Лучевое приближение в теории волн

Если скорость и направление распространения волны в среде зависят от координат, то среда называется неоднородной и пространственное поле монохроматической волны описывается решениями уравнения Гельмгольца:

$$\Delta\varphi + k^2(\mathbf{R})\varphi = 0 \qquad \mathbf{R} = (x, y, z) \, . \qquad (2.48.1)$$

Будем искать его решение в виде

$$\varphi(\mathbf{R}) = A(\mathbf{R})\exp(ik_0\psi(\mathbf{R})), \qquad (2.48.2)$$

где $A(\mathbf{R}), \psi(\mathbf{R})$ - действительные амплитуда и фаза волны. Лучевое или геометрооптическое приближение предполагает, что в каждой точке траектории луча волна может считаться плоской, другими словами, амплитуда на расстояниях порядка длины волны может считаться постоянной

$$|\mathrm{grad}\, A| \langle\langle k_0 A \, ,$$

а фаза является линейной функцией координат:

$$\psi(\mathbf{R}) = \mathbf{mR} = m_x x + m_y y + m_z z; \qquad \mathrm{grad}\,\psi = \mathrm{const}.$$

Математически эти условия могут быть записаны следующим образом:

$$|\mathrm{grad}\, k| \langle\langle k; \qquad |\mathrm{grad}\,\psi| \langle\langle k_0\psi \, . \qquad (2.48.3)$$

$$\Delta\varphi + k^2(\boldsymbol{R})\varphi = 0 \qquad \boldsymbol{R} = (x, y, z)\ . \qquad (2.48.1)$$

Будем искать решение уравнения (2.48.1) в виде ряда по степеням $1/k_0$:

$$\varphi(\boldsymbol{R}) = \left[A_0(\boldsymbol{R}) + \frac{1}{k_0}A_1(\boldsymbol{R}) + \frac{1}{k_0^2}A_2(\boldsymbol{R}) + \ldots\right]\exp[ik_0\psi(\boldsymbol{R})]. \qquad (2.48.4)$$

Подставляя (2.48.4) в (2.48.1) и приравнивая к нулю коэффициенты при различных степенях $\frac{1}{k_0}$, получим систему уравнений:

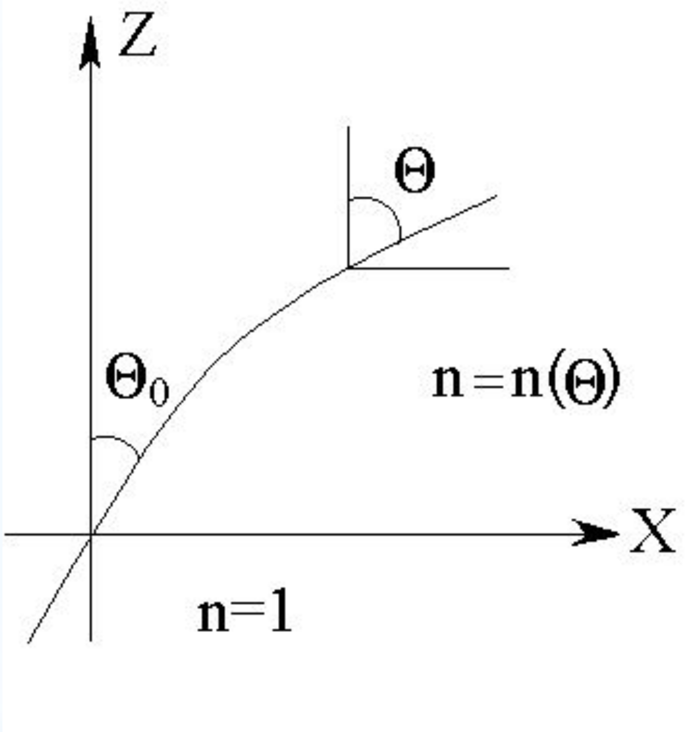
$$\left[\frac{k^2(R)}{k_0^2} - (\nabla\psi)^2\right]A_0 = 0;$$

$$A_0\Delta\psi + 2\nabla A_0\nabla\psi = 0; \qquad (2.48.5)$$

$$A_0\Delta\psi + 2\nabla A_1\nabla\psi = \boldsymbol{i}\Delta A_0.$$

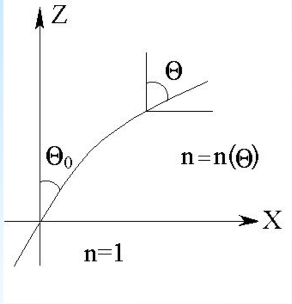
Первое и второе уравнение (2.48.5) в лучевом приближении определяют соответственно фазу и амплитуду волны, и называются уравнением эйконала и уравнением переноса.

$$\Delta\varphi + k^2(\boldsymbol{R})\varphi = 0 \qquad \boldsymbol{R} = (x, y, z)\ . \qquad (2.48.1)$$



Рассмотрим распространение волн в слоисто-неоднородной среде. Пусть волна распространяется в плоскости x, z, и ее скорость неоднородна по одной координате - в уравнении (2.48.1) $k = k(z)$. В этом случае уравнение эйконала (2.48.5) принимает вид

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{k^2(z)}{k_0^2}\ . \qquad (2.48.6)$$



$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{k^2(z)}{k_0^2}. \qquad (2.48.6)$$

Пусть неоднородная среда занимает полупространство $z > 0$ ($n = 1$ при $z < 0$) и в нее попадает волна под углом θ_0 при $z = 0$(рис.2.2).

Поскольку среда однородна в направлении x, то вдоль всего луча выполняется соотношение

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = P_x = \text{const} = n\sin\theta = \sin\theta_0,$$

а уравнение (2.48.6) может быть переписано в виде

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = n^2(z) - \sin^2\theta_0 = n^2(z)\cos^2\theta(z). \qquad (2.48.7)$$

Таким образом, для плоско - слоистой среды уравнение эйконала выражает закон преломления Снелля (2.46.3). Запишем его окончательное решение для фазы волны в виде

$$\psi = x\sin\theta_0 \pm \int_0^z \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0}\,dz. \qquad (2.48.8)$$

$$\left[\frac{k^2(R)}{k_0^2} - (\nabla\psi)^2\right] A_0 = 0;$$

$$A_0 \Delta\psi + 2\nabla A_0 \nabla\psi = 0; \qquad (2.48.5)$$

$$A_0 \Delta\psi + 2\nabla A_1 \nabla\psi = i\Delta A_0.$$

Подставив это решение во второе уравнение системы (2.48.5), получим решение уравнения переноса для амплитуды волны вдоль луча:

$$A = \left[A_0 / \sqrt{n\cos\theta}\right] = A_0\left(n^2 - \sin^2\theta_0\right)^{-1/4}. \qquad (2.48.9)$$

Знак перед корнем в (2.48.8) определяется направлением распространения волны вдоль луча (в положительном или отрицательном направлении оси z). Окончательно, с учетом (2.48.8–2.48.9) поле в слоистой среде в лучевом приближении может быть записано в виде

$$\varphi(x,z) = \left[\exp(ik_0 x\sin\theta_0)\right] f(z),$$

где $f(z)$ является приближенным решением уравнения $f'' + k^2(z) f = 0$.

$$f(z) = \frac{A_0}{\left(n^2 - \sin^2\theta_0\right)^{1/4}} \exp\left[\pm ik_0 \int_0^z \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0}\, dz\right]. \qquad (2.48.10)$$

Решение (2.48.10) известно также как приближенное решение Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна (ВКБ-приближение), которое в большинстве практических приложений достаточно хорошо описывает волновое поле в слоисто-неоднородной среде.