

# Квантовые нейронные сети и ассоциативная память

Дмитрий Новицкий,  
отдел нейротехнологий ИПММС

# ОСНОВЫ КВАНТОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

## ■ Кубиты

- Единицей квантовой информации является *кубит*
- Кубит можно представить как систему с 2-мя состояниями, напр. спин 1/2 или двухуровневая система.
- Состояние кубита описывается вектором из 2х компонент:

$$\psi = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle$$

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$$

# ОСНОВЫ КВАНТОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

## ■ Квантовые гейты

- Квантовые гейты являются аналогами булевских операций AND, OR, NOT, и т.д.

- Квантовый гейт, действующий на  $n$  кубитов это унитарный оператор

$$U : \mathbb{C}^{2^n} \rightarrow \mathbb{C}^{2^n}$$

- Пример: гейт NOT:

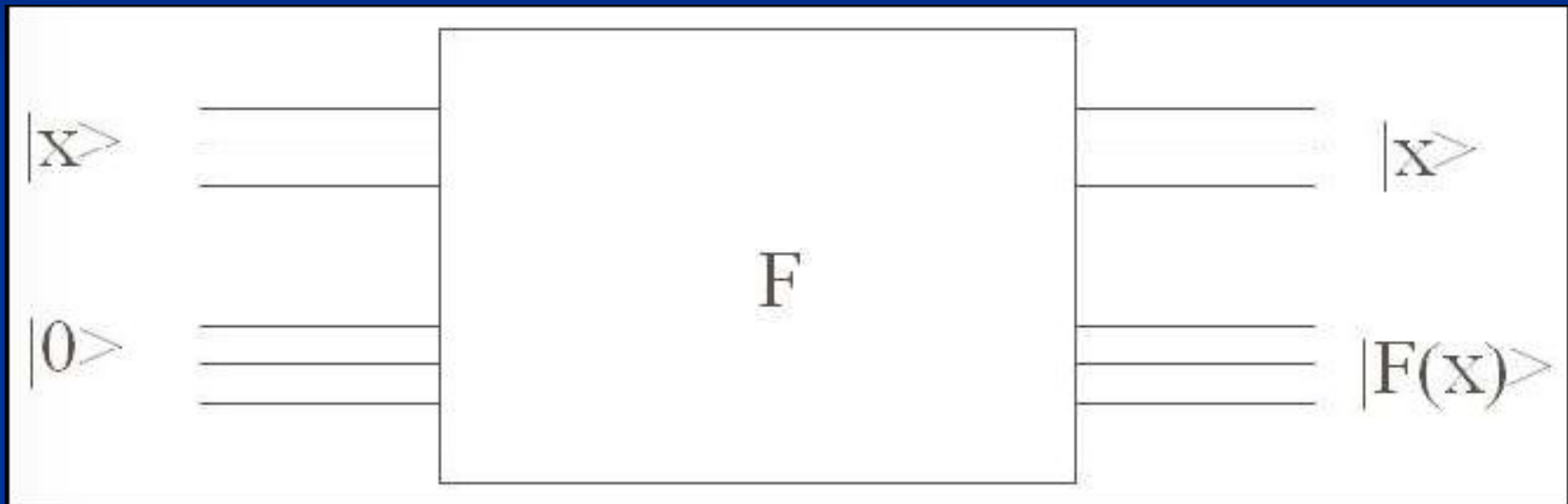
$$\mathbf{NOT} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Квантовые алгоритмы

- Алгоритм Саймона поиска периода функции
- Алгоритм Шора разложения на простые множители
- Алгоритм поиска Гровера
- Алгоритм Дойча — Джоза

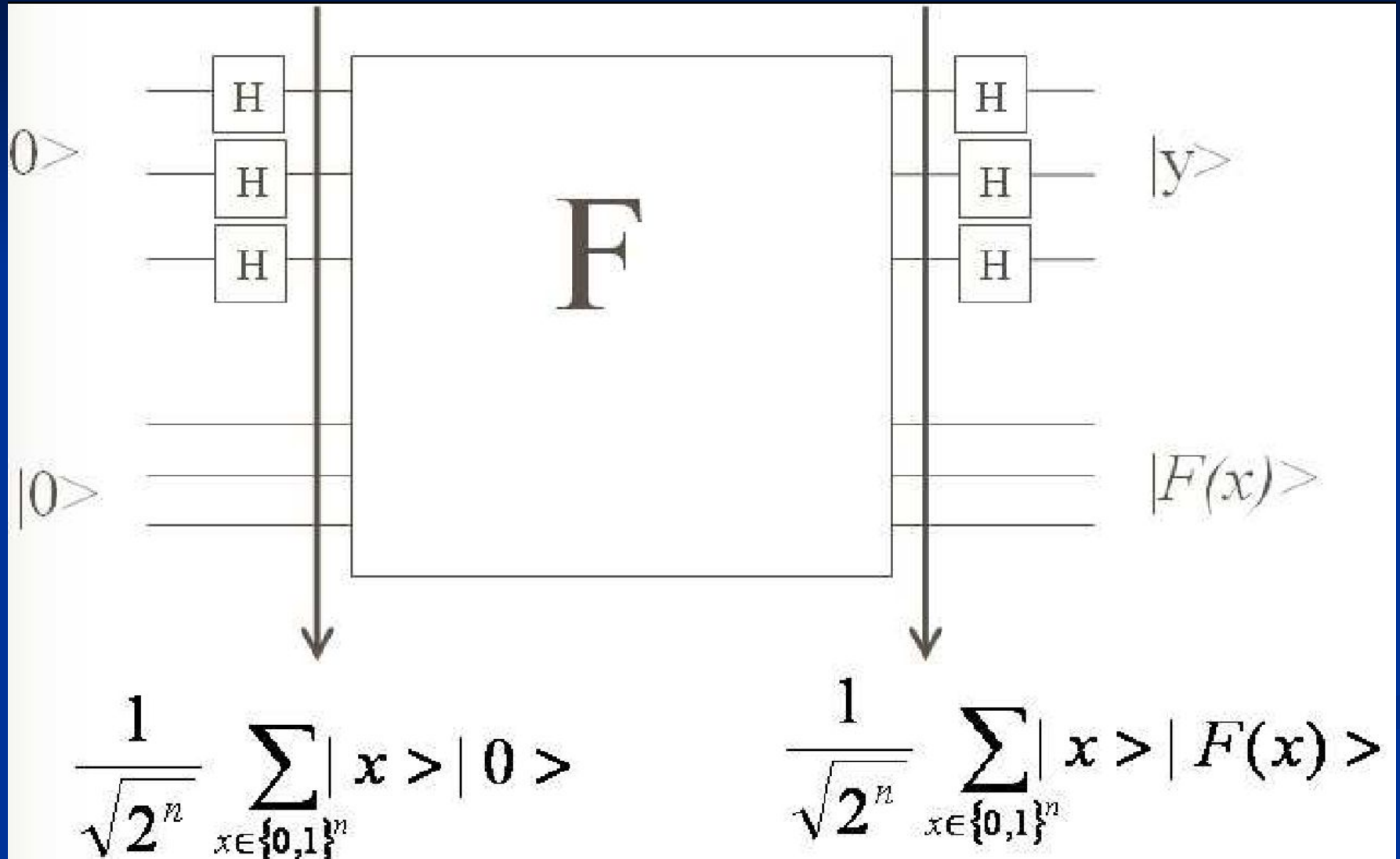
# Алгоритм Шора

- Ключевая идея: квантовый параллелизм



$$\sum_x |x\rangle|0\rangle \rightarrow \sum_x |x|f(x)\rangle\rangle$$

# Алгоритм Саймона



# Алгоритм Шора: основные шаги

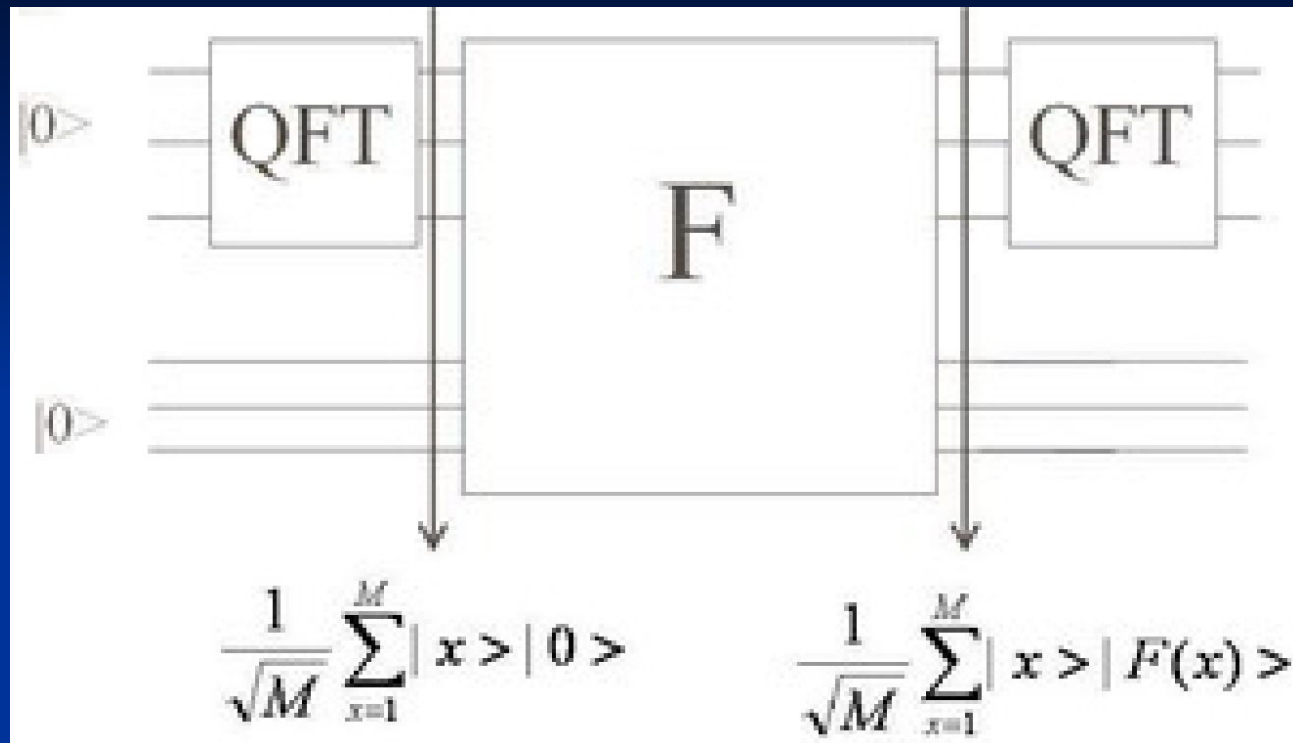
1. Выбрать случайный остаток  $a$  по модулю  $N$
2. Проверить  $\text{НОД}(a, N) = 1$
3. Найти порядок  $r$  остатка  $a$  по модулю  $N$
4. Если  $r$  четен то вычислить  $\text{НОД}(a^{r/2} - 1, N)$

Определение: минимальное  $r$  такое что  $a^r \equiv 1 \pmod{N}$   
называется порядком  $a$  по модулю  $N$

Порядок является периодом функции

$$f(x) = a^x \pmod{N}$$

# Алгоритм Шора



Квантовое преобразование Фурье:

$$\mathbf{U}_{FT} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sum_{k=0}^{\omega-1} e^{2\pi i kx / \omega} |k\rangle$$



# Алгоритм Гровера

- Поиск в базе из  $N$  элементов за время  $O(\sqrt{N})$
- Определим оператор  $U_\omega$

$$\begin{aligned} U_\omega |\omega\rangle &= -|\omega\rangle \\ U_\omega |x\rangle &= |x\rangle \quad \text{for all } x \neq \omega \end{aligned}$$

## Инициализация

The steps of Grover's algorithm are given as follows. The person running the algorithm makes use of  $|s\rangle$  which denotes the uniform distribution over all states,

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=1}^N |x\rangle$$

and an operator  $U_s$  which is defined as follows:

$$U_s = 2 |s\rangle \langle s| - I.$$

# Алгоритм Гровера

## ■ Основной цикл

1. Initialize the system to the state

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=1}^N |x\rangle$$

2. Perform the following "Grover iteration"  $r(N)$  times. The function  $r(N)$ , which is asymptotically  $O(N^{1/2})$ , is described below.

1. Apply the operator  $U_\omega$ .

2. Apply the operator  $U_s$ .

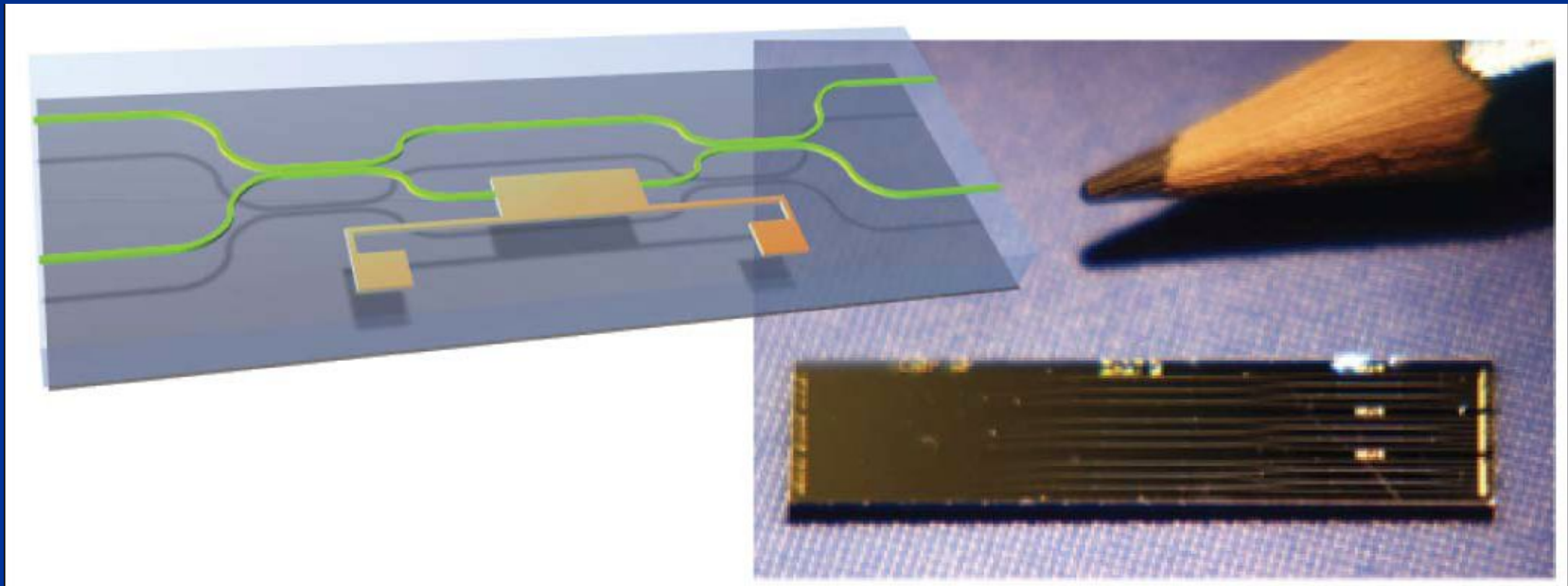
3. Perform the measurement  $\Omega$ . The measurement result will be  $\lambda_\omega$  with probability approaching 1 for  $N \gg 1$ . From  $\lambda_\omega$ ,  $\omega$  may be obtained.

# Физические реализации

- Ионные ловушки
- Ядерно-магнитный резонанс
- Оптические резонаторы
- Джозефсоновские контакты
- Квантовые точки

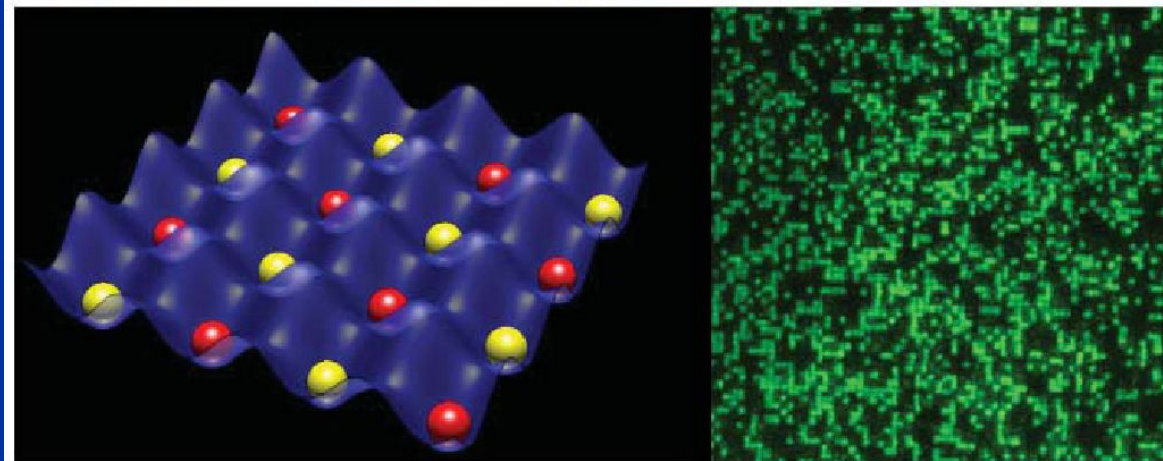
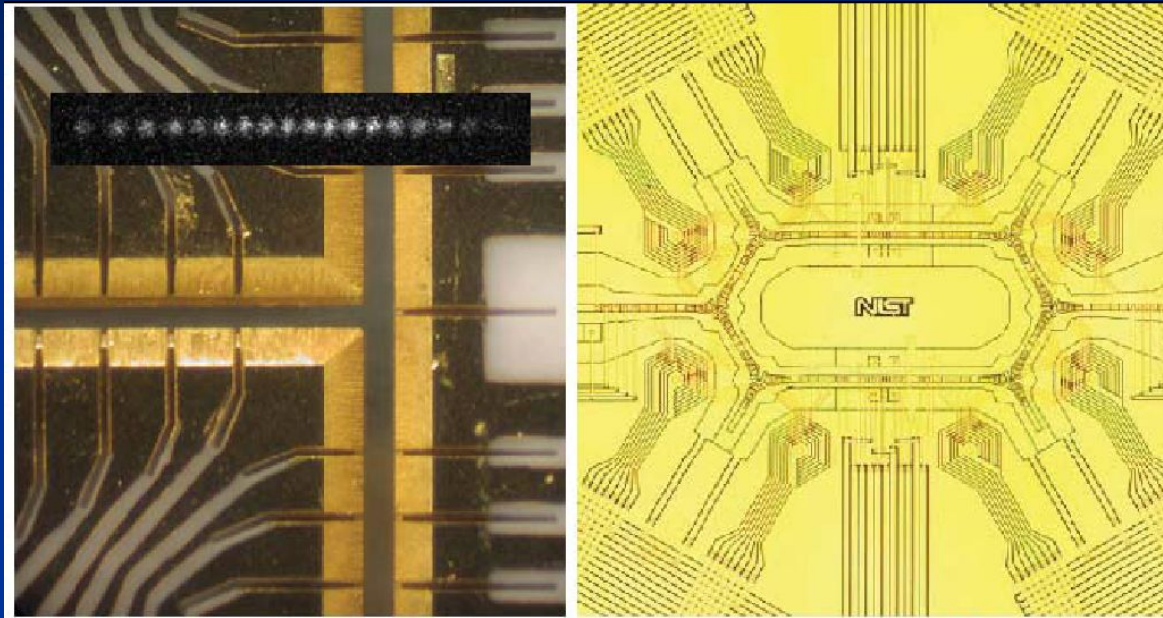
# Физические реализации

- Фотонный квантовый компьютер



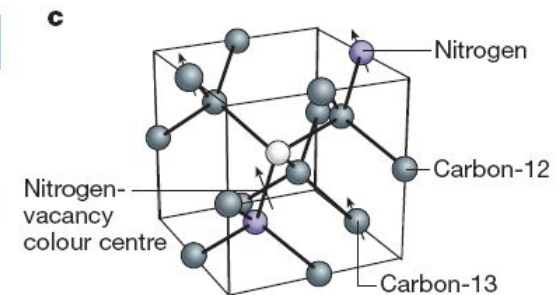
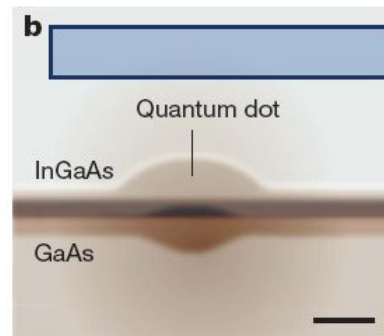
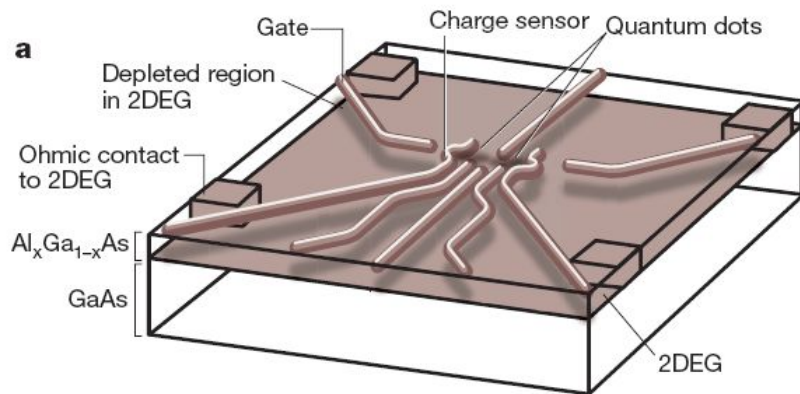
# Физические реализации

## ■ Ионная электромагнитная ловушка



# Физические реализации

## ■ Твердотельные квантовые точки

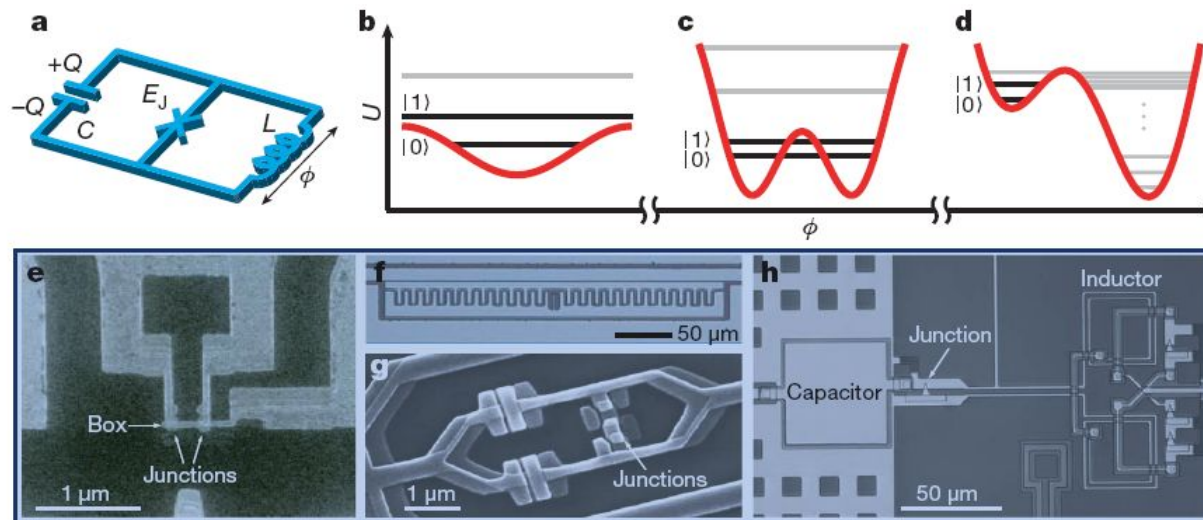


**Figure 4 | Quantum dot and solid-state dopant qubits.** **a**, An electrostatically confined quantum dot; the structure shown is several  $\mu\text{m}$  across. 2DEG, two-dimensional electron gas. **b**, A self-assembled quantum

dot. Scale bar,  $\sim 5$  nm. **c**, The atomic structure of a nitrogen-vacancy centre in the diamond lattice, with lattice constant  $3.6 \text{ \AA}$ . Figure copied from figure 1 of ref. 111 with permission.

# Физические реализации

## ■ Джозефсоновские контакты



**Figure 5 | Superconducting qubits.** **a**, Minimal circuit model of superconducting qubits. The Josephson junction is denoted by the blue 'X'. **b–d**, Potential energy  $U(\Phi)$  (red) and qubit energy levels (black) for charge (**b**), flux (**c**), and phase qubits (**d**), respectively. **e–h**, Micrographs of superconducting qubits. The circuits are made of Al films. The Josephson

junctions consist of  $\text{Al}_2\text{O}_3$  tunnel barriers between two layers of Al. **e**, Charge qubit, or a Cooper pair box. **f**, Transmon, a derivative of charge qubit with large  $E_J/E_C$  (courtesy of R. J. Schoelkopf). The Josephson junction in the middle is not visible at this scale. **g**, Flux qubit (courtesy of J. E. Mooij). **h**, Phase qubit (courtesy of J. M. Martinis).

# Квантовые нейронные сети

## ■ Наиболее известные архитектуры квантовых НС

Model	Neuron	Connections	Transformation	Network	Dynamics
Perus	quantum	Green function	linear	temporal	collapse as convergence to attractor
Chrisley	classical (slit position)	classical (slit position)	nonlinear through superposition	multilayer	non-superpositional
Behrman et al.	time slice, quantum	interactions through phonons	nonlinear through potential energy and exponent function	temporal and spatial	Feynman path integral
Goertzel	classical	quantum	nonlinear	classical	Feynman path-integral
Menneer and Narayanan	classical	classical	nonlinear	single-item networks in many universes	classical
Ventura	qubit	entanglement	-	single-item modules in many universes	unitary and non-unitary transformations



# Квантовая ассоциативная память

- Квантовая ассоциативная сеть Перуша (2000)
  - Базируется на Модели Хопфилда
  - Непрерывное обобщение Гамильтонана Хопфилда
  - Голографический принцип
  - Процедура экзамена через двухточечную функцию Грина
  - Коллапс волновой функции как сходимость к аттрактору

# Квантовая нейросеть

- Квантовая нейросеть (Берман и др, 2002)
  - Предназначена для вычисления степени квантовой запутанности
  - Работает во времени
  - Является сетью прямого распространения
  - Состоит из двухуровневых квантовых объектов и линейных осцилляторов

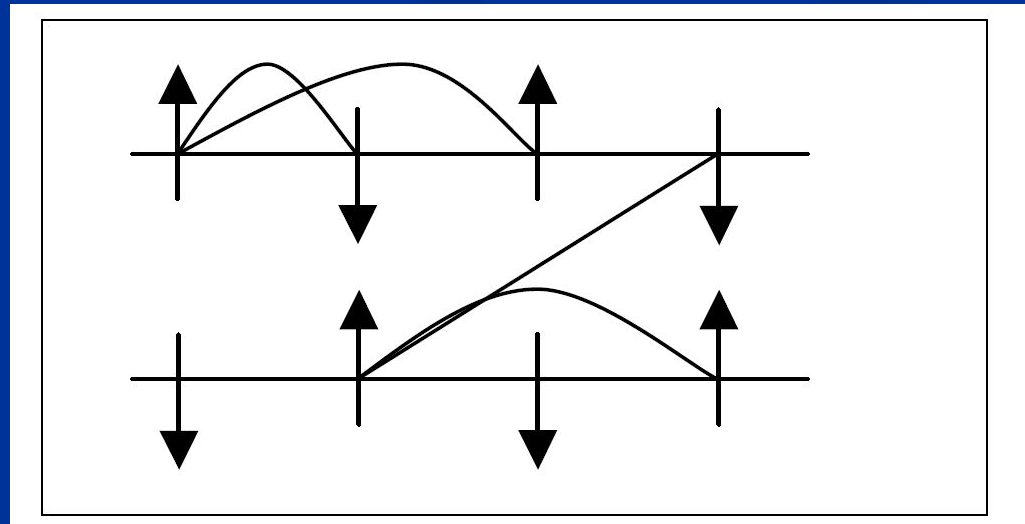
# Квантовая нейросеть

- Квантовая нейросеть (Берман и др, 2002)

- Гамильтониан системы:

$$H = K(\sigma_{xA} + \sigma_{xB}) + \sum_i \lambda_i x_i (\sigma_{zA} + \sigma_{zB}) + \frac{m_i \omega_i^2 x_i^2}{2} + \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} \quad (1)$$

- Схема сети:



# Квантовая ассоциативная память

- Квантовая АП Вентуры (1998, 2000, 2003)
  - Базируется на алгоритме Гровера
  - Запоминается  $m$   $n$ -мерных бинарных векторов
  - Специализированный квантовый алгоритм обучения даёт оператор  $P$
  - Имеет экспоненциальную емкость  $\sim 2^n$

# Квантовая ассоциативная память

## Вентуры (пример)

A very simple example will help clarify. Suppose that we have a set of patterns  $P = \{000, 011, 100, 110\}$ . Then using equation (10) memorizes the pattern set as the quantum state

$$\hat{P}|\bar{0}\rangle = \frac{1}{2}|000\rangle + \frac{1}{2}|011\rangle + \frac{1}{2}|100\rangle + \frac{1}{2}|110\rangle. \quad (12)$$

Now suppose that we want to recall the pattern whose first two bits were 10. Applying equation (11) gives

$$\begin{aligned} & \hat{G}\hat{I}_\tau\left(\frac{1}{2}|000\rangle + \frac{1}{2}|011\rangle + \frac{1}{2}|100\rangle + \frac{1}{2}|110\rangle\right) \\ &= \hat{G}\left(\frac{1}{2}|000\rangle + \frac{1}{2}|011\rangle - \frac{1}{2}|100\rangle + \frac{1}{2}|110\rangle\right) \quad (13) \\ &= |100\rangle, \end{aligned}$$

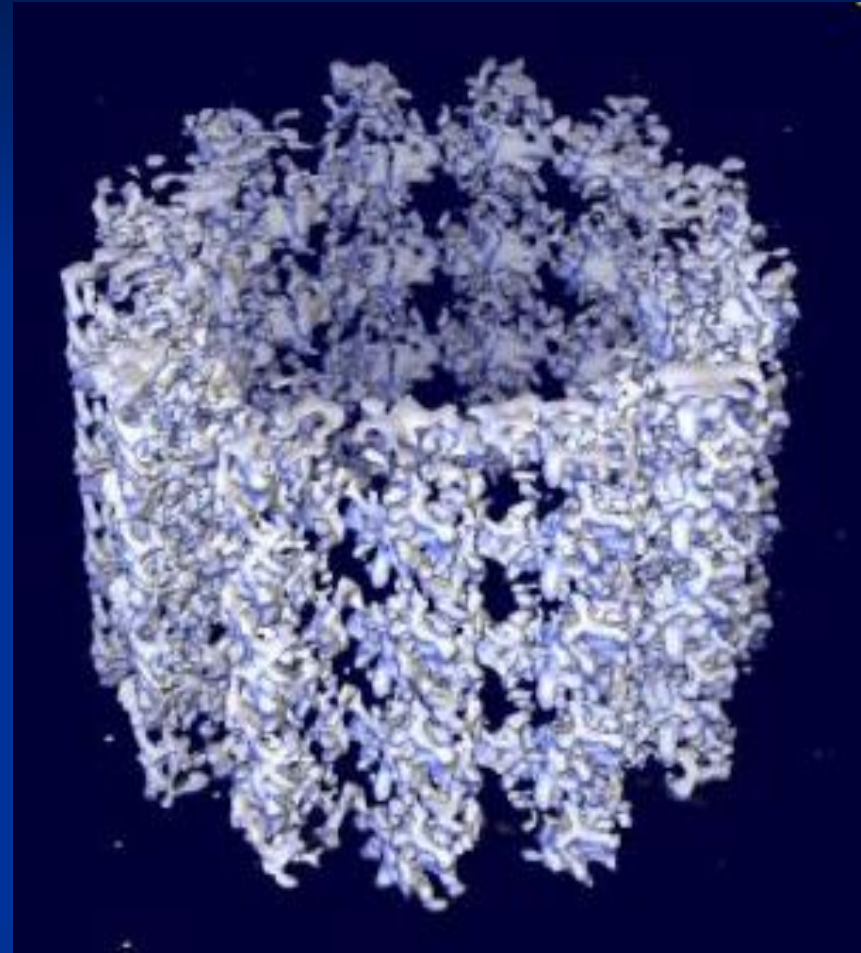
and we have thus achieved our goal. We can now observe the system to see that the completion of the pattern 10 is 100.

# Квантовые явления в биологических нейронах и сетях



# Квантовые явления в биологических нейронах и сетях

- Микротрубочки
  - Состоят из белковых молекул тубулина
  - Внешний диаметр около 25 нм, внутренний — около 15



# Квантовые явления в биологических нейронах и сетях

## ■ Система дендритных микротрубочек

