Физика

Динамика (продолжение)

3.3. Соударения тел

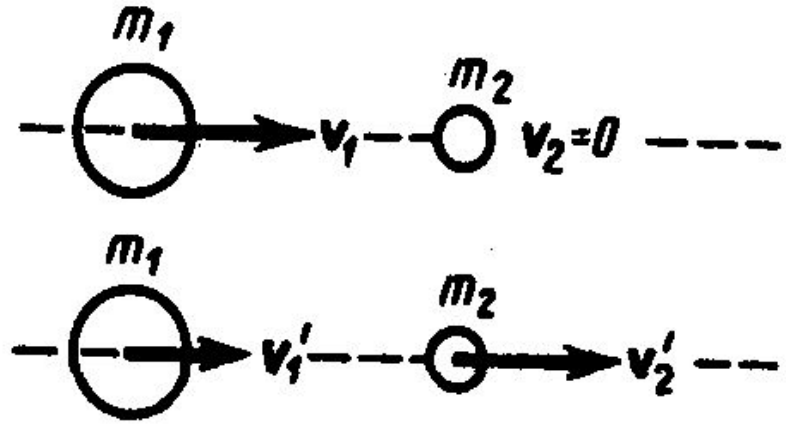
Определения:

Удар **(или соударение)—это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.**

Центральный удар **– такой, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.**

Абсолютно упругий удар **— столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию.**

Абсолютно неупругий удар **— столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое.**



Для абсолютно упругого удара справедливы законы:

Закон сохранения импульса:

$$m_1V_1 + m_2v_2 = m_1v_1^{'} + m_2v_2^{'};$$

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{m_1V_1^{'2}}{2} + \frac{m_2V_2^{'2}}{2};$$

Решая совместно два уравнения, получим выражения для скорости тел после удара:

$$V_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2};$$

$$V_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Абсолютно неупругий удар

Закон сохранения импульса:

$$m_1V_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v;$$

$$v = \frac{m_1V_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

В частном случае, если массы шаров равны ($m_1 = m_2$), то

$$v = \frac{(V_1 + V_2)}{2}.$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($v_2 = 0$), то

$$v = \frac{m_1V_1}{m_1 + m_2}.$$

Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии.

$$\Delta T = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)\, v^2}{2}$$

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2.$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно (v_2=0), то

$$\Delta T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

4. Механика твердого тела

4.1. Момент инерции

Моментом инерции **тела относительно оси называется произведение массы тела на квадраты расстояния до оси:**

$$J_i = m_i r_i^2$$

Моментом инерции системы **(тела) относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:**

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу по объему тела:

$$J = \int_0^m r^2 dm$$

Теорема Штейнера:
«момент инерции тела J относительно произвольной оси равен моменту его инерции Jc относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния a между осями»

$$J = J_C + ma^2.$$

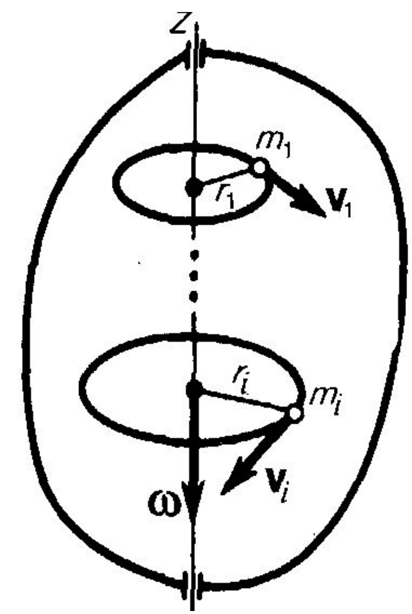
Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R	Ось симметрии	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиуса R	Ось симметрии	$J = \frac{1}{2}mR^2$
Стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$J = \frac{1}{12}ml^2$
Шар радиуса R	Ось проходит через центр шара	$J = \frac{2}{5}mR^2$

Пример.
Момент инерции длинного стержня, у которого ось симметрии проходит через конец стержня:

$$J = J_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

4.2. Кинетическая энергия вращения

Кинетическая энергия вращающегося тела равна сумме кинетических энергий его элементарных объемов:



$$T_{вр} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}$$

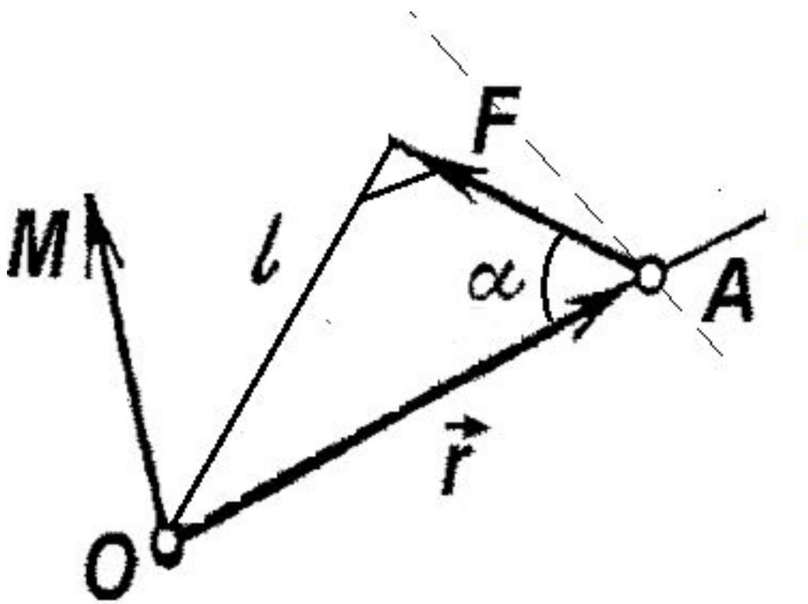
Момент инерции — мера инертности тела при вращательном движении.

В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}$$

4.3. Момент силы. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Моментом силы F **относительно неподвижной точки *O* называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора *r*, проведенного из точки *O* в точку *A* приложения силы, на силу *F*.**



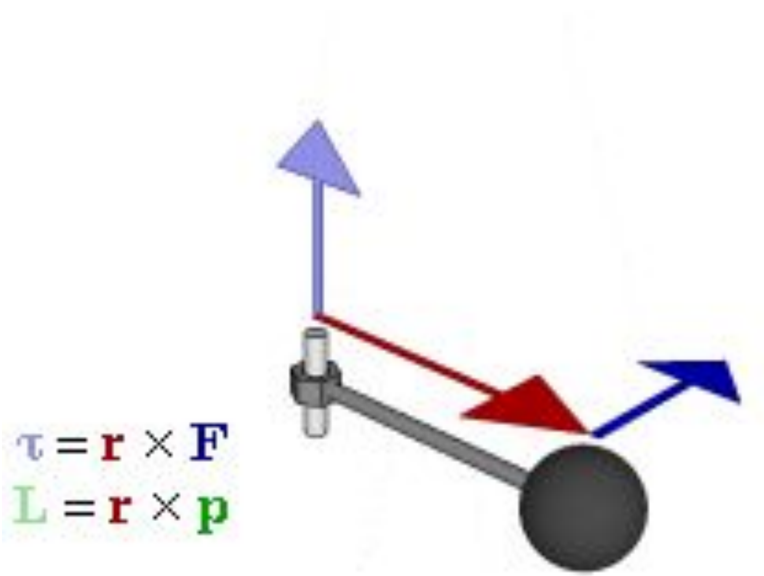
$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

Модуль момента силы:

$$M = Fr\sin\alpha = Fl.$$

Моментом силы F **относительно неподвижной оси** Z **называется скалярная величина** M_z**, равную проекции на эту ось вектора** M **момента силы, определенного относительно произвольной точки** O **данной оси** Z **.**

Значение момента не зависит от выбора точки O **на оси** Z**.**



Основной закон и основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

Работа при вращении тела:

$$\mathrm{d}A = M_z \mathrm{d}\varphi.$$

Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$\mathrm{d}K = \mathrm{d}\left(\frac{J_z \omega^2}{2}\right) = J_z \omega\, d\omega$$

Отсюда:

$$M_z \mathrm{d}\varphi = J_z \omega\, \mathrm{d}\omega, \quad M_z \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = J_z \omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

- уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

Если ось *z* совпадает с главной осью инерции, проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство:

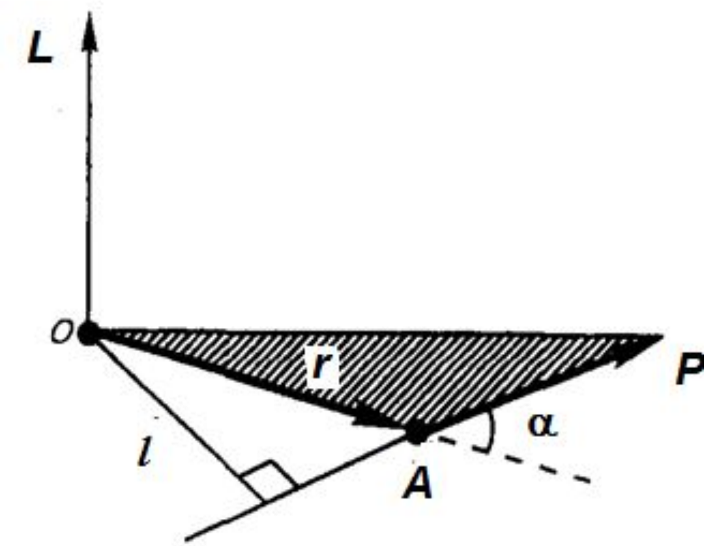
$$\boxed{\vec{M} = J\vec{\varepsilon},}$$

– основной закон динамики вращательного движения.

J **— главный момент инерции тела.**

Главный момент инерции **– момент инерции относительно главной оси, проходящий через центр масс.**

4.4. Момент импульса и закон сохранения момента импульса



Моментом импульса **материальной точки** ***A*** **относительно неподвижной оси** ***O*** **называется физическая величина, определяемая векторным произведением:**

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

Моментом импульса **относительно неподвижной оси *z* называется скалярная величина L_z, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки *O* данной оси.**

Скорость $\mathbf{v}_i$ и импульс $m_i\mathbf{v}_i$ каждой отдельной точки *A* тела перпендикулярны этому радиусу, т. е. радиус является плечом вектора $m_i\mathbf{v}_i$.

$$L_{i\,z} = m_i v_i r_i \,.$$

Момент импульса твердого тела **относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц (точек):**

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_z \omega, \quad L_z = J_z \omega.$$

Продифференцируем записанное уравнение по времени:

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_z \varepsilon = M_z, \quad \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z.$$

Это еще одна форма уравнения динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси:

«производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси».

Закон сохранения момента импульса:

«момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени».

$$\boxed{L = \mathrm{const}}$$

Закон сохранения момента импульса — *фундаментальный закон природы.*

Он связан со свойством симметрии пространства — его изотропностью, т. е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета.

***Пространство называется изотропным*, если поворот системы отсчета на произвольный угол не приведет к изменению результатов измерений.**

Соотношение основных параметров

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Скорость	$v = \frac{dr}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение	$a = \frac{dv}{dt}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Сила	F	Момент силы	M
Импульс	p	Момент импульса	L
Основное уравнение динамики	$F = ma$	Основное уравнение динамики	$M = J\varepsilon$

4.5. Деформация твердого тела

Деформация **– это изменение формы и размеров твердых тел после прекращения действия внешних сил.**

Деформация называется упругой**, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму.**

Деформации, называются пластическими **, если они сохраняются после прекращения действия внешних сил.**

Деформации бывают: растяжения, сжатия или сдвига.

Основные параметры деформация твердого тела

Напряжение **– сила, действующая на единицу площади поперечного сечения :**

$$\sigma = \frac{F}{S}.$$

Относительная деформация **– количественная мера, характеризующая степень деформации, испытываемой телом:**

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Относительное поперечное растяжение **(сжатие):**

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}.$$

d **— диаметр стержня.**

Деформации ε и ε' всегда имеют разные знаки
(при растяжении Δl положительно, а Δd отрицательно,
при сжатии Δl отрицательно, а Δd положительно).

Взаимосвязь ε и ε':

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon.$$

μ — коэффициент Пуассона, зависит от свойств материала.

Симеон Пуассон — французский ученый (1781—1840) , автор трудов по теории упругости.

4.6. Закон Гука

Для малых деформаций относительное удлинение ε и напряжение σ прямо пропорциональны друг другу:

$$\sigma = E\,\varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности E называется модулем Юнга. Модуль Юнга E определяется напряжением, вызывающим относительное удлинение, равное единице.

Относительное удлинение:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES}.$$

Томас Юнг (1773-1829) — английский физик, механик, врач, астроном.

Закон Гука:
«удлинение стержня при упругой деформации пропорционально действующей на стержень силе»:

$$F = \frac{ES}{l}\Delta l = k\Delta l,$$

***k*—коэффициент упругости.**

Роберт Гук (1635-1703) – английский естествоиспытатель, учёный-энциклопедист. Один из отцов экспериментальной физики.