нулю

$$G_\lambda^2 - E_\lambda^2 = 0. \qquad (5.16)$$

- С другой стороны, квантованная волна по-прежнему сохраняет классические волновые свойства, т. е. может интерферировать.
- Дуалистическая природа света как волны и пучка свободных частиц аналогична дуалистической природе пучка свободных электронов (которым свойственна и природа частиц и природа волн де-Бройля).

5.2 Квантование свободного поля излучения

- Для того чтобы при переходе к классической теории квантовая электродинамика превращалась в теорию поля, необходимо, чтобы световые кванты подчинялись статистике Бозе—Эйнштейна.
- Световые кванты появляются в теории как квантовые числа осцилляторов поля.
- Поэтому два световых кванта нельзя отличить друг от друга. Кроме того, число световых квантов, приписанных каждому осциллятору, не ограничено.
- Если рассматривать осцилляторы поля как „квантовые ячейки", то состояние всего поля излучения будет определяться заданием чисел неразличимых частиц в каждой квантовой ячейке. Применяя статистические методы, можно получить формулу распределения Планка.
- Если бы световые кванты удовлетворяли статистике Ферми— Дирака, т.е. каждый осциллятор поля мог бы содержать не более одного кванта, то даже для радиоволн интенсивность не могла бы превышать $\hbar\nu$ и убывала бы с возрастанием длины волны. Поэтому длинные волны не могли бы существовать.

5.3 Амплитуда состояния поля излучения.

- После квантования полевые величины $\mathbf{A}$, а следовательно, и $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ становятся операторами, которые должны действовать на волновую функцию (или амплитуду состояния) Ψ.
- Амплитуда состояния удовлетворяет общему уравнению Шредингера

$$i\hbar\dot{\Psi} = H\Psi \quad (5.17)$$

- где H—гамильтониан системы. Для свободного поля излучения гамильтониан дается выражением (5.12)

$$H = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 + H^2)d\tau = \sum_\lambda H_\lambda = \sum_\lambda n_\lambda \hbar\nu_\lambda\,. \qquad (5.12)$$

- Мы имеем дело с бесконечным числом степеней свободы, каждой из которых соответствует один осциллятор поля.
- Тогда взаимодействие между осцилляторами поля отсутствует и собственное состояние оператора H должно представляться произведением ($\Psi^{(1)}\Psi^{(2)} \dots \Psi^{(\lambda)} \dots$) нормированных собственных амплитуд состояния $\Psi^{(\lambda)}$ отдельных H_λ.

5.3 Амплитуда состояния поля излучения

- Поскольку собственными значениями операторов H_λ являются $E_\lambda = n_\lambda \hbar \nu_\lambda$, то возможно характеризовать различные состояния $\Psi^{(\lambda)}$ числами заполнения n_λ:

$$\Psi^{(\lambda)} = \Psi_{n_\lambda}, \qquad n_\lambda = 0, 1, 2, \ldots$$

$$H_\lambda \Psi_{n_\lambda} = n_\lambda \hbar \nu_\lambda \Psi_{n_\lambda} \qquad (5.18)$$

- Общее решение уравнения (5.17), тогда будет представляться в виде

$$\Psi(t) = \sum_{n_1 \ldots n_\lambda \ldots} c_{n_1 \ldots n_\lambda \ldots}(t) \Psi_{n_1} \Psi_{n_2} \ldots \Psi_{n_\lambda} \ldots, \qquad (5.19)$$

- где $\left| c_{n_1} \ldots n_\lambda \ldots (t) \right|^2$ — вероятность найти n_1 фотонов типа 1, n_λ фотонов типа λ
- Собственным решением (5.17) с полной энергией $E = \sum_\lambda E_\lambda$ будет

$$\Psi(t) = \prod_\lambda \Psi_{n_\lambda}(t) = \prod_\lambda e^{-iE_\lambda t/\hbar} \Psi_{n_\lambda} = e^{-iEt/\hbar} \prod_\lambda \Psi_{n_\lambda} \qquad (5.20)$$

- Если поле взаимодействует с частицами, то в гамильтониане H должны содержаться члены, описывающие взаимодействие.

5.3 Амплитуда состояния поля излучения

- Кроме представления Шредингера (в котором операторы не зависят от времени, а Ψ зависит), используют представление Борна-Гайзенберга, в котором временная зависимость переведена на операторы и Ψ не зависит от времени.
- При рассмотрении взаимодействия между светом и частицами, часто используется промежуточное представление, называемое представление взаимодействия, где временная зависимость отнесена к операторам и к амплитуде состояния.

5.4 Световые кванты и фазы

- Величины, описывающие поле излучения (напряженности полей, числа световых квантов и т. д.) обладают определенными численными значениями, но являются квантовомеханическими величинами, которые не коммутируют.
- Какая-либо пара таких величин будет удовлетворять некоторым перестановочным соотношениям, которые будут определять их поведение.
- Рассмотрим такие соотношения, в которых участвуют числа световых квантов.
- Число световых квантов λ-го осциллятора поля представляется

$$n_\lambda = \frac{2\nu_\lambda}{h} q_\lambda^* q_\lambda \qquad (5.23)$$

5.4 Световые кванты и фазы

- Из каждого квантовомеханического перестановочного соотношения всегда можно вывести соответствующее соотношение неопределенностей.
- Если две физические величины A и B удовлетворяют уравнению

$$AB - BA = C, \qquad (5.24)$$

- где C — число, то A и B должны удовлетворять соотношению неопределенностей

$$\Delta A \Delta B \geq |C|, \qquad (5.25)$$

- смысл которого состоит в следующем: если значения A и B известны лишь приближенно, и если величина A определяется с неточностью ΔA, то величина B может быть известна только с неточностью, превышающей $C/\Delta A$.
- Любая экспериментальная попытка обойти эти пределы с помощью точного измерения невозможна вследствие взаимодействия между измерительной аппаратурой и системой.

5.4 Световые кванты и фазы

- Вместо напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ можно ввести фазу φ волны, полагая (для каждого λ)

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\nu}} e^{i\varphi} \sqrt{n}, \qquad q^* = \sqrt{\frac{\hbar}{2\nu}} \sqrt{n}\, e^{-i\varphi}$$

- Тогда для φ можно получить из перестановочного соотношения для q и q^*

$$e^{i\varphi} n - n e^{i\varphi} = e^{i\varphi}, \qquad (5.26)$$

- которое будет выполнено, если φ и n удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\varphi n - n\,\varphi = - i \qquad (5.27)$$

- и соотношениям неопределенностей

$$\Delta n \Delta \varphi \geq 1. \qquad (5.28)$$

- Из (5.28) следует, что если число световых квантов в волне задано, то фаза этой волны полностью неопределенна, и наоборот.
- Если для двух волн известны разности фаз (но не абсолютные фазы), то можно определить полное число световых квантов, но останется неопределенным, к какой из волн они относятся.

5.4 Световые кванты и фазы

- Покажем, что для квантованной световой волны, выполняется соотношение неопределенностей (5.2).

$$\Delta q \Delta p \sim \hbar c \qquad (5.2)$$

- Из (5.2): если пучок света выбран таким образом, что он может дать изображение точки (электрона) по координате x с неточностью Δx, то x-составляющая импульса этого пучка должна обладать неопределенностью, не меньшей $\Delta G_x \approx c\hbar/\Delta x$.
- Согласно классической оптике, изображение точки может быть образовано сходящимся монохроматическим пучком света с телесным углом апертуры θ и длиной волны λ, однако благодаря диффракции фокус будет обладать в x-направлении конечным протяжением, определяемым формулой

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \theta}. \qquad (5.29)$$

- (5.29) определяет размеры изображения, т. е. неточность в измерении положения электрона.
- Сходящийся пучок света можно построить из набора плоских волн с одной и той же длиной волны, но различными направлениями распространения $\mathbf{\kappa}$.
- Суперпозиция этих плоских волн должна производиться с заданными разностями фаз, иначе пучок не будет обладать определенным фокусом.

5.4 Световые кванты и фазы

- Неопределенность в значении $\mathbf{G}$ можно оценить из предположения, что полное число квантов в пучке равно единице, тогда неопределенным останется то, к какой плоской волне относится этот единственный квант, т. е. направление кванта.
- Квант может быть направлен произвольно в пределах апертуры пучка θ. Следовательно, ошибка в G_x будет равна

$$\Delta G_x \approx k \sin\theta = \hbar\nu \sin\theta \qquad (5.30)$$

- Но из (5.29) и (5.30) получается соотношение неопределенностей

$$\Delta G_x \Delta x \approx \hbar c \qquad (5.31)$$

- аналогичное (5.2).
- Соотношение неопределенностей (5.31) является следствием того, что импульс не может быть меньше $\hbar\nu$.

6.1. Перестановочные соотношения для напряженностей поля

- В общем случае векторный потенциал $\mathbf{A}$ пердставим в виде ряда, амплитуды которого можно рассматривать как некоммутирующие операторы.
- Если рассматривать $\mathbf{A}$ как функцию координат, то $\mathbf{A}$ в каждой точке пространства будет оператором и не будет в общем случае коммутировать с $\mathbf{A}$ в другой точке пространства.
- Если используется представление взаимодействия, то $\mathbf{A}$ является функцией также и от времени, и значения $\mathbf{A}$, взятые в двух разных пространственно-временных точках, являются двумя различными физическими величинами.
- В представлении взаимодействия напряженности поля задаются выражениями

$$\mathbf{E} = i\sqrt{4\pi}\sum_{\lambda} \nu_\lambda\, \mathbf{e}_\lambda \left\{ q_\lambda e^{i(\mathrm{\kappa}_\lambda \mathbf{r} - \nu_\lambda)} - q_\lambda^* e^{i(\mathrm{\kappa}_\lambda \mathbf{r} - \nu_\lambda)} \right\} \qquad (6.1)$$

$$\mathbf{H} = i\sqrt{4\pi c^2}\sum_{\lambda} [\boldsymbol{\kappa}_\lambda\, \mathbf{e}_\lambda] \left\{ q_\lambda e^{i(\mathrm{\kappa}_\lambda \mathbf{r} - \nu_\lambda)} - q_\lambda^* e^{i(\mathrm{\kappa}_\lambda \mathbf{r} - \nu_\lambda)} \right\} \qquad (6.2)$$

- С условиями

6.1. Перестановочные соотношения для напряженностей поля

- Если рассмотреть две составляющие вектора $\mathbf{H}$, H_i и H_k, в двух пространственно-временных точках $P_1(\mathbf{r}_1, t_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2, t_1)$, тогда перестановочное соотношение для этих составляющих примет вид

$$[H_i(P_1)H_k(P_2)] = 4\pi i\hbar c\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\delta_{ik} - \frac{\partial^2}{\partial x_{i1}\partial x_{k2}}\right)\Delta \qquad (6.4a)$$

$$\Delta = \frac{\delta(r - ct) - \delta(r + ct)}{4\pi r}, \qquad r = r_2 - r_1, \qquad t = t_2 - t_1 \quad (6.5)$$

- Δ -функция зависит от аргументов

$$|r_2 - r_1| - c(t_2 - t_1) \text{ и } |r_2 - r_1| + c(t_2 - t_1). \quad (6.6)$$

- Δ -функция отлична от нуля, только если две пространственно-временные точки, поля в которых рассматриваются, можно соединить световым сигналом.
- Поэтому напряженности ноля в двух пространственно-временных точках, которые не могут быть соединены световым сигналом, коммутируют друг с другом.

6.1. Перестановочные соотношения для напряженностей поля

- Перестановочные соотношения других напряженностей поля:

$$[E_i(P_1)E_k(P_2)] = [H_i(P_1)H_k(P_2)], \qquad (6.4б)$$

$$[E_i(P_1)H_i(P_2)] = 0, \qquad (6.4в)$$

$$[E_i(P_1)H_k(P_2)] = -4\pi i\hbar \frac{\partial^2}{\partial x l_2 \partial t_1} \Delta \qquad (6.4г)$$

- ($i \neq k$; i, k и l образуют четную перестановку из x, y и z).

- Из числа универсальных постоянных в перестановочные соотношения (6.4) входят только c и $\hbar$, но не входит никаких постоянных, относящихся к атомной структуре материи (m или e).

6.2 Соотношения неопределенностей для напряженностей поля

- Из квантовомеханических перестановочных соотношений (6.4) можно получить соответствующие соотношения неопределенностей.
- Если две физические величины A и B удовлетворяют уравнению

$$AB - BA = C,$$

- где C — обычное число, то A и B будут удовлетворять соотношению неопределенностей

$$\Delta A \Delta B \sim |C|$$

- Получаемые таким образом соотношения неопределенностей являются соотношениями между напряженностями полей в заданных точках пространства и времени, в то время как измеримыми величинами являются значения напряженностей поля, усредненные по областям в пространстве и времени.

6.2 Соотношения неопределенностей для напряженностей поля

- Чтобы получить соотношения для таких усредненных значений, необходимо проинтегрировать (6.4) по двум пространственно-временным областям $L_1^3 T_1$ и $L_2^3 T_2$ для двух входящих в каждое уравнение напряженностей поля.
- Будем называть эти области соответственно I_1 и I_2, а относящиеся к ним средние значения напряженностей поля E_{xI_1} или $E_{xL_1T_1}$.
- Результат интегрирования правой части (6.4) будет зависеть от относительного расположения двух таких областей, точнее от того, может ли выходящий из I_1 световой сигнал достигнуть точек I_2, и наоборот.

6.2 Соотношения неопределенностей для напряженностей поля

- Ограничимся несколькими случаями:

- а) Обе временные области совпадают: $T_1 = T_2$.
- Согласно (6.5) и (6.6), Δ-функция антисимметрична в двух временах t_1 и t_2.
- С другой стороны, (6.4a) симметрично в производных по этим двум временам. Поэтому временной интеграл от правой части (6.4a) по $T_1 = T_2$ обратится в нуль. Следовательно:

$$\Delta E_{iL_1T}\Delta E_{kL_2T} = \Delta H_{iL_1T}\Delta H_{kL_2T} = 0 \qquad (6.7)$$

- Тогда средние значения двух составляющих электрического или магнитного поля, взятые по совпадающим временным, но различным пространственным областям, коммутируют друг с другом и потому могут быть измерены одновременно.

6.2 Соотношения неопределенностей для напряженностей поля

- б) Обе пространственные области совпадают: $L_1 = L_2$. Тогда интеграл от правой части (6.4г) обращается в нуль и мы получаем

$$\Delta E_{iLT_1} \Delta H_{kLT_2} = 0 \qquad (6.8)$$

- Тогда средние значения напряженности электрического поля и напряженности магнитного поля, взятые по одной и той же пространственной, но разным временным областям, коммутируют и, следовательно, могут быть измерены одновременно.
- Из (6.7) и (6.8) следует, что средние значения каких-либо двух составляющих напряженностей поля по одной и той же пространственно-временной области всегда можно измерить одновременно.

6.2 Соотношения неопределенностей для напряженностей поля

- в) Две области I_1 и I_2 выбраны таким образом, что световые сигналы из некоторых точек I_1 могут достигнуть I_2, но не наоборот.
- Тогда вторая из Δ-функций в (6.5) не даст никакого вклада в интеграл.
- Рассмотрим два случая одновременных измерений: x-составляющей напряженности электрического поля E_x в I_1 и в I_2 и случай измерения E_x в I_1 и H_y в I_2.
- Уравнения (6.4) приведут к соотношениям неопределенностей для $\Delta E_{xI_1}\Delta H_{yI_2}$ и $\Delta E_{xI_1}\Delta E_{xI_2}$
- Чтобы оценить порядки величин неопределённостей, допустим, что $L_1 \sim L_2$, $T_1 \sim T_2$ и что расстояние между обеими пространственными областями L_1 и L_2 равно r.
- Будем считать, что размеры той части I_2, в которую могут попадать световые сигналы из I_1 того же порядка, что и сама I_2.
- Порядок величины неопределенностей будет зависеть от того, что $L > cT$ или $L < cT$. Тогда

6.2 Соотношения неопределенностей для напряженностей поля

- $$\Delta E_{xI_1}\Delta H_{yI_2} \sim \begin{cases} \dfrac{\hbar}{r^2LT} & (L \gg cT) \\ \dfrac{\hbar}{r^2cT^2} & (L \ll cT) \end{cases} \qquad (6.9)$$

- Аналогичные выражения получаются и для $\Delta E_{xI_1}\Delta E_{xI_2}$.
- Оказывается, что две составляющие напряженностей поля в двух таких областях могут быть измерены тем точнее, чем больше расстояние между двумя пространственными областями.
- Уравнение (6.9) дает критерий того, когда становятся существенны квантовые свойства поля и когда можно применять классическую теорию.
- Классическая теория имеет место в том случае, когда напряженности поля велики по сравнению с правой частью (6.9).

6.2 Соотношения неопределенностей для напряженностей поля

- Если напряженности поля составляют по порядку величины E, то мы получаем (допуская, что расстояние между двумя областями порядка L)

$$E^2 L^3 cT \gg \hbar c \qquad (L > cT). \qquad (6.10)$$

- Поэтому типичной квантовой областью являются слабые поля.
- Для световой волны частоты ν формула (6.10) выражает условие, что числа содержащихся в L^3 световых квантов n должно быть велико.
- Поскольку $E^2 L^3 = n\hbar\nu$ и поскольку временной интервал T должен быть выбран меньшим $1/\nu$ (в противном случае среднее значение E обратилось бы в нуль), получаем из (6.10):

$$n \gg 1$$