

# Механика вращательного движения

- Пусть  $\vec{r}$  - проведенный из неподвижной в некоторой инерциальной системе отсчета точки  $O$  радиус-вектор материальной точки, к которой приложена сила  $\vec{F}$ . Рассмотрим векторное произведение
  - $\vec{r} \times \vec{F}$
  - Вектор  $\vec{r} \times \vec{F}$  называется *моментом силы относительно точки  $O$* . Определим также момент импульса материальной точки с помощью равенства
    - $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

- Рассмотрим производную

- $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{L} \times \boldsymbol{\omega}$  (1.41)

- Вектор  $\mathbf{L}$  есть по определению скорость тела, а  $\mathbf{r}$ . Поэтому первое слагаемое в (1.41) обращается в ноль как векторное произведение коллинеарных векторов. Второе слагаемое преобразуем с помощью закона Ньютона и перепишем (1.41) в виде

- $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  (1.42)

- Это уравнение называется **уравнением моментов**

- Его можно обобщить на случай произвольной системы материальных точек. Определим *момент импульса системы точек относительно центра  $O$*  как векторную сумму моментов импульсов этих точек относительно того же центра. Определим также *момент всех сил, действующих на систему* как векторную сумму моментов отдельных сил.

- Очевидно, что при вычислении суммарного момента сил можно не принимать во внимание внутренние силы в системе точек. Согласно третьему закону Ньютона внутренние силы всегда входят попарно, для каждой внутренней силы существует равная по величине и противоположная по направлению другая внутренняя сила, причем каждая такая пара сил направлена вдоль одной прямой. Поэтому полный момент внутренних сил относительно любого центра равен нулю

- Значит, складывая уравнения (1.42) для всех точек системы получим следующий важный результат:

- $$(1.43)$$

- т.е. *производная по времени от момента импульса системы материальных точек относительно произвольного неподвижного центра равна геометрической сумме моментов всех внешних сил относительно того же центра.* Следствием этого результата является **закон сохранения момента импульса**: *если суммарный момент внешних сил относительно произвольного неподвижного центра равен нулю, то момент импульса системы относительно того же центра не изменяется со временем.*

- Рассмотрим теперь проекцию равенства (1.42) на произвольную ось  $x$ , проходящую через центр  $O$ :
- .
- Проекции  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{F}$  на ось  $x$  называются соответственно *моментами импульса и силы относительно оси  $x$* . Нетрудно показать, что вычисление момента может быть произведено следующим образом. Назовем *плечом силы относительно оси  $x$*  кратчайшее расстояние между осью и линией действия силы. Тогда можно найти как произведение перпендикулярной к оси составляющей силы на соответствующее плечо.

- Для системы точек получим
- $$\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (1.44)$$
- где  $\vec{M}_x$  - суммарный момент внешних сил относительно оси  $x$ . Равенство (1.44) называется *уравнением моментов относительно оси*.
- Применим уравнение (1.44) к рассмотрению вращения твердого тела относительно неподвижной оси. В качестве оси моментов примем ось вращения тела. Каждая точка вращающегося твердого тела движется по окружности, центр которой располагается на оси вращения. Если материальная точка вращается по окружности радиуса  $r$ , то момент ее импульса относительно оси вращения равен  $L = mrv$ . Скорость точки  $v = \omega r$ , где  $\omega$  - угловая скорость

- Все точки твердого тела вращаются с одинаковой угловой скоростью, поэтому момент импульса твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси можно вычислить так:
- .
- (Суммирование в этой формуле производится по всем точкам тела, которые, в общем случае, имеют различные массы и радиусы вращения.) Вводя независимую от скорости постоянную величину , которая называется *моментом инерции системы точек (тела) относительно оси вращения*, запишем момент импульса в виде:
- .
- Подставляя это выражение в (1.44) получим *основное уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси*:
- .



- Если материальная точка вращается по окружности, то элементарная работа при повороте на угол  $d\alpha$  равна  $dA = M d\alpha$ . Такое же выражение получится и для твердого тела, поскольку точки твердого тела неподвижны относительно друг друга, и внутренние силы работы не совершают. Значит, для твердого тела
  - $dA = M d\alpha$ ,
  - роль силы играет момент внешних сил, а роль линейного перемещения – угол поворота

- Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

- .