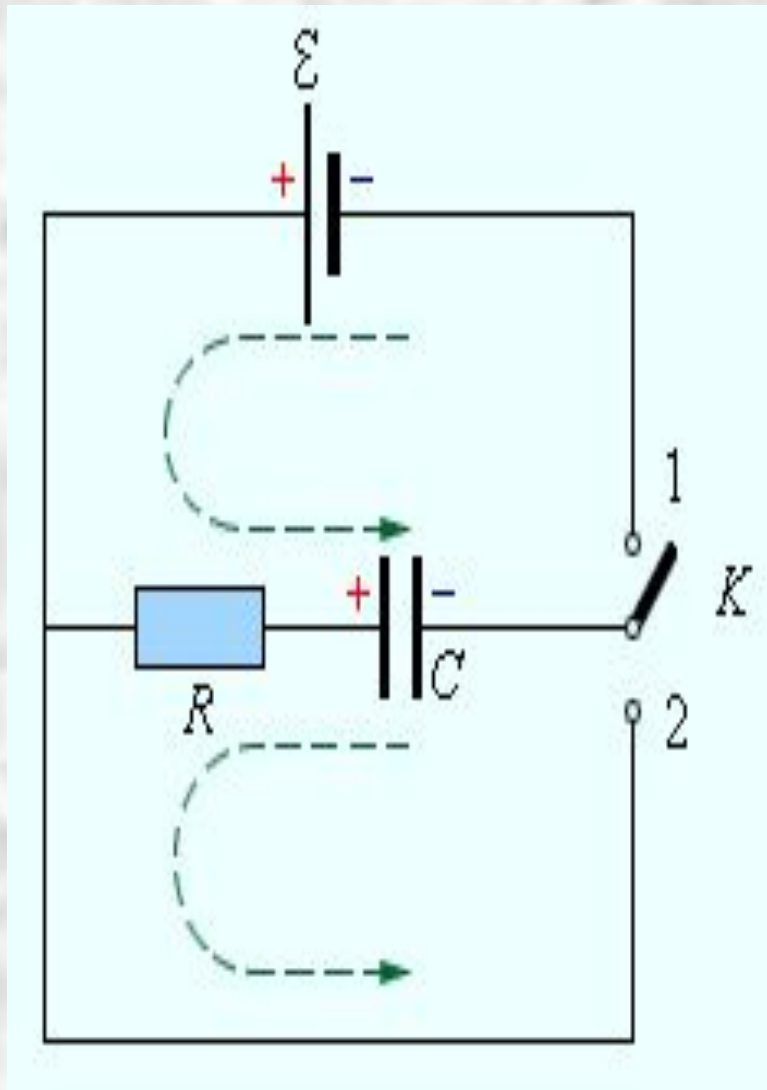


# Лекция 13

# Квазистационарные процессы. RC- и RL-цепи

- Если на каком-то участке цепи происходят изменения силы тока или напряжения, то другие участки цепи могут «почувствовать» эти изменения только через некоторое время, которое по порядку величины равно времени  $t$  распространения электромагнитного возмущения от одной точки цепи к другой. Так как электромагнитные возмущения распространяются с конечной скоростью, равной скорости света  $c$ , то где  $l$  – расстояние между наиболее удаленными точками цепи. Если это время  $t$  много меньше длительности процессов, происходящих в цепи, то можно считать, что в каждый момент времени сила тока одинакова во всех последовательно соединенных участках цепи. Процессы такого рода в электрических цепях называются *квазистационарными*.
- Квазистационарные процессы можно исследовать с помощью законов постоянного тока, если применять эти законы к **мгновенным значениям сил токов и напряжений на участках цепи.**



- Цепи зарядки и разрядки конденсатора через резистор.

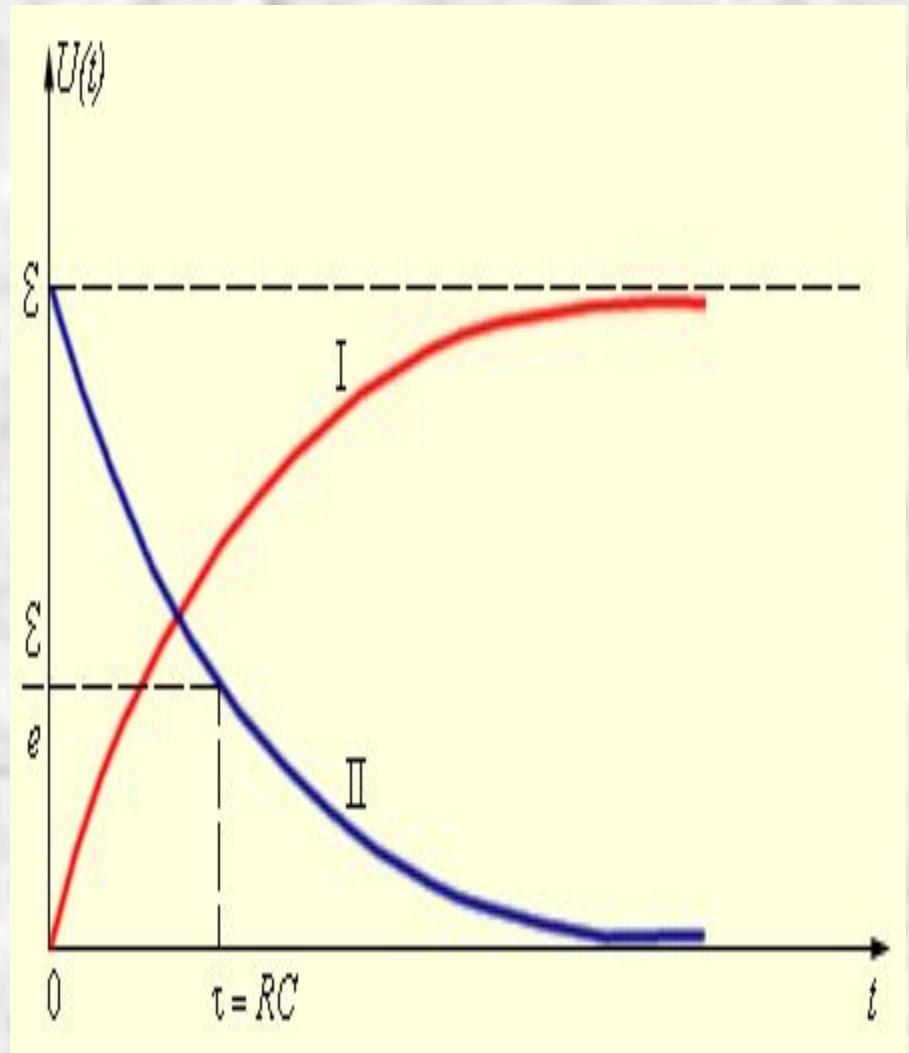
Процесс зарядки конденсатора

$$CR \frac{dU}{dt} + U = \mathcal{E}.$$

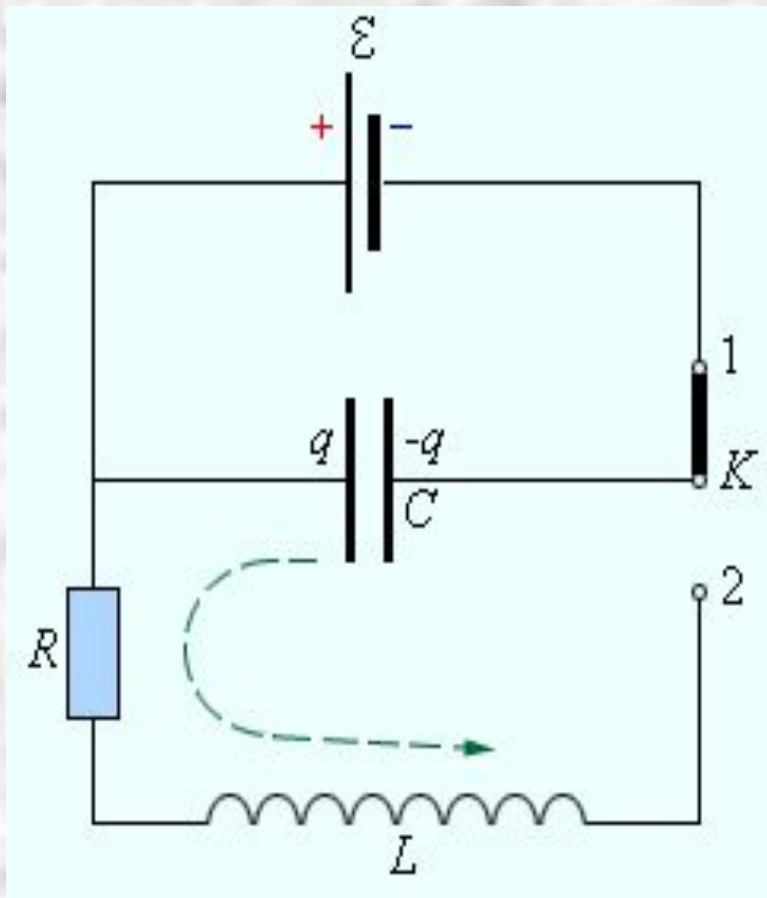
- Зарядка (I) и разрядка (II) конденсатора через резистор.

- Процесс разрядки описывается выражением

$$U(t) = \Sigma_{\text{exp}} (-t / \tau).$$

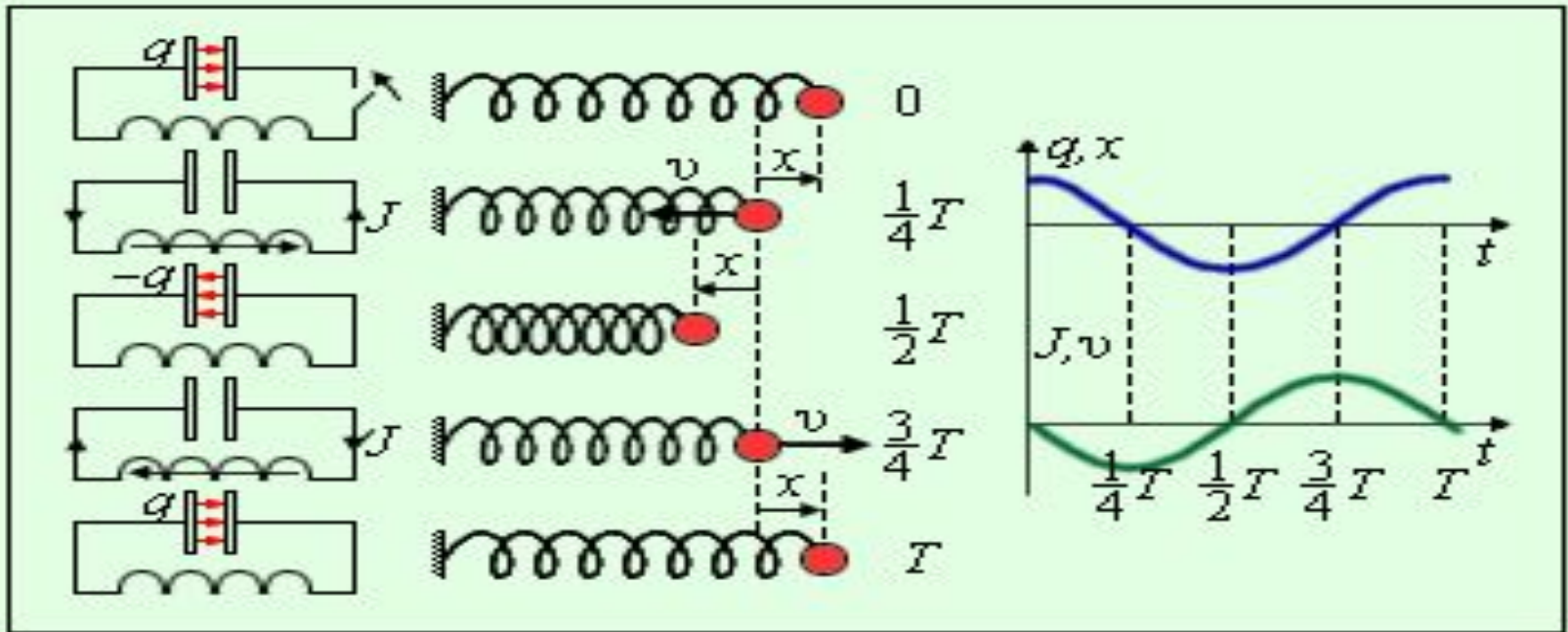


# RLC-контур. Свободные колебания



- В электрических цепях, так же как и в механических системах, таких как груз на пружине или маятник, могут возникать **свободные колебания**. Простейшей электрической системой, способной совершать свободные колебания, является последовательный RLC-контур.





- Аналогия процессов свободных электрических и механических колебаний.

- В отсутствие затухания свободные колебания в электрическом контуре являются **гармоническими**, то есть происходят по закону

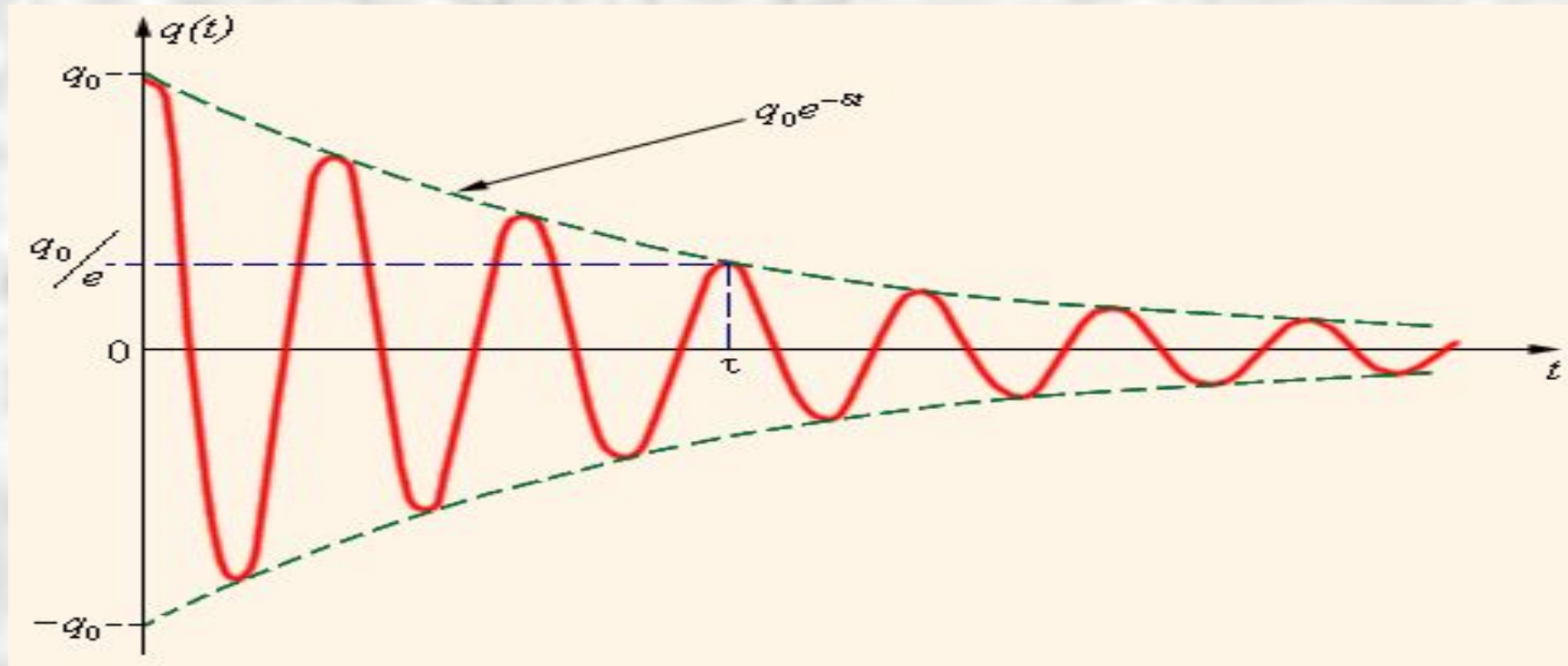
$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

- Параметры  $L$  и  $C$  колебательного контура определяют только собственную частоту свободных колебаний

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

- При свободных колебаниях происходит периодическое превращение электрической энергии  $W_э$ , запасенной в конденсаторе, в магнитную энергию  $W_м$  катушки и наоборот. Если в колебательном контуре нет потерь энергии, то полная электромагнитная энергия системы остается неизменной:

$$W = W_э + W_м = \frac{q^2}{2C} + \frac{LJ^2}{2} = \text{const.}$$



- Затухающие колебания в электрическом контуре аналогичны затухающим колебаниям груза на пружине при наличии вязкого трения, когда сила трения изменяется прямо пропорционально скорости тела:  $F_{\text{тр}} = -\beta v$ . Коэффициент  $\beta$  в этой формуле аналогичен сопротивлению  $R$  в электрическом контуре. Уравнение свободных колебаний в контуре при наличии затухания имеет вид

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$



- Скорость затухания зависит от электрического сопротивления  $R$  контура. Интервал времени в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e \approx 2,7$  раза, называется **временем затухания**.
- Ранее было введено понятие **добротности**  $Q$  колебательной системы:

$$Q = \pi N = \pi \frac{\tau}{T},$$

- где  $N$  – число полных колебаний, совершаемых системой за время затухания  $\tau$ . Добротности  $Q$  любой колебательной системы, способной совершать свободные колебания, может быть дано энергетическое определение:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Запас энергии в колебательной системе}}{\text{Потеря энергии за 1 период}}.$$

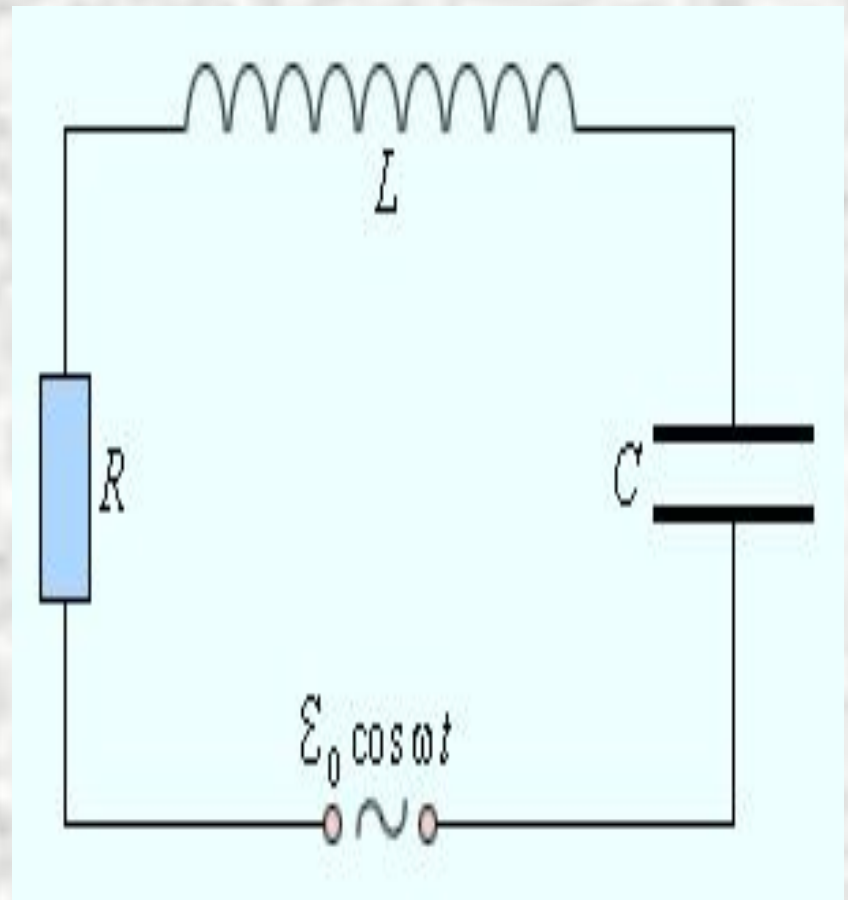
# Вынужденные колебания. Переменный ток

- Процессы, возникающие в электрических цепях под действием внешнего периодического источника тока, называются **вынужденными колебаниями**.
- Вынужденные колебания, в отличие от собственных колебаний в электрических цепях, являются **незатухающими**. Периодический внешний источник обеспечивает приток энергии к системе и не дает колебаниям затухать, несмотря на наличие неизбежных потерь.
- Если частота  $\omega_0$  свободных колебаний определяется параметрами электрической цепи, то **установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на частоте  $\omega$  внешнего источника**.
- Для установления стационарных вынужденных колебаний необходимо некоторое время  $\Delta t$  после включения в цепь внешнего источника. Это время по порядку величины равно времени  $\tau$  затухания свободных колебаний в цепи.
- Электрические цепи, в которых происходят установившиеся вынужденные колебания под действием периодического источника тока, называются **цепями переменного тока**.

Вынужденные колебания в контуре.

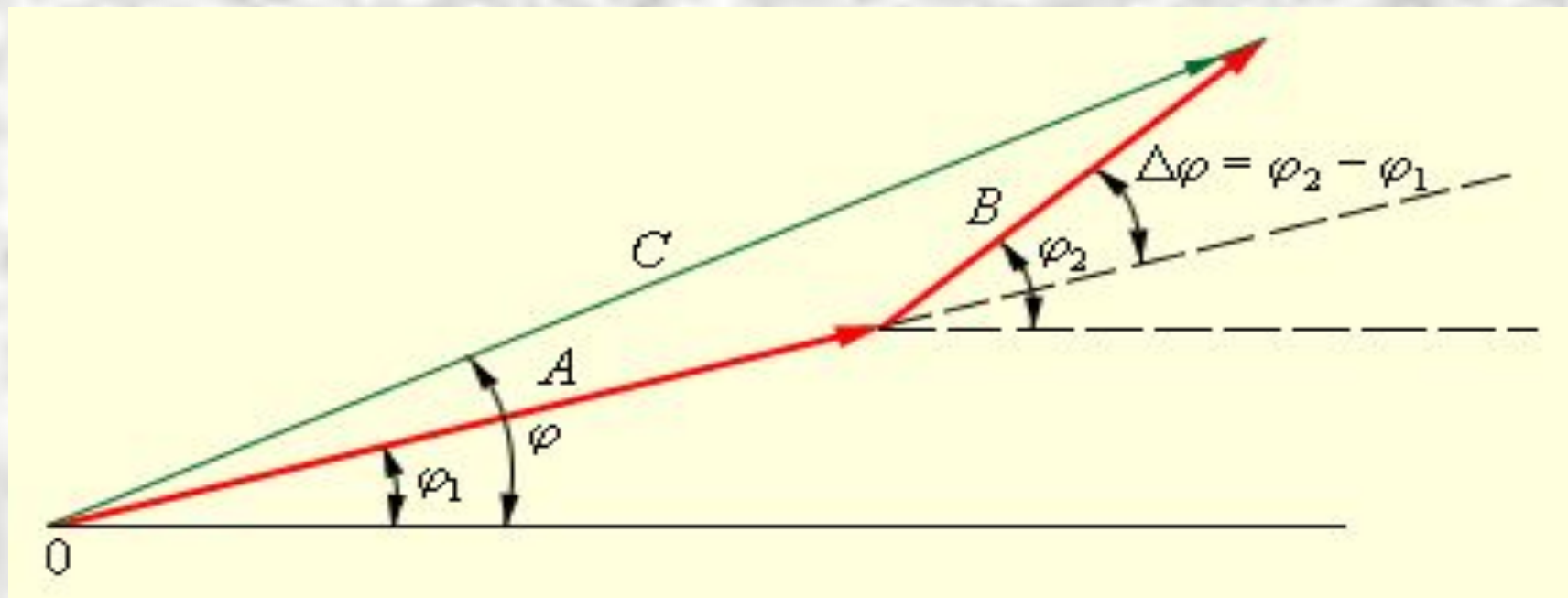
- Предполагается, что для электрической цепи, изображенной на рис., выполнено условие квазистационарности. Поэтому закон Ома можно записать для мгновенных значений токов и напряжений:

$$RI + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = \Sigma_0 \cos \omega t.$$



- Величина  $L \frac{dI}{dt}$  – это перенесенная с изменением знака из правой части уравнения в левую ЭДС самоиндукции катушки. Эту величину принято называть **напряжением на катушке индуктивности**.
- Уравнение вынужденных колебаний можно записать в виде  $u_R + u_C + u_L = e(t) = 0 \cos \omega t$ , где  $u_R(t)$ ,  $u_C(t)$  и  $u_L(t)$  – мгновенные значения напряжений на резисторе, конденсаторе и катушке соответственно. Амплитуды этих напряжений будем обозначать буквами  $U_R$ ,  $U_C$  и  $U_L$ . При установившихся вынужденных колебаниях все напряжения изменяются с частотой  $\omega$  внешнего источника переменного тока. Для наглядного решения уравнения вынужденных колебаний можно использовать **метод векторных диаграмм**.





- Изображение гармонических колебаний  $A \cos(\omega t + \varphi_1)$ ,  $B \cos(\omega t + \varphi_2)$  и их суммы  $C \cos(\omega t + \varphi)$  с помощью векторов на векторной диаграмме.

- Рассмотрим по отдельности случаи подключения внешнего источника переменного тока к резистору с сопротивлением  $R$ , конденсатору емкости  $C$  и катушки индуктивности  $L$ . Во всех трех случаях напряжения на резисторе, конденсаторе и катушке равны напряжению источника переменного тока.
- **1. Резистор в цепи переменного тока**

$$j_R R = u_R = U_R \cos \omega t, \quad j_R = \frac{U_R}{R} \cos \omega t = I_R \cos \omega t.$$

Здесь через  $I_R$  обозначена амплитуда тока, протекающего через резистор. Связь между амплитудами тока и напряжения на резисторе выражается соотношением  $R I_R = U_R$ .

Фазовый сдвиг между током и напряжением на резисторе равен нулю.

## 2. Конденсатор в цепи переменного тока

$$u_C = \frac{q}{C} = U_C \cos \omega t;$$

Соотношение между амплитудами тока  $I_C$  и напряжения  $U_C$ :

$$\frac{1}{\omega C} I_C = U_C.$$

Ток опережает по фазе напряжение на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

## 3. Катушка в цепи переменного тока

$$u_L = L \frac{dI_L}{dt} = U_L \cos \omega t;$$

Соотношение между амплитудами тока  $I_L$  и напряжения  $U_L$ :

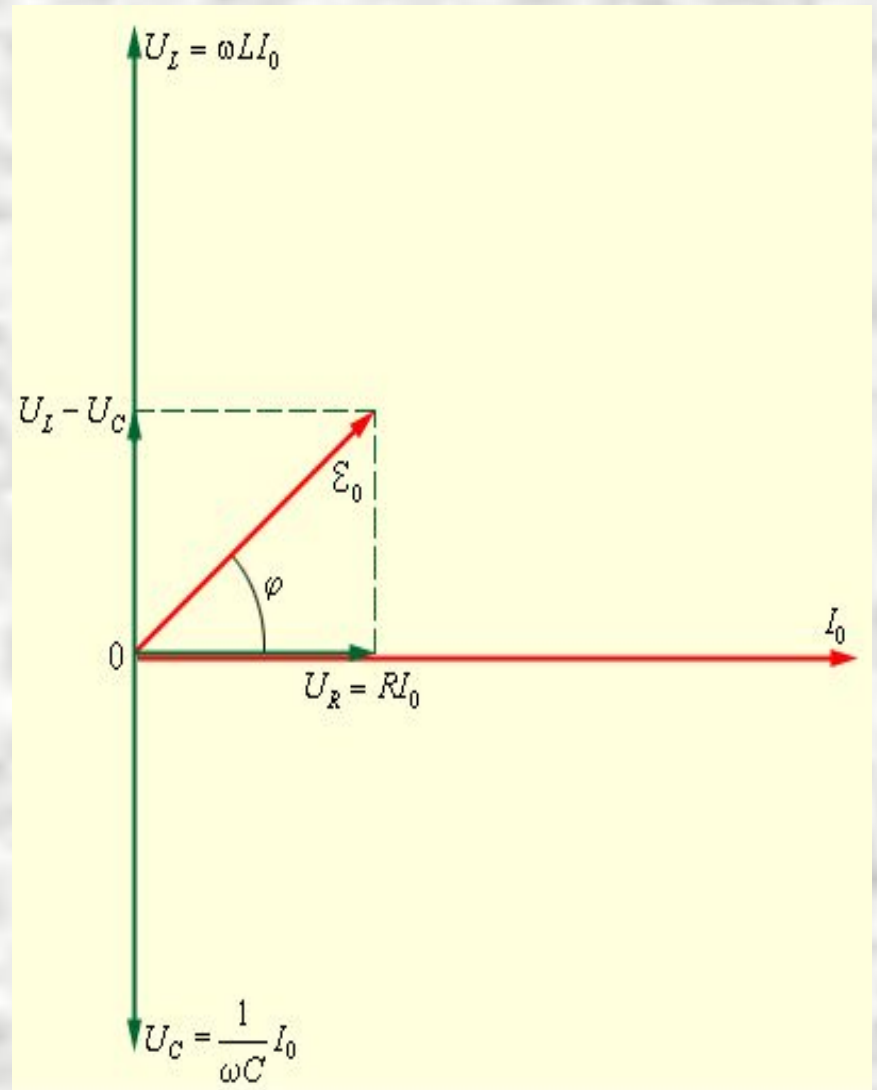
$$\omega L I_L = U_L.$$

Ток отстает по фазе от напряжения на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

- Векторная диаграмма на рис. построена для случая, когда  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$  или  $\omega^2 > \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

В этом случае напряжение внешнего источника опережает по фазе ток, текущий в цепи, на некоторый угол  $\varphi$ .

$$I_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$



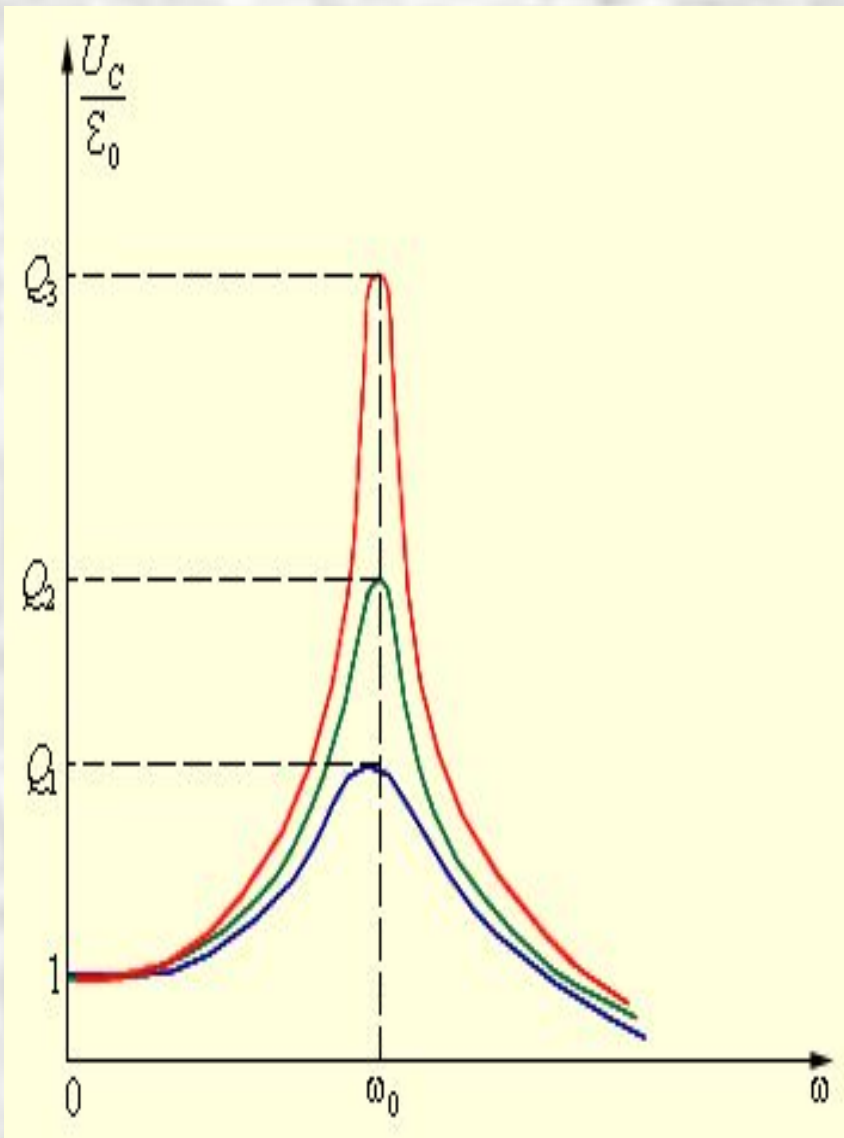


- Явление возрастания амплитуды колебаний тока при совпадении частоты  $\omega$  внешнего источника с собственной частотой  $\omega_0$  электрической цепи называется **электрическим резонансом**. При резонансе

$$(I_0)_{\text{рез}} = \frac{\xi_0}{R}$$

- Сдвиг фаз  $\varphi$  между приложенным напряжением и током в цепи при резонансе обращается в нуль. Резонанс в последовательной RLC-цепи называется **резонансом напряжений**. Аналогичным образом с помощью векторной диаграммы можно исследовать явление резонанса при параллельном соединении элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  (так называемый **резонанс токов**).

- Добротность RLC-контура: 
$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$



- Резонансные кривые для контуров с различными значениями добротности  $Q$ .
- Рис. иллюстрирует явление резонанса в последовательном электрическом контуре. На рисунке графически изображена зависимость отношения амплитуды  $U_C$  напряжения на конденсаторе к амплитуде  $U$  напряжения источника от его частоты  $\omega$  для различных значений добротности  $Q$ . Кривые на рис. называются **резонансными кривыми**.

# Закон Ома для цепи переменного тока. Мощность.

$$RI_R = U_R; \quad \frac{1}{\omega C} I_C = U_C; \quad \omega LI_L = U_L.$$

**закон Ома для участка цепи переменного тока**, содержащего один из элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Физические величины  $R$ , и  $\omega L$  называются **активным сопротивлением резистора**, **емкостным сопротивлением конденсатора** и **индуктивным сопротивлением катушки**.

- Средняя мощность переменного тока на участке цепи, содержащем резистор, равна

$$P_R = I_{\text{д}} U_{\text{д}}$$

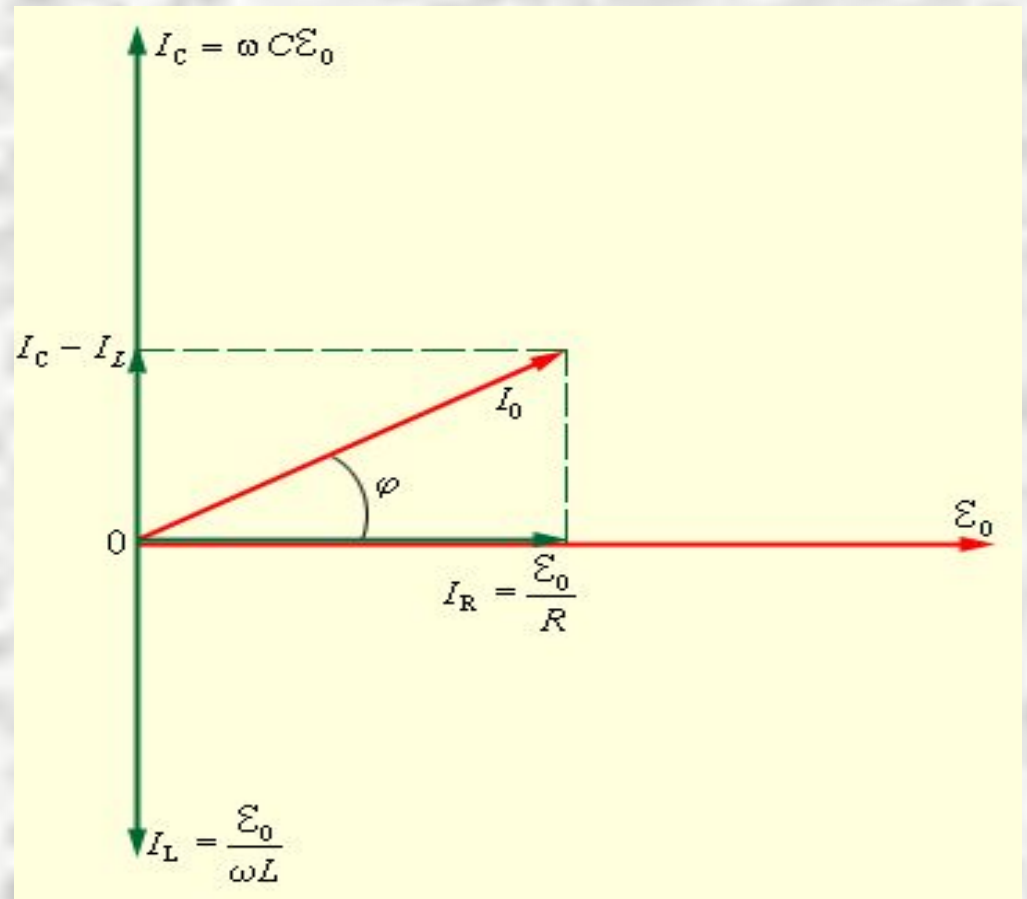
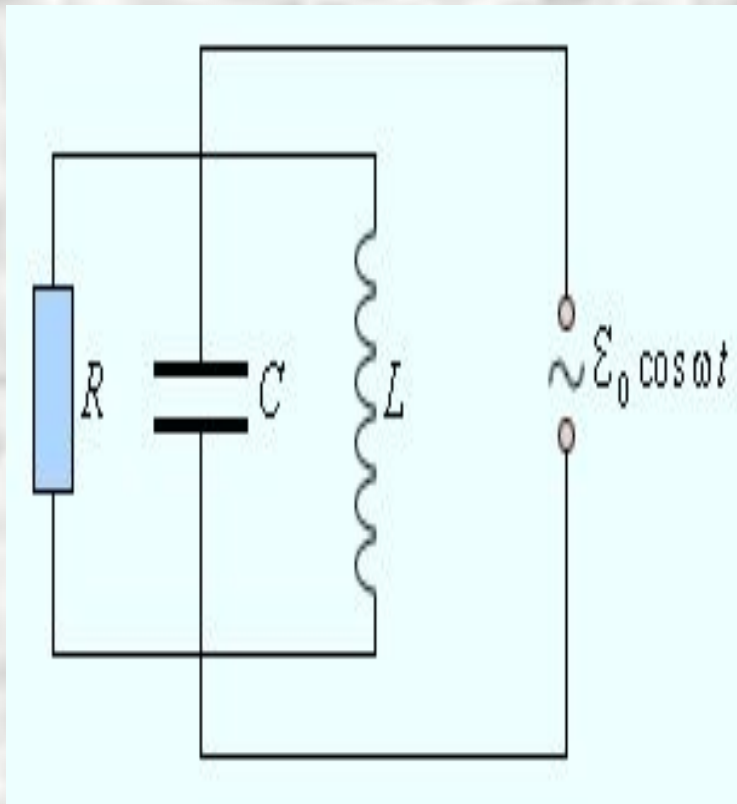
- Мощность в цепи переменного тока выделяется только на активном сопротивлении. Средняя мощность переменного тока на конденсаторе и катушке индуктивности равна нулю.

- Рассмотрим теперь электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных резистора, конденсатора и катушки. Цепь подключена к источнику переменного тока частоты  $\omega$ . На всех последовательно соединенных участках цепи протекает один и тот же ток. Между напряжением внешнего источника  $e(t)$  и током  $J(t)$  возникает фазовый сдвиг на некоторый угол  $\varphi$ . Поэтому можно записать  $J(t) = I_0 \cos \omega t$ ;  $e(t) = \Sigma_0 \cos(\omega t + \varphi)$ .
- Средняя мощность, развиваемая источником переменного тока, равна

$$P = \overline{I_0 \Sigma_0 \cos \omega t \cos (\omega t + \varphi)} = \frac{I_0 \Sigma_0}{2} \cos \varphi = I_{\text{д}} \Sigma_{\text{д}} \cos \varphi.$$



- Величину  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$  называют **полным сопротивлением** цепи переменного тока. Формулу, выражающую связь между амплитудными значениями тока и напряжения в цепи, можно записать в виде  $ZI_0 = \Sigma_0$ . Это соотношение называют **законом Ома для цепи переменного тока**.

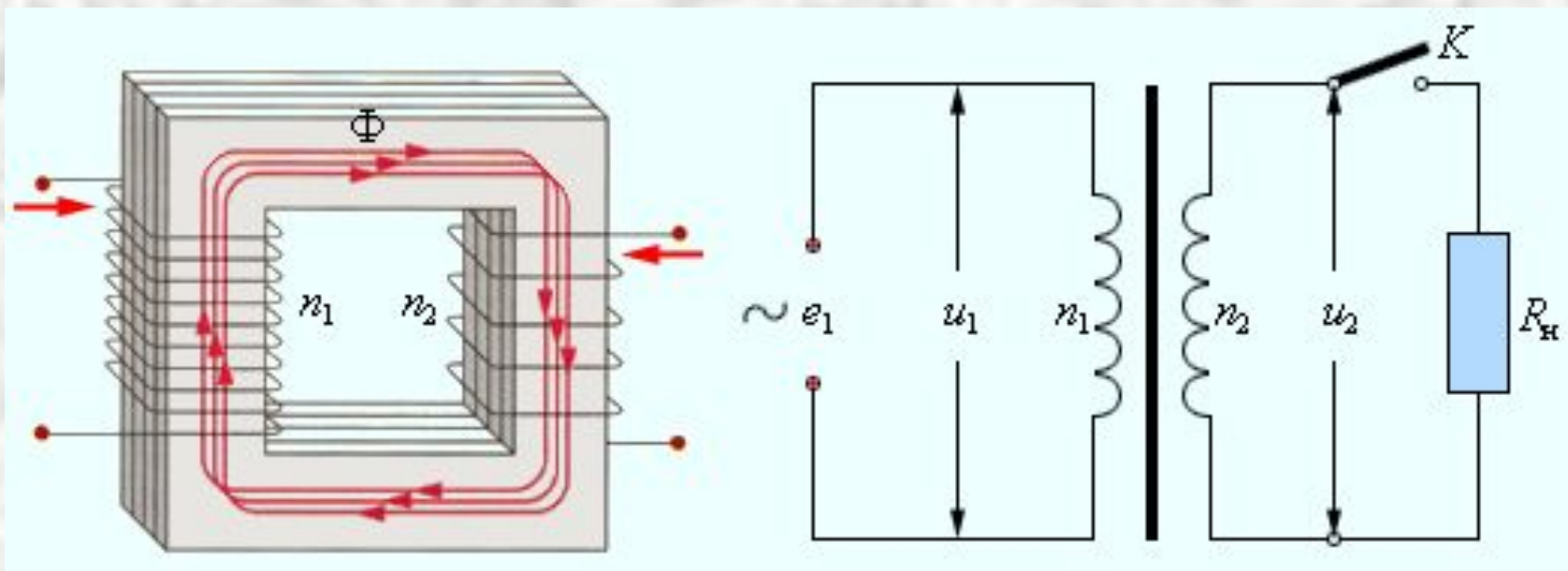


- Параллельный RLC-контур.
- Векторная диаграмма для параллельного RLC-контура. Из диаграммы следует:

$$I_0 = \varepsilon_0 \sqrt{(1/R)^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{(1/R)^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

# Трансформаторы. Передача электрической энергии



- Среди приборов переменного тока, нашедших широкое применение в технике, значительное место занимают **трансформаторы**. Принцип действия трансформаторов, применяемых для повышения или понижения напряжения переменного тока, основан на явлении электромагнитной индукции. Простейший трансформатор состоит из сердечника замкнутой формы из магнитомягкого материала, на который намотаны две обмотки: первичная и вторичная.

- Так как магнитные потоки, пронизывающие обмотки, пропорциональны числу  $n_1$  и  $n_2$  витков в них, можно записать для первичной обмотки:

$$e_1 + e_1^{\text{Инд}} = 0, \quad u_1 = e_1 = -e_1^{\text{Инд}} = n_1 \frac{d\Phi}{dt};$$

- для вторичной обмотки:

$$u_2 = J_2 R_H = e_2^{\text{Инд}}, \quad u_2 = -n_2 \frac{d\Phi}{dt}.$$

$$u_2 = -\frac{n_2}{n_1} u_1.$$



- Для амплитудных значений напряжений на обмотках можно записать:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1} = K.$$

- Коэффициент  $K = n_2 / n_1$  есть коэффициент трансформации. При  $K > 0$  трансформатор называется **повышающим**, при  $K < 0$  – **понижающим**.

# Электромагнитные волны

- Всякое изменение магнитного поля порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, силовые линии которого замкнуты.
- Максвелл высказал гипотезу о существовании и обратного процесса:  
**Изменяющееся во времени электрическое поле порождает в окружающем пространстве магнитное поле.**
- Из теории Максвелла вытекает ряд важных выводов:
  1. Существуют электромагнитные волны, то есть распространяющееся в пространстве и во времени электромагнитное поле. Электромагнитные волны поперечны – векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  перпендикулярны друг другу и лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.
  2. Электромагнитные волны распространяются в веществе с **конечной скоростью**

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}$$

- Здесь  $\epsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости вещества,  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные:  $\epsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $\mu_0 = 1,25664 \cdot 10^{-6}$  Гн/м.

- Скорость электромагнитных волн в вакууме ( $\epsilon = \mu = 1$ ):

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

- 3. В электромагнитной волне происходят взаимные превращения электрического и магнитного полей. Эти процессы идут одновременно, и электрическое и магнитное поля выступают как равноправные «партнеры». Поэтому объемные плотности электрической и магнитной энергии равны друг другу:

$$W_{\text{э}} = W_{\text{м}}.$$

$$\frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2 \mu \mu_0}.$$

- 4. Электромагнитные волны переносят энергию. При распространении волн возникает поток электромагнитной энергии. Если выделить площадку  $S$ , ориентированную перпендикулярно направлению распространения волны, то за малое время  $\Delta t$  через площадку протечет энергия  $\Delta W_{\text{эм}}$ , равная

$$\Delta W_{\text{эм}} = (w_{\text{э}} + w_{\text{м}})uS\Delta t.$$

**Плотностью потока** или **интенсивностью**  $I$  называют электромагнитную энергию, переносимую волной за единицу времени через поверхность единичной площади:

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \cdot E^2 = \frac{EB}{\mu\mu_0}.$$



5. Существование давления электромагнитных волн позволяет сделать вывод о том, что электромагнитному полю присущ **механический импульс**. Импульс электромагнитного поля в единичном объеме выражается соотношением

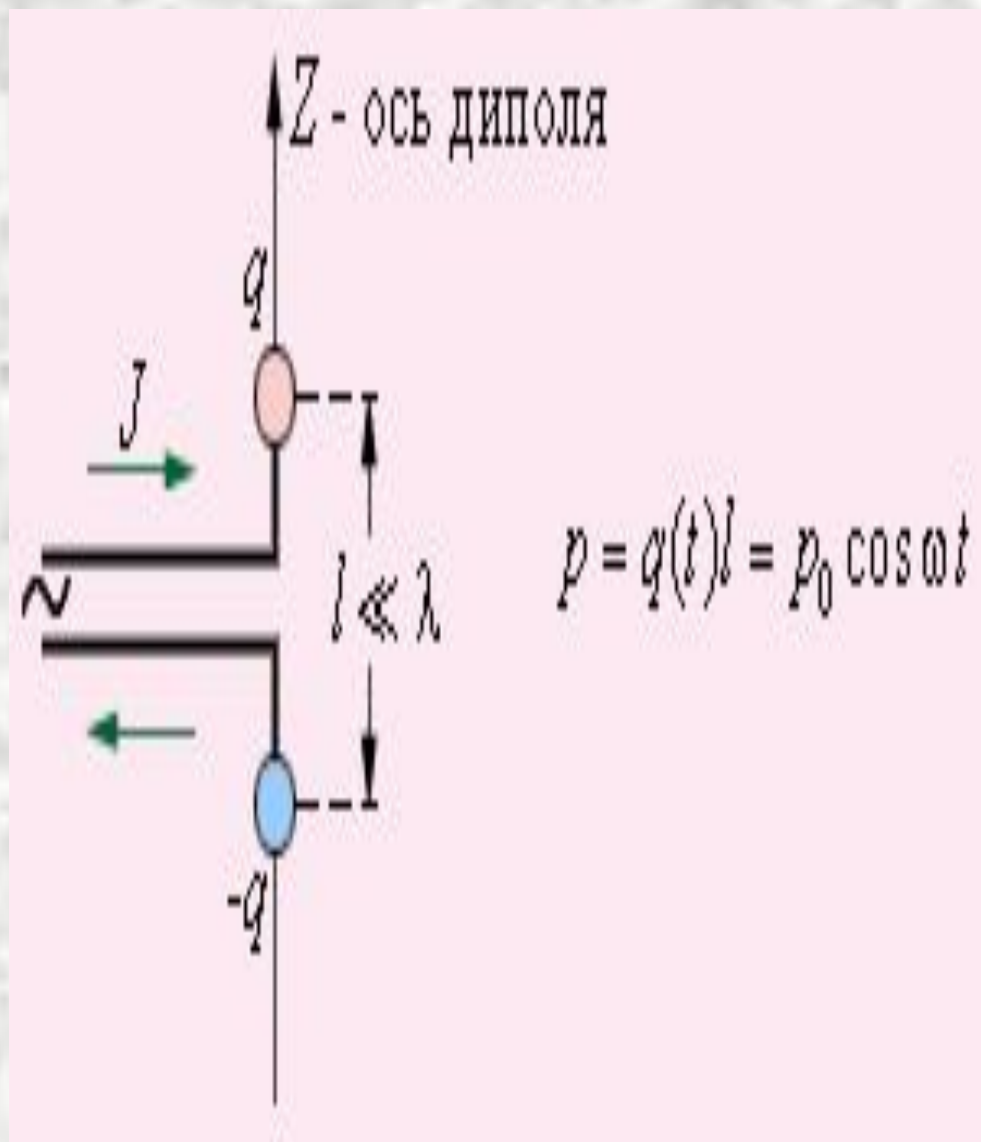
$$g = \frac{w_{\text{эм}}}{c},$$

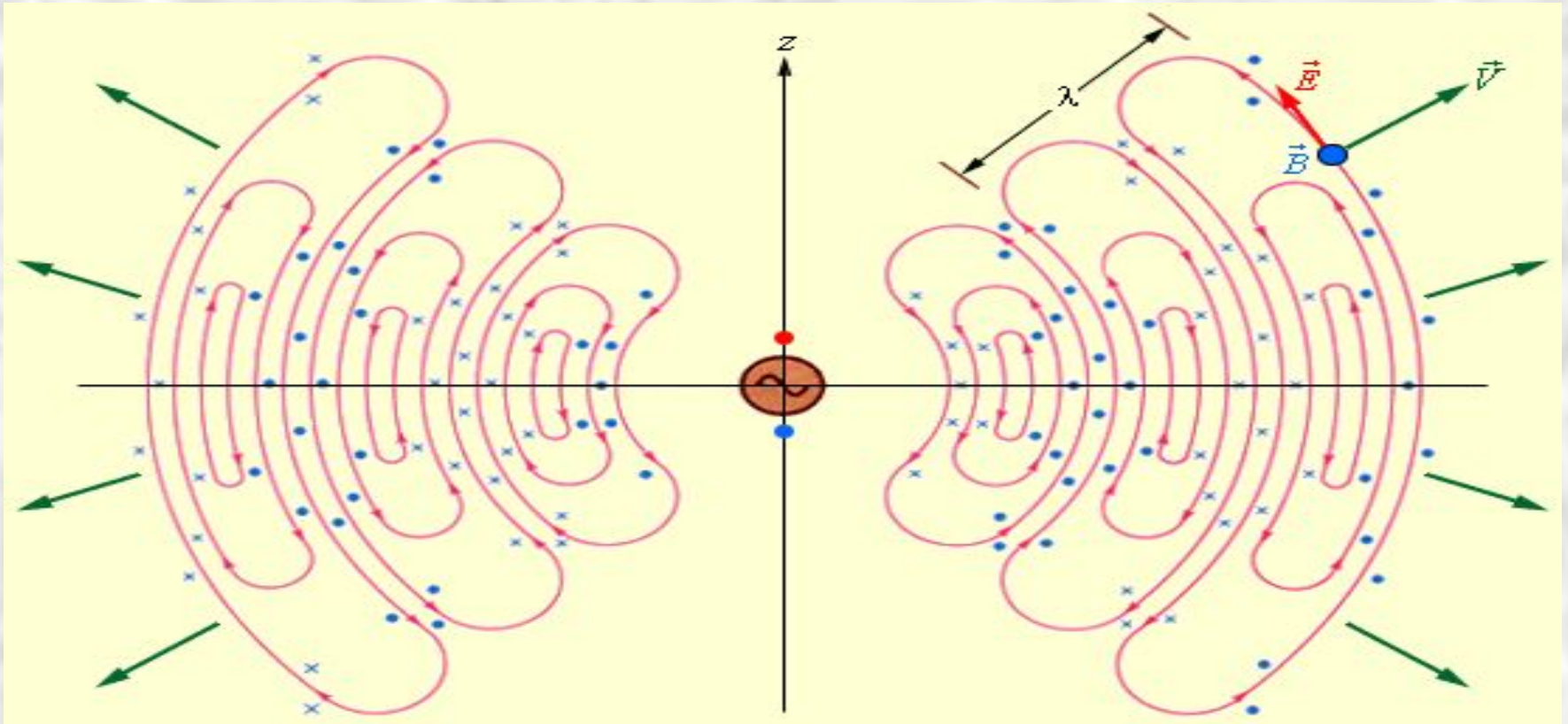
где  $w_{\text{эм}}$  – объемная плотность электромагнитной энергии,  $c$  – скорость распространения волн в вакууме.

$$w_{\text{эм}} = \rho_{\text{эм}} c^2.$$

Это соотношение между массой и энергией электромагнитного поля является универсальным законом природы.

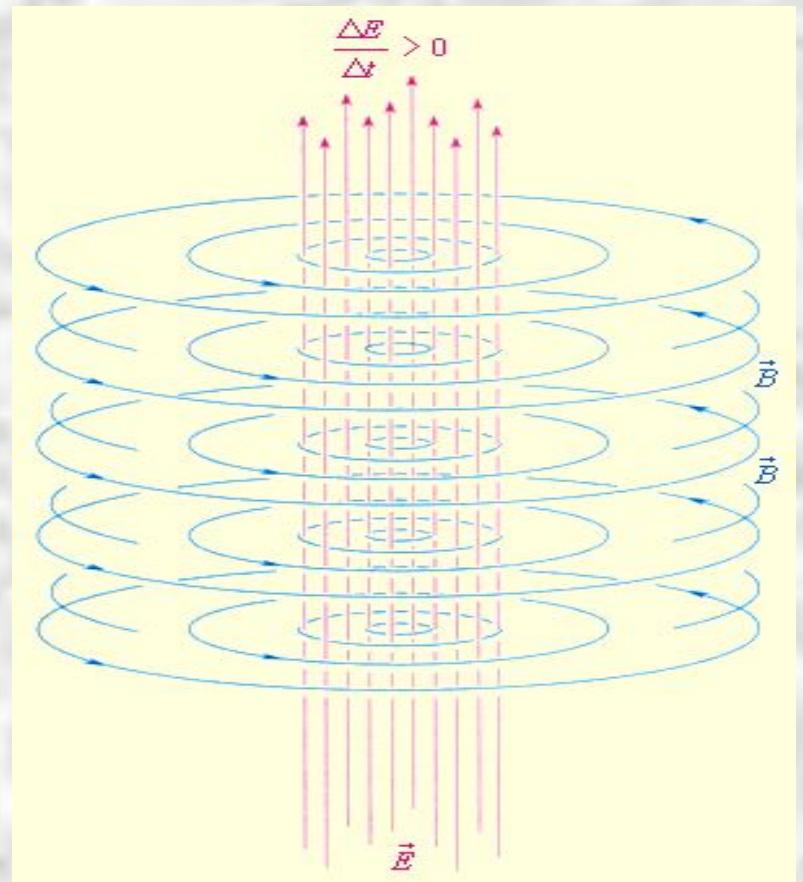
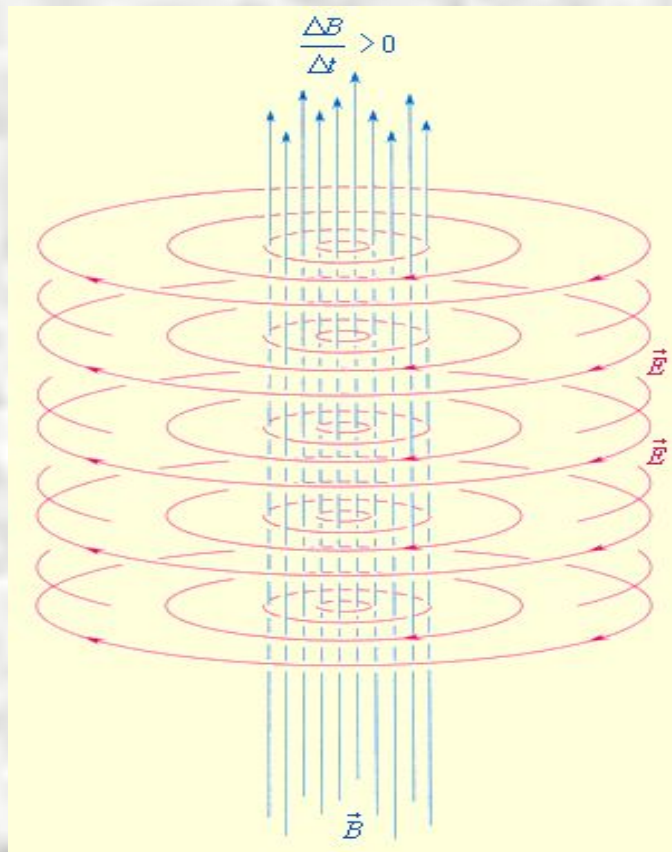
- 7. Электромагнитные волны могут возбуждаться только **ускоренно движущимися зарядами**. Цепи постоянного тока, в которых носители заряда движутся с неизменной скоростью, не являются источником электромагнитных волн. Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является небольшая по размерам электрический диполь, дипольный момент  $p(t)$  которого быстро изменяется во времени. Такой элементарный диполь называют **диполем Герца**. В радиотехнике диполь Герца эквивалентен небольшой антенне, размер которой много меньше длины волны  $\lambda$ .





- Излучение элементарного диполя.
- Следует обратить внимание на то, что максимальный поток электромагнитной энергии излучается в плоскости, перпендикулярной оси диполя. Вдоль своей оси диполь не излучает энергии. Герц использовал элементарный диполь в качестве излучающей и приемной антенн при экспериментальном доказательстве существования электромагнитных волн.





1. Закон электромагнитной индукции в трактовке Максвелла.
2. Гипотеза Максвелла. Изменяющееся электрическое поле порождает магнитное поле.