

Лучевое приближение в теории волн

Если скорость и направление распространения волны в среде зависят от координат, то среда называется неоднородной и пространственное поле монохроматической волны описывается решениями уравнения Гельмгольца:

$$\Delta\varphi + k^2(\mathbf{R})\varphi = 0 \quad \mathbf{R} = (x, y, z). \quad (2.48.1)$$

Будем искать его решение в виде

$$\varphi(\mathbf{R}) = A(\mathbf{R}) \exp(ik_0\psi(\mathbf{R})), \quad (2.48.2)$$

где $A(\mathbf{R}), \psi(\mathbf{R})$ - действительные амплитуда и фаза волны. Лучевое или геометрическое приближение предполагает, что в каждой точке траектории луча волна может считаться плоской, другими словами, амплитуда на расстояниях порядка длины волны может считаться постоянной

$$|\text{grad}A| \ll k_0 A,$$

а фаза является линейной функцией координат:

$$\psi(\mathbf{R}) = \mathbf{mR} = m_x x + m_y y + m_z z, \quad \text{grad}\psi = \text{const.}$$

Математически эти условия могут быть записаны следующим образом:

$$|\text{grad}k| \ll k; \quad |\text{grad}\psi| \ll k_0\psi. \quad (2.48.3)$$

$$\Delta\varphi + k^2(\mathbf{R})\varphi = 0 \quad \mathbf{R} = (x, y, z) . \quad (2.48.1)$$

Будем искать решение уравнения (2.48.1) в виде ряда по степеням $\frac{1}{k_0}$:

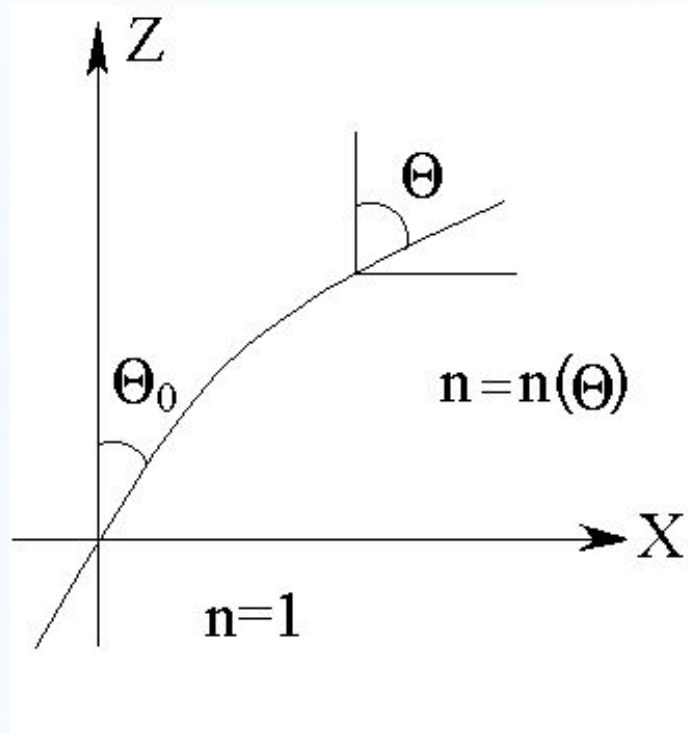
$$\varphi(\mathbf{R}) = \left[A_0(\mathbf{R}) + \frac{1}{k_0} A_1(\mathbf{R}) + \frac{1}{k_0^2} A_2(\mathbf{R}) + \dots \right] \exp[ik_0\psi(\mathbf{R})]. \quad (2.48.4)$$

Подставляя (2.48.4) в (2.48.1) и приравнявая к нулю коэффициенты при различных степенях $\frac{1}{k_0}$, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left[\frac{k^2(R)}{k_0^2} - (\nabla\psi)^2 \right] A_0 &= 0; \\ A_0\Delta\psi + 2\nabla A_0\nabla\psi &= 0; \\ A_0\Delta\psi + 2\nabla A_1\nabla\psi &= i\Delta A_0. \end{aligned} \quad (2.48.5)$$

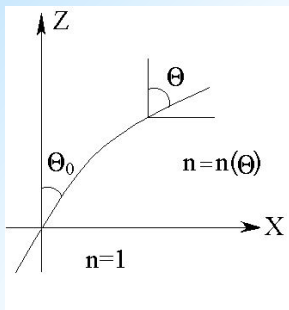
Первое и второе уравнение (2.48.5) в лучевом приближении определяют соответственно фазу и амплитуду волны, и называются уравнением эйконала и уравнением переноса.

$$\Delta\varphi + k^2(\mathbf{R})\varphi = 0 \quad \mathbf{R} = (x, y, z) . \quad (2.48.1)$$



Рассмотрим распространение волн в слоисто-неоднородной среде. Пусть волна распространяется в плоскости x, z , и ее скорость неоднородна по одной координате - в уравнении (2.48.1) $k = k(z)$. В этом случае уравнение эйконала (2.48.5) принимает вид

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{k^2(z)}{k_0^2} . \quad (2.48.6)$$



$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{k^2(z)}{k_0^2}. \quad (2.48.6)$$

Пусть неоднородная среда занимает полупространство $z > 0$ ($n=1$ при $z < 0$) и в нее попадает волна под углом θ_0 при $z=0$ (рис.2.2).

Поскольку среда однородна в направлении x , то вдоль всего луча выполняется соотношение

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = P_x = \text{const} = n \sin \theta = \sin \theta_0,$$

а уравнение (2.48.6) может быть переписано в виде

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = n^2(z) - \sin^2 \theta_0 = n^2(z) \cos^2 \theta(z). \quad (2.48.7)$$

Таким образом, для плоско - слоистой среды уравнение эйконала выражает закон преломления Снелля (2.46.3). Запишем его окончательное решение для фазы волны в виде

$$\psi = x \sin \theta_0 \pm \int_0^z \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} dz. \quad (2.48.8)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{k^2(R)}{k_0^2} - (\nabla\psi)^2 \right] A_0 &= 0; \\ A_0 \Delta\psi + 2\nabla A_0 \nabla\psi &= 0; \\ A_0 \Delta\psi + 2\nabla A_1 \nabla\psi &= i\Delta A_0. \end{aligned} \quad (2.48.5)$$

Подставив это решение во второе уравнение системы (2.48.5), получим решение уравнения переноса для амплитуды волны вдоль луча:

$$A = \left[A_0 / \sqrt{n \cos\theta} \right] = A_0 (n^2 - \sin^2 \theta_0)^{-1/4}. \quad (2.48.9)$$

Знак перед корнем в (2.48.8) определяется направлением распространения волны вдоль луча (в положительном или отрицательном направлении оси z). Окончательно, с учетом (2.48.8–2.48.9) поле в слоистой среде в лучевом приближении может быть записано в виде

$$\varphi(x, z) = \left[\exp(ik_0 x \sin\theta_0) \right] f(z),$$

где $f(z)$ является приближенным решением уравнения $f'' + k^2(z)f = 0$.

$$f(z) = \frac{A_0}{(n^2 - \sin^2 \theta_0)^{1/4}} \exp \left[\pm ik_0 \int_0^z \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} dz \right]. \quad (2.48.10)$$

Решение (2.48.10) известно также как приближенное решение Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна (ВКБ-приближение), которое в большинстве практических приложений достаточно хорошо описывает волновое поле в слоисто-неоднородной среде.