

# Физика

## Динамика (продолжение)

### 3.3. Соударения тел

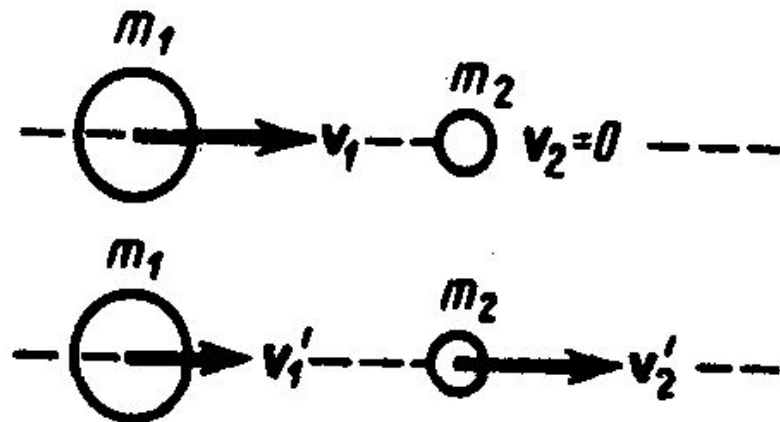
Определения:

**Удар** (или соударение)—это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.

**Центральный удар** – такой, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.

**Абсолютно упругий удар** — столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию.

**Абсолютно неупругий удар** — столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое.



Для абсолютно упругого удара справедливы законы:

Закон сохранения импульса:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2';$$

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2};$$

Решая совместно два уравнения, получим выражения для скорости тел после удара:

$$V_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2};$$

$$V_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

## Абсолютно неупругий удар

Закон сохранения импульса:

$$m_1V_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v;$$

$$v = \frac{m_1V_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

В частном случае, если массы шаров равны ( $m_1 = m_2$ ), то

$$v = \frac{(V_1 + V_2)}{2}.$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ( $v_2 = 0$ ), то

$$v = \frac{m_1V_1}{m_1 + m_2}.$$

Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии.

$$\Delta T = \left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}$$

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2.$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ( $v_2=0$ ), то

$$\Delta T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

## 4. Механика твердого тела

### 4.1. Момент инерции

**Моментом инерции** тела относительно оси называется произведение массы тела на квадраты расстояния до оси:

$$J_i = m_i r_i^2$$

**Моментом инерции системы** (тела) относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу по объему тела:

$$J = \int_0^m r^2 dm$$

Теорема Штейнера:

«момент инерции тела  $J$  относительно произвольной оси равен моменту его инерции  $J_C$  относительно параллельной оси, проходящей через центр масс  $C$  тела, сложенному с произведением массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $a$  между осями»

$$J = J_C + ma^2.$$

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиуса $R$	Ось симметрии	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиуса $R$	Ось симметрии	$J = \frac{1}{2}mR^2$
Стержень длиной $l$	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$J = \frac{1}{12}ml^2$
Шар радиуса $R$	Ось проходит через центр шара	$J = \frac{2}{5}mR^2$



Пример.

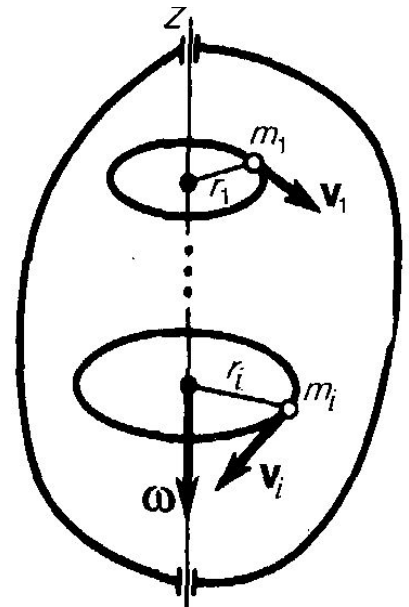
Момент инерции длинного стержня, у которого ось симметрии проходит через конец стержня:

$$J = J_c + m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

## 4.2. Кинетическая энергия вращения

Кинетическая энергия вращающегося тела равна сумме кинетических энергий его элементарных объемов:

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}$$



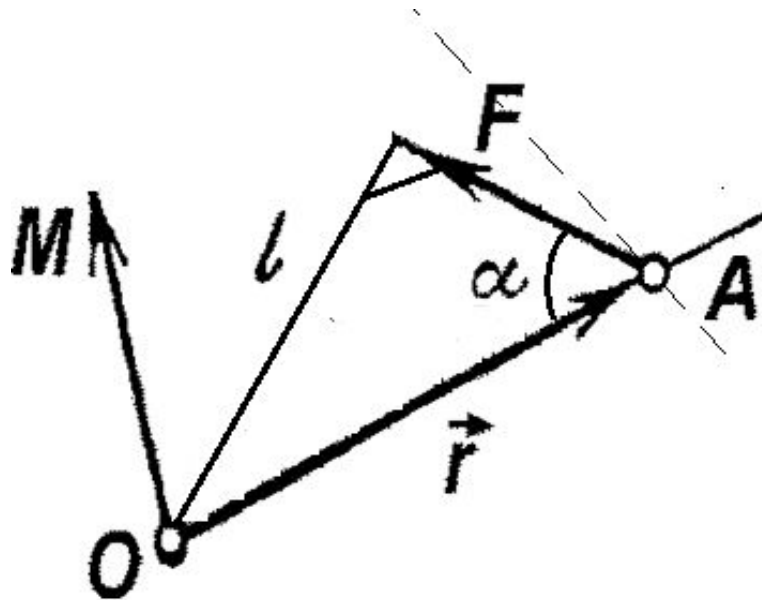
**Момент инерции — мера инертности тела при вращательном движении.**

**В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:**

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}$$

### 4.3. Момент силы. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

**Моментом силы  $F$**  относительно неподвижной точки  $O$  называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора  $r$ , проведенного из точки  $O$  в точку  $A$  приложения силы, на силу  $F$ .



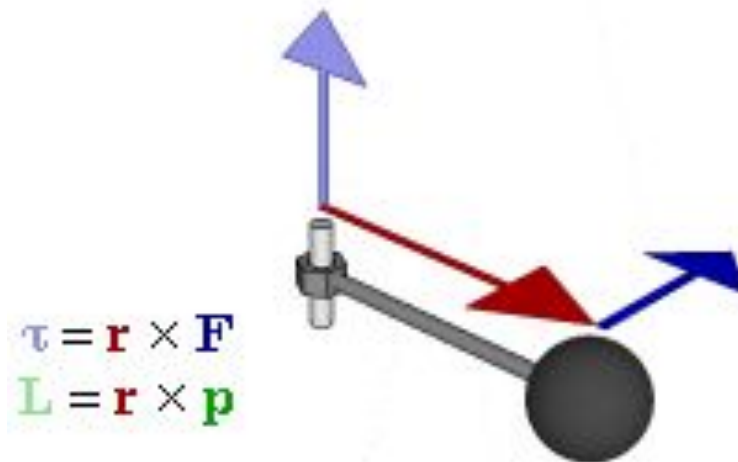
$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

Модуль момента силы:

$$M = Fr \sin \alpha = Fl.$$

**Моментом силы  $F$**  относительно неподвижной оси  $Z$  называется скалярная величина  $M_z$ , равную проекции на эту ось вектора  $M$  момента силы, определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси  $Z$ .

Значение момента не зависит от выбора точки  $O$  на оси  $Z$ .



## Основной закон и основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

Работа при вращении тела:

$$dA = M_z d\varphi.$$

Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$dK = d\left(\frac{J_z \omega^2}{2}\right) = J_z \omega d\omega$$

Отсюда:

$$M_z d\varphi = J_z \omega d\omega, \quad M_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}$$

- уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

Если ось **Z** совпадает с главной осью инерции, проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство:

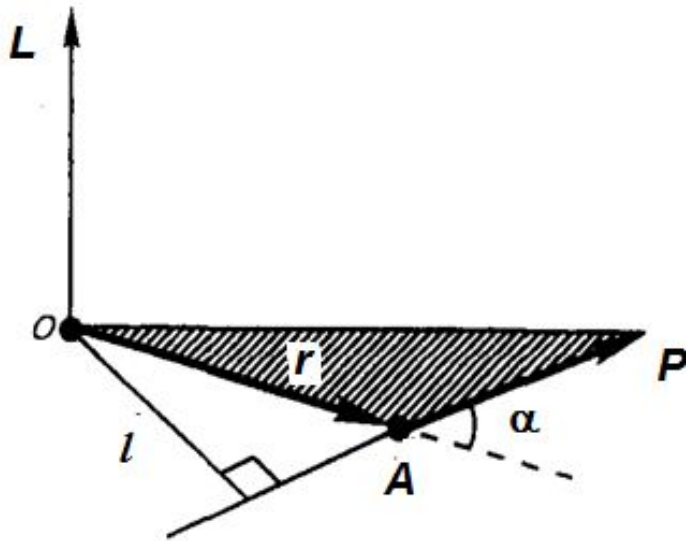
$$\vec{M} = J \vec{\varepsilon},$$

– основной закон динамики вращательного движения.

***J*** — главный момент инерции тела.

***Главный момент инерции*** – момент инерции относительно главной оси, проходящий через центр масс.

## 4.4. Момент импульса и закон сохранения момента импульса



**Моментом импульса** материальной точки **A** относительно неподвижной оси **O** называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m \vec{v}]$$

**Моментом импульса** относительно неподвижной оси **Z** называется скалярная величина  $L_z$ , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки **O** данной оси.

Скорость  $V_i$  и импульс  $m_i V_i$  каждой отдельной точки **A** тела перпендикулярны этому радиусу, т. е. радиус является плечом вектора  $m_i V_i$ .

$$L_{iz} = m_i v_i r_i.$$



**Момент импульса твердого тела** относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц (точек):

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \omega, \quad L_z = J_z \omega.$$

Продифференцируем записанное уравнение по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Это еще одна форма уравнения динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси:

«производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси».

## ***Закон сохранения момента импульса:***

**«момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени».**

$$L = \text{const}$$

**Закон сохранения момента импульса — фундаментальный закон природы.**

**Он связан со свойством симметрии пространства — его изотропностью, т. е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета.**

***Пространство называется изотропным*, если поворот системы отсчета на произвольный угол не приведет к изменению результатов измерений.**

## Соотношение основных параметров

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	$m$	Момент инерции	$J$
Скорость	$v = \frac{dr}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение	$a = \frac{dv}{dt}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Сила	$F$	Момент силы	$M$
Импульс	$p$	Момент импульса	$L$
Основное уравнение динамики	$F = ma$	Основное уравнение динамики	$M = J\varepsilon$

## 4.5. Деформация твердого тела

***Деформация*** – это изменение формы и размеров твердых тел после прекращения действия внешних сил.

***Деформация называется упругой***, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму.

***Деформации, называются пластическими***, если они сохраняются после прекращения действия внешних сил.

Деформации бывают: растяжения, сжатия или сдвига.

## Основные параметры деформация твердого тела

**Напряжение** – сила, действующая на единицу площади поперечного сечения :

$$\sigma = \frac{F}{S}.$$

**Относительная деформация** – количественная мера, характеризующая степень деформации, испытываемой телом:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

**Относительное поперечное растяжение** (сжатие):

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}.$$

$d$  — диаметр стержня.

Деформации  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  всегда имеют разные знаки (при растяжении  $\Delta l$  положительно, а  $\Delta d$  отрицательно, при сжатии  $\Delta l$  отрицательно, а  $\Delta d$  положительно).

Взаимосвязь  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$ : 
$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon.$$

$\mu$  — коэффициент Пуассона, зависит от свойств материала.



Симеон Пуассон — французский ученый (1781—1840), автор трудов по теории упругости.

## 4.6. Закон Гука

Для малых деформаций относительное удлинение  $\varepsilon$  и напряжение  $\sigma$  прямо пропорциональны друг другу:

$$\sigma = E \varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности  $E$  называется модулем Юнга. Модуль Юнга  $E$  определяется напряжением, вызывающим относительное удлинение, равное единице.



Относительное  
удлинение:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES}.$$

Томас Юнг (1773-1829) — английский физик, механик, врач, астроном.

**Закон Гука:**

**«удлинение стержня при упругой деформации пропорционально действующей на стержень силе»:**

$$F = \frac{ES}{l} \Delta l = k \Delta l,$$

***k***—коэффициент упругости.

**Роберт Гук (1635-1703) – английский естествоиспытатель, учёный-энциклопедист. Один из отцов экспериментальной физики.**

