Лекции по физике. Механика

Механические колебания. Маятники. Волновые процессы.

Механические колебания

- **Колебаниями** называются процессы, происходящие с некоторой долей повторяемости
- Классификация колебаний
  - **Свободные** (собственные)
  - **Вынужденные**
  - **Параметрические**
  - **Автоколебания**

Механические колебания

- **Гармонические колебания** описываются гармоническими функциями (sin, cos)
  - Процессы в природе часто близки к гармоническим
  - Любые колебания можно рассматривать как суперпозицию гармонических

маятники

Малые колебания

- Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, имеющую минимум потенциальной энергии U(x) в точке x=0
- Разложим U(x) в ряд Маклорена:

$U(x)=U(0)+U'(0)\cdot x+1/2\cdot U''(0)\cdot x^2+\ldots$

из условия минимума $\rightarrow$ $U'(0)=0$ и $U''(0)>0$

положим $U(0)=0$ $\rightarrow$ $U(x)=1/2\cdot k\cdot x^2$

Малые колебания

- $F = -\mathrm{grad}U = -k \cdot x$ – восстанавливающая сила
- Если эта сила действует на тело массой m, то уравнение движения принимает вид:

  $m \cdot x'' = -k \cdot x$ или $x'' + k/m \cdot x = 0$
- Решение этого уравнения:

  $x = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi_0)$, $\omega_0^2 = k/m$,

  где A – амплитуда, ϕ_0 – начальная фаза,

  ω_0 – **круговая частота**, $\omega_0 \cdot t + \phi_0$ – фаза

Малые колебания

- Сила трения: $F_{тр}=-r\cdot x'$, где r – коэффициент сопротивления
- Уравнение движения с учётом силы трения:

  $m\cdot x''=-k\cdot x-r\cdot x'$ или $\mathbf{x''+2\cdot\beta\cdot x'+\omega_0^2\cdot x=0}$,

  где $2\cdot\beta=r/m>0$.

  Это уравнение описывает **затухающие собственные колебания**

затухающие колебания

Малые колебания

- Решение уравнения:

  $x=A\cdot e^{-\beta\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t+\phi_0)$, $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$
- При действии на систему внешней силы f(t) уравнение движения принимает вид:

  $x''+2\cdot\beta\cdot x'+\omega_0^2\cdot x=f(t)$ (1)

  Это уравнение описывает **вынужденные колебания**. Решение будет гармоническим, если f(t) – гармоническая функция: $f(t)=F_0\cdot\cos(\omega\cdot t)$
- В общем случае $\omega\neq\omega_0$

вынужденные колебания

Малые колебания

- Уравнение (1) является **линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами**
- Если $f(t) \neq 0$, то (1) **неоднородное** уравнение, если $f(t)=0$, то **однородное**
- Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения

Малые колебания

- При f(t)=$F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ решение уравнения (1) имеет вид:

$$x = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\cdot\beta^2\cdot\omega^2}}\cdot\cos\left(\omega\cdot t - arctg\,\frac{2\cdot\beta\cdot\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

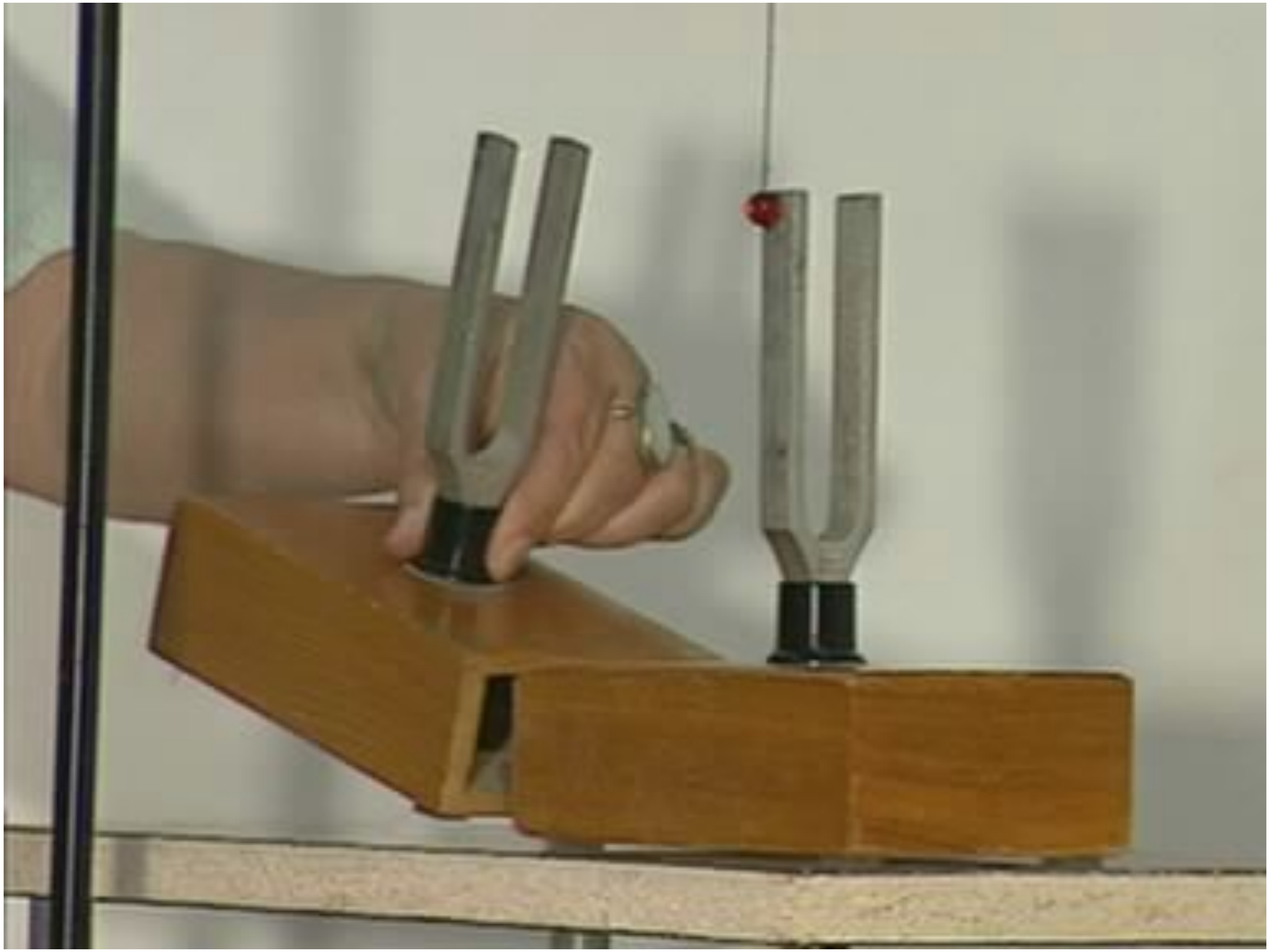
Малые колебания

Особенности решения:

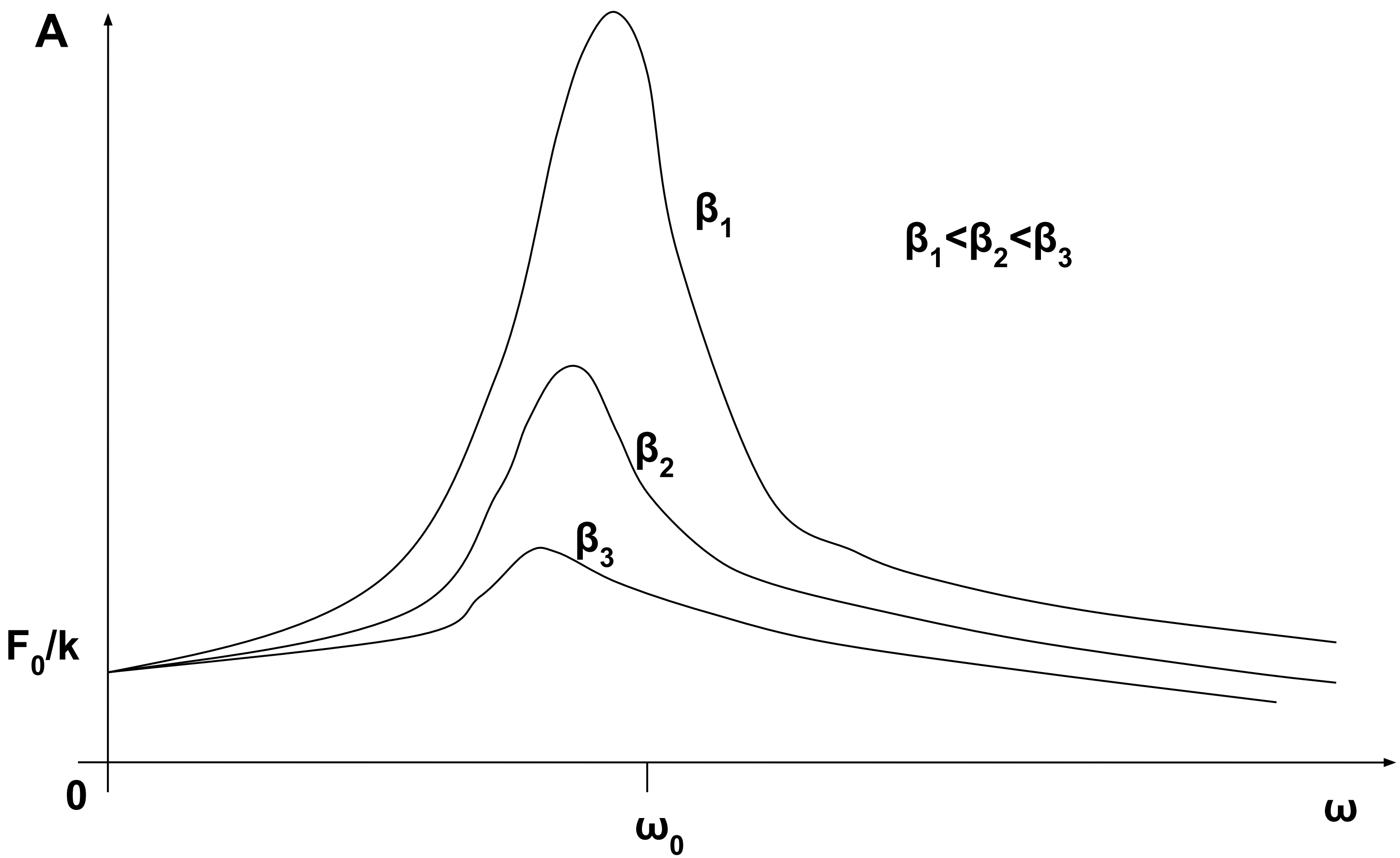
1. Частота колебаний равна частоте вынуждающей силы
2. При $\omega \to \omega_0$ наступает **явление резонанса** при котором амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума
3. Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы
   - Угол отставания $\phi=\pi/2$ при резонансной частоте, $\phi \to 0$ при $\omega \to 0$ и $\phi \to \pi$ при $\omega \to \infty$

резонанс

Явление резонанса



Малые колебания



Гармонические колебания

$x = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi_0)$

- **Период**: $T = 2 \cdot \pi / \omega_0$, с
- **Частота**: $\nu = 1/T = \omega_0 / 2 \cdot \pi$, Гц
- Скорость: $v = x' = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \phi_0) =$
  $= A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi_0 + \pi/2)$
- Ускорение: $a = x'' = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi_0) =$
  $= A \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi_0 + \pi) =$

Гармонические колебания

Значения A и ϕ_0 могут быть определены из начальных условий, т.к. при t=0:

$x_0 = A \cdot \cos(\phi_0)$, $\qquad$ $v_0 = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\phi_0)$

Отсюда получаем:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(v_0^2 / \omega_0^2\right)} \qquad \mathrm{tg}\,\varphi_0 = -v_0 / x_0 \cdot \omega_0$$

Гармонические колебания

- В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно. Кинетическая энергия достигает максимума при прохождении точки равновесия, а потенциальная – в точках максимального отклонения

Сложение колебаний

- Согласно теореме Фурье негармоническое колебание можно представить как бесконечную сумму гармонических колебаний с частотами кратными частоте исходного колебания:

$$x_{\omega_0}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 + \varphi_n)$$

сложение колебаний

фигуры Лиссажу

Пружинный маятник

- Возвращающая сила:

  $F_н = k \cdot \Delta l$
- Уравнение движения:

  $\Delta l'' + (k/m) \cdot \Delta l = 0$
- Частота и период колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Математический маятник

- Положение системы задаётся углом отклонения.
- Уравнение движения:

  $m \cdot l^2 \cdot \phi'' = -m \cdot g \cdot l \cdot \phi$ или $\phi'' + (g/l) \cdot \phi = 0$
- Частота и период колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\square}} \qquad T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\square}{g}}$$

Гармонические колебания

- Широкое применение на практике получили генераторы колебаний – устройства в которых возбуждаются и поддерживаются автоколебания. В этих устройствах потери энергии колебательной системы компенсируются за счёт подвода энергии извне с помощью специального механизма автоколебания

Звуковые колебания

- Особую роль в жизни людей играют звуковые колебания которые представляют собой колебания частиц окружающей среды (воздух, вода и т.д.). Эти колебания используются для получения информации об окружающем мире
- Существуют различные способы возбуждения звуковых колебаний

звуковой
генератор

камертоны

СВИСТКИ

струнные

Конец лекции