

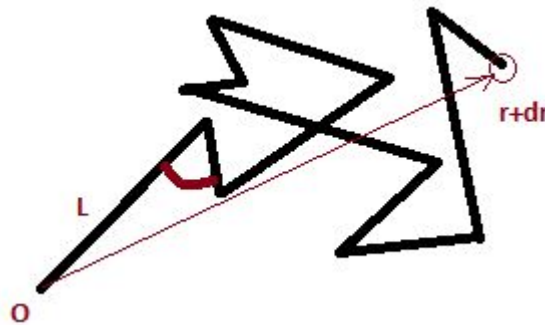
Видов Павел Викторович

**МОДЕЛИ НЕГАУССОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ С
КОНЕЧНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ**

01.04.02 – Теоретическая физика
диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

1. Задача о случайных блужданиях (формулировка Пирсона)

Задача о случайных блужданиях (К.Пирсон, 1905): человек начинает движение с точки O и двигается по прямой на расстояние l , затем он совершает поворот на произвольный угол. Процесс повторяется n раз. Необходимо найти вероятность того, что после n шагов человек будет находиться в интервале от r до $r+dr$ от точки O .



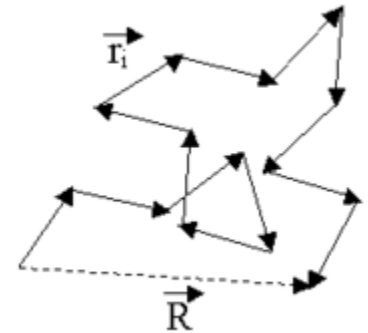
2. Задача о случайных блужданиях

Задача о случайных блужданиях: нужно найти плотность вероятности того, что частица, испытав N прыжков в пространстве некоторой размерности G окажется в интервале $\vec{R} \div \vec{R} + \Delta\vec{R}$

Каждый i -ый прыжок может быть произведен в интервал длин $\vec{r}_i \div \vec{r}_i + \Delta\vec{r}_i$ с вероятностью $\tau(\vec{r}_i)$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \quad (1) \quad W_{N+1}(\vec{R}) = \int \tau_{N+1}(\vec{R} - \vec{R}') W_N(\vec{R}') d^d \vec{R}' \quad (2)$$

$$W(\vec{R}) = \int \dots \int_V \delta(\vec{R} - \sum_{i=1}^N \vec{r}_i) \prod_{i=1}^N \tau(\vec{r}_i) d\vec{r}_i \quad (3)$$



$$W_1(R) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi N \langle r^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{R^2}{2N \langle r^2 \rangle}\right) \quad (4)$$

$$N \langle r^2 \rangle = Dt \quad (5)$$

Важнейшим требованием для решения является наличие всех моментов закона прыжка

*Chandrasekhar S Rev.Mod.Phys. 15 1 (1943).

3. Диффузия

Экспериментальные наблюдения:

- диффузия частичек угольной пыли на поверхности спирта (Я.Ингенхоуц, 1785)
- движения пыльцы в жидкости (Р. Броун, 1827)

Математические результаты:

- К.Винер предположил, что движение броуновской частицы является следствием ее соударений с молекулами жидкости (1863)
- А.Эйнштейн получил уравнение диффузии

Хаотическое движение молекул жидкости можно представить как случайные блуждания с характерной длиной блуждания Δ и временем τ . Нас интересует вид функции , которая определяет плотность вероятности того, что частица будет находиться в положении в момент времени при стремлении величин:
 $\Delta \rightarrow 0 \quad \tau \rightarrow 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = -v \frac{\partial}{\partial x} p(x,t) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x,t)$$

$$D = \lim_{\Delta, \tau \rightarrow 0} \frac{m_2 \Delta^2}{2\tau}$$

$$v = \lim_{\Delta, \tau \rightarrow 0} \frac{m_1 \Delta}{\tau}$$

4. Случайные блуждания с непрерывным временем (CTRW)

Данная модель предполагает, что прыжки или блуждания происходят в независимые случайные моменты времени, при этом вероятность того, что следующий прыжок произойдет через промежуток времени от t до $t + \Delta t$ определяется плотностью распределения $w(t)$

В случае если характерное время между прыжками

$$T = \int_0^{\infty} dt w(t)t$$

конечно, то есть интеграл сходится, можно утверждать, что время, необходимое для совершения N прыжков, равно NT . Таким образом, можно заменить в дискретной задаче N на непрерывное время t/T .

Условная плотность распределения вероятности нахождения частицы в точке x в момент времени t определяется как:

$$\psi(x, t) = \lambda(x)w(t)$$

5. Случайные блуждания (случай отсутствия второго и более высоких моментов закона прыжка)

Закон элементарного прыжка, не дающий всех конечных моментов, но обладающий нормировкой:

$$\tau(r_i) = \frac{C_1}{(z^2 + r_i^2)^\beta} \quad C_1 = 2\Gamma(\beta)z^{(2\beta-1)} / \pi^{1/2}\Gamma(\beta - 1/2)$$

$3/2 > \beta > 1/2$, z – характерная длина прыжка

$$W_1(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(KR) \exp[-N(Kz)^{2\beta-1} \frac{\Gamma(3/2 - \beta)}{2^{2\beta-1}\Gamma(\beta + 1/2)}] dK \quad - \text{Распределение Леви}$$

$W_1(R) = W_1(RN^{-1/(2\beta-1)})N^{1/(2\beta-1)}$ Функция $W_1(R)$ - самоподобна

$$W_1(R \rightarrow \infty) \approx \frac{\Gamma(2\beta) \sin[\frac{\pi}{2}(2\beta - 1)]}{\pi \rho^{2\beta}} \quad \rho = \frac{R}{R_0}, \quad R_0 = \frac{z}{2} \left[N \frac{\Gamma(3/2 - \beta)}{\Gamma(\beta + 1/2)} \right]^{\frac{1}{2\beta-1}}$$

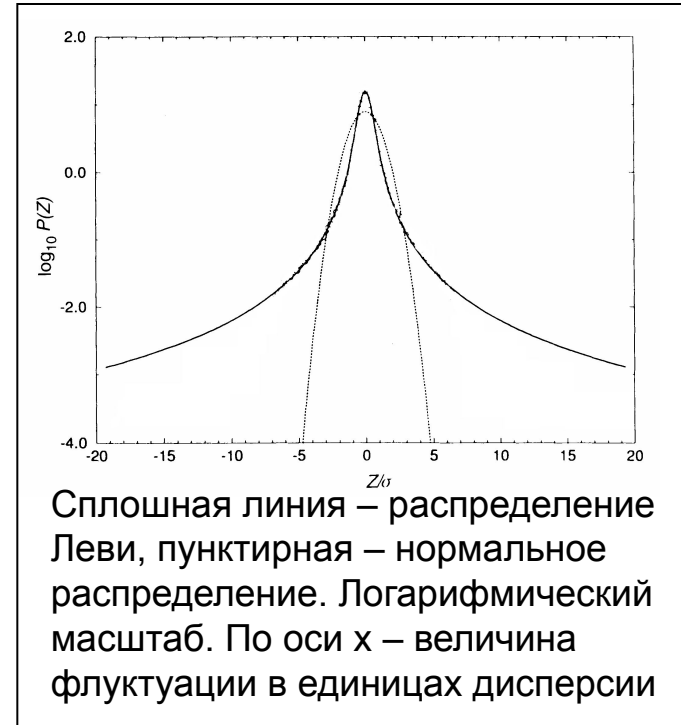
Медленно спадающая асимптотика, значительное количество больших флуктуаций

$$\frac{W_1(R \rightarrow \infty)}{\tau(r \rightarrow \infty)} = \frac{Nr^4}{R^4} \quad \text{Большие флуктуации могут возникать посредством одного прыжка } (R=r \text{ при } N=1)$$

6. Распределение Леви

Свойства устойчивого симметричного распределения Леви:

- Форма распределения Леви в явном виде известна только для двух значений α . При распределении $\alpha=1$ Коши, а при $\alpha=2$ - распределение Гаусса.
- Распределение Леви обладает свойством масштабной инвариантности
- Для распределения Леви характерно наличие медленно спадающей асимптотики (тяжелых хвостов)
- Важным свойством распределения Леви является его сходимость к степенному закону для больших значений x .
- Отсутствует как дисперсия, так и все более высокие моменты распределения.



$$\hat{L}(k) = \exp(-c^\alpha |k|^\alpha), \quad 0 < \alpha < 2$$
$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx) \exp(-c^\alpha |k|^\alpha) dk$$

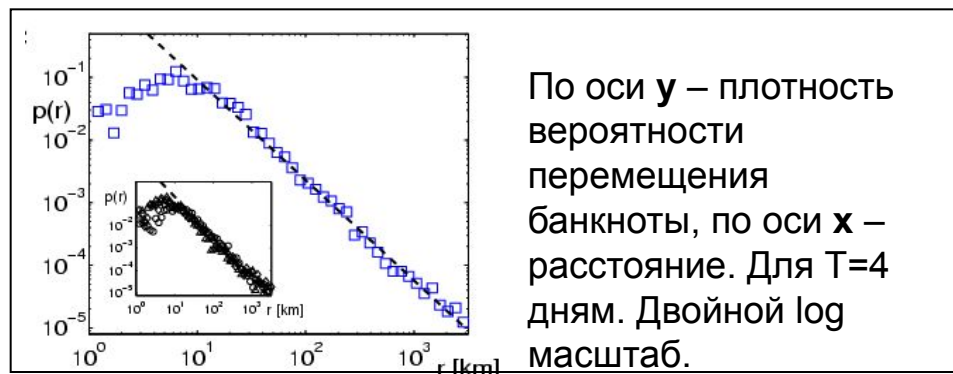
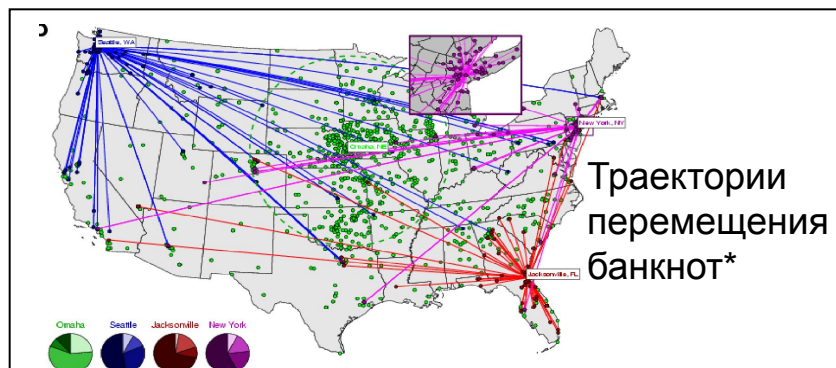
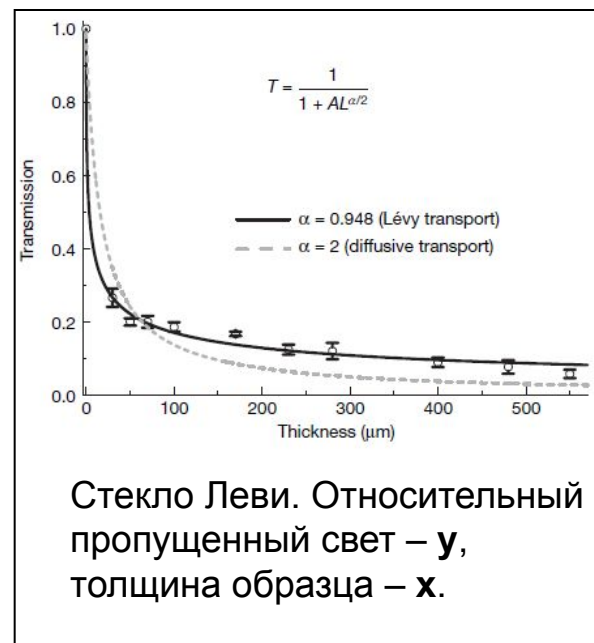
7. Распределения Леви в физике и других областях

Физические примеры аномальной диффузии:

- прохождение света через стекло Леви

Нефизические примеры аномальной диффузии:

- перемещения альбатросов
- перемещения банкнот в мире



*D. Brockman, L. Hufnagel, T. Geisel, "The scaling of human travel", Nature 439, 462-465. (2006)

8. Случайные блуждания (случай отсутствия моментов закона прыжка выше второго)

Здесь закон прыжка тот же, но $\beta > 3/2$

В области малых флуктуаций:

$$W_1^G(R) = \sqrt{\frac{\beta - 3/2}{\pi N z^2}} \exp\left(-\frac{\beta - 3/2}{N z^2} R^2\right)$$

При больших флуктуациях впервые получено:

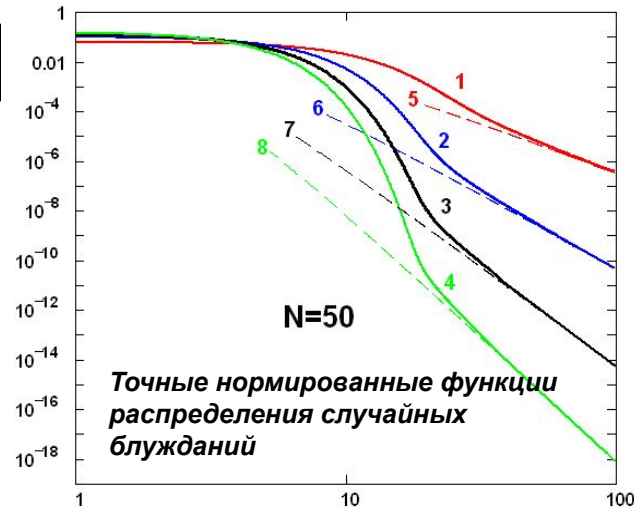
$$W_1(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{2^\beta z^{2\beta-1} N}{\pi(2\beta - 3)R^{2\beta}}$$

Такие случайные блуждания представляют собой «усеченные» блуждания Леви.

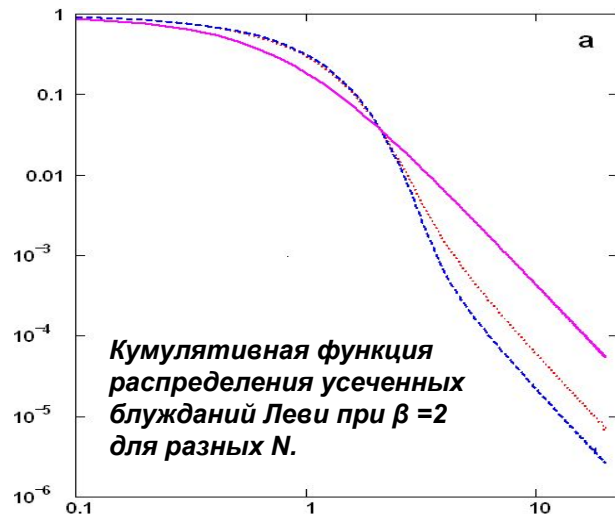
Зависимость СКО от числа прыжков:

$$\langle R^2 \rangle = \frac{N z^2}{2\beta - 3}$$

Для $\beta=2$ – неотличимо от Гаусса



Для $\beta=2$ (1), $\beta=3$ (2), $\beta=4$ (3), $\beta=5$ (4) в зависимости от длины блужданий R , нормированных на z . Штриховые прямые – асимптотики при больших R . Двойной логарифмический масштаб.



Сплошная линия: $N = 1$, пунктирная линия: $N = 60$, точки: $N = 450$

9. Промежуточные выводы

- Введение закона прыжка вида:

$$\tau(r_i) = \frac{C_1}{(z^2 + r_i^2)^\beta}$$

позволяет единым аналитическим образом рассмотреть как обычные блуждания Леви, так и усеченные блуждания Леви.

- Для усеченных блужданий получены аналитические асимптоты, как для области малых флуктуаций, так и для области больших флуктуаций.

$$W_1^G(R) = \sqrt{\frac{\beta - 3/2}{\pi Nz^2}} \exp\left(-\frac{\beta - 3/2}{Nz^2} R^2\right)$$

$$W_1(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{2^\beta z^{2\beta-1} N}{\pi(2\beta - 3)R^{2\beta}}$$

10. Эмпирически наблюдаемые негауссовы случайные блуждания

Дискретные временные ряды относительных приращений цен акций

$$S(\Delta t) = \ln \frac{Y(t + \Delta t)}{Y(t)}$$

где $Y(t)$ – цена акции в момент времени t

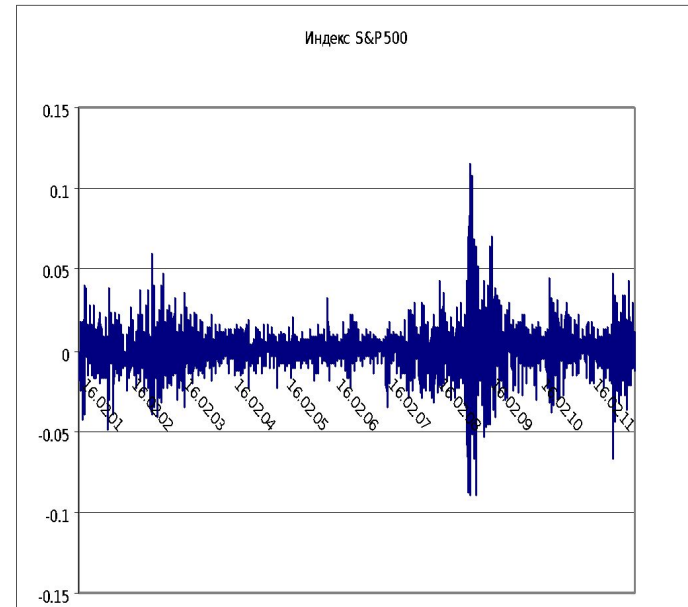
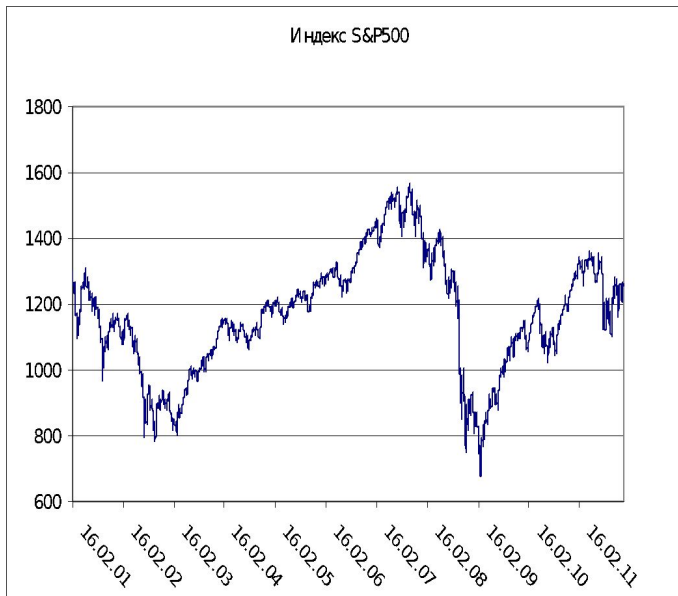


График значений индекса S&P 500 (а),
флуктуаций индекса S&P 500 (б) в период с
1.01.2000 по 1.01.2012.

11. Статистические характеристики финансовых временных рядов

Дискретные временные ряды относительных приращений цен акций

$$S(\Delta t) = \ln \frac{Y(t + \Delta t)}{Y(t)}$$

где $Y(t)$ – цена акции в момент времени t

1. Автокорреляционная функция:

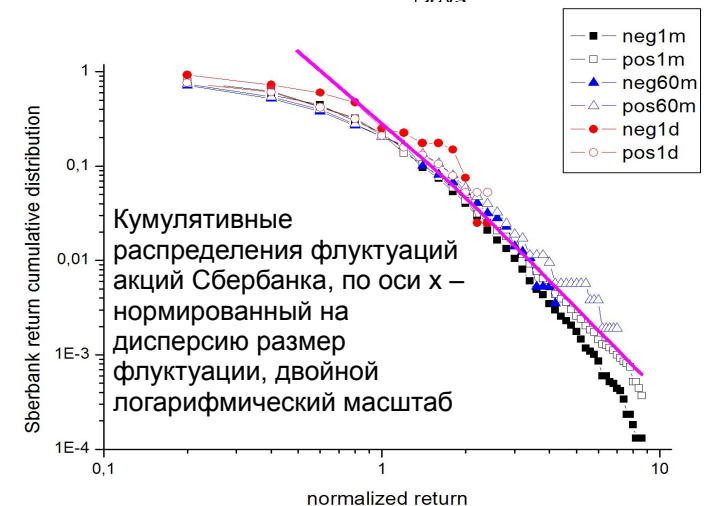
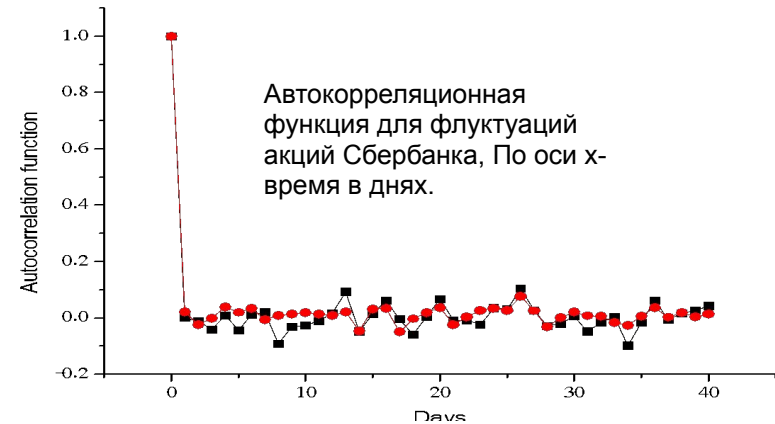
$$B(\Delta t) = \langle S(t)S(t + \Delta t) \rangle \sim \delta(\Delta t)$$

Флуктуации $S(\Delta t)$ – случайные блуждания

2. Распределения флуктуаций доходностей на фондовом рынке:

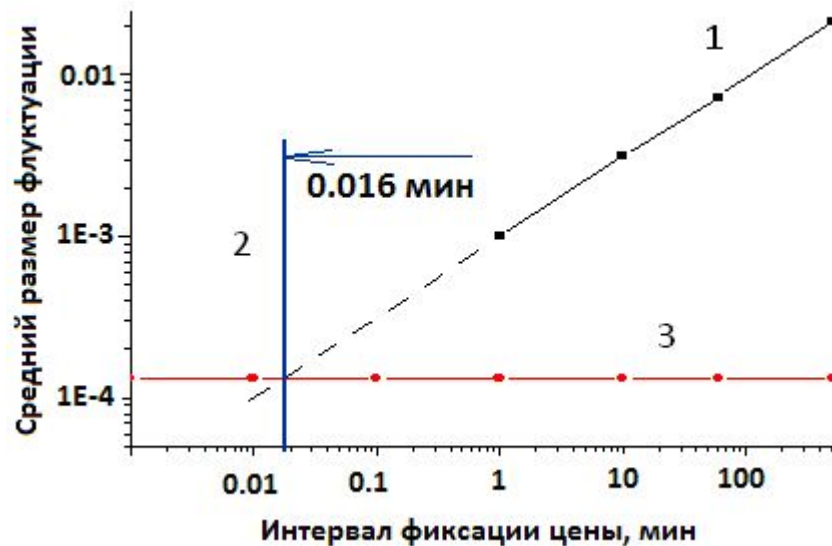
- «толстые хвосты»
- масштабная инвариантность
- степенное усечение хвостов с законом:

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} x^{-3}, & S(\Delta t) > x \\ -x^{-3}, & S(\Delta t) < -x \end{cases}$$



12. Определение минимального масштаба процесса

Эмпирические данные позволяют легко определить среднее значение временного интервала между отдельными изменениями цены и собственно характерный масштаб этого изменения. Если тик цены является минимальным масштабом процесса, то эти две величины должны удовлетворять функциональной связи, определяющей зависимость дисперсии от числа прыжков



13. Применение модели «усеченных» блужданий Леви для описания рассматриваемой системы

- Характер асимптотики «усеченных» блужданий Леви с законом единичного прыжка $\tau(r_i) = \frac{\text{при } \beta=2}{(z^2 + r_i^2)^\beta}$ соответствует эмпирическим

распределениям, однако в этом случае имеет место различное поведение распределения для разных значений N , чего не видно в реальности.

- Попробуем применить схему случайных блужданий с непрерывным временем (CTRW). Данная модель позволяет простым образом перейти от дискретных случайных блужданий к непрерывным. Если ввести функцию плотности распределения прыжков за определенное время $p(N,t)$, то наблюдаемая плотность распределения $W(R,t)$ выражается формулой подчинения:

$$W(R,t) = \int_0^{N \rightarrow \infty} W(N,R)p(N,t)dN$$

Функция распределения временных интервалов спадает с уменьшением Δt как $(\Delta t)^{4.4}$. Учет времени между прыжками не позволяет получить новые результаты в силу наличия математического ожидания величины временного интервала.

14. Модификация модели

Обнаружено эмпирическое кумулятивное распределение объемов сделок формирующих временной ряд, имеющее хвосты степенного вида с показателем степени $1.7 > \zeta > 1.5$

Каждое z в схеме является случайной величиной z_i пропорциональной кол-ву акций в i -ой сделке. Мы вводим зависимость функции распределения вероятности единичных флуктуаций $\tau_i(r_i)$ от другой случайной величины z_i .
Функция распределения «усеченных» случайных блужданий Леви при $\beta=2$:

$$W_{\beta=2, z_i}(R) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dK \exp(iKR) \prod_{i=1}^N e^{-Kz_i} (1 + Kz_i)$$

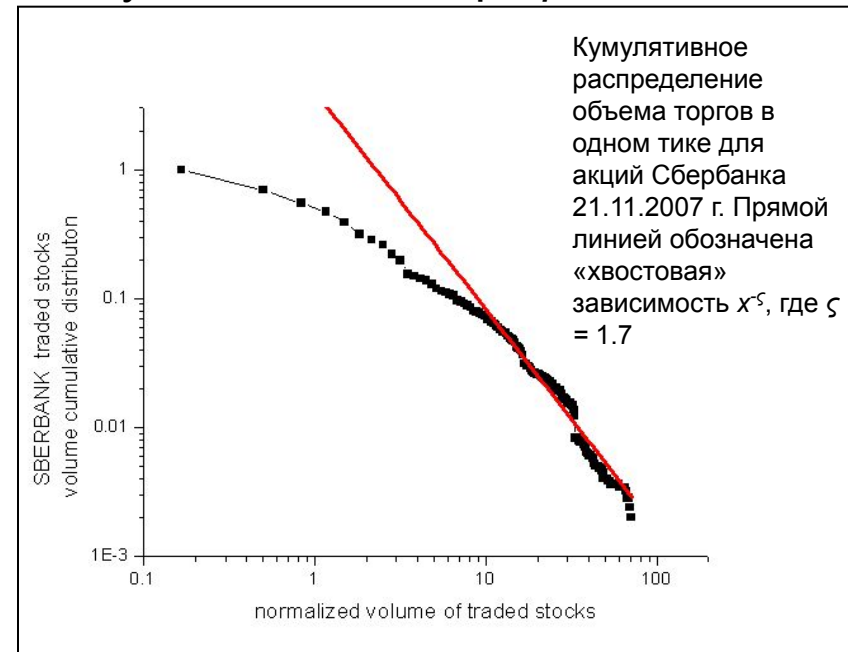
Асимптотика распределения при больших R :

$$W_{\beta=2, z_i}(R) = \frac{4 \sum z_i^3}{\pi R^4}$$

$\{z_i\}$ имеют функцию распределения $\sim x^{-\delta}$

$$\delta \sim 2.5 - 2.7$$

Плотность вероятности $\sum z_i^3 \sim x^{\frac{2}{3} - \frac{\delta}{3}}$



15. Сравнение результатов модели и эмпирических данных.

Если перенормировать соответствующее асимптотическое кумулятивное распределение:

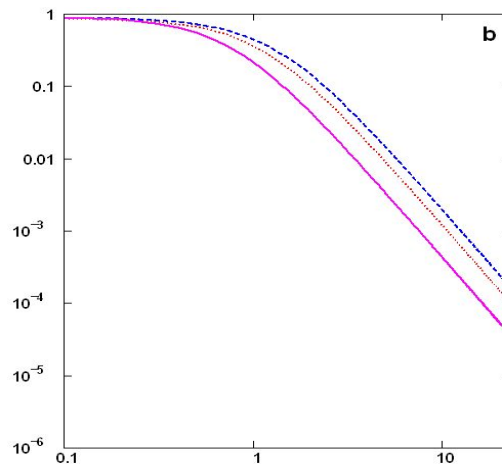
$$\Phi_{\beta=2, z_i}(R) \approx \frac{4 \sum z_i^3}{3\pi R^3}$$

на величину стандартного

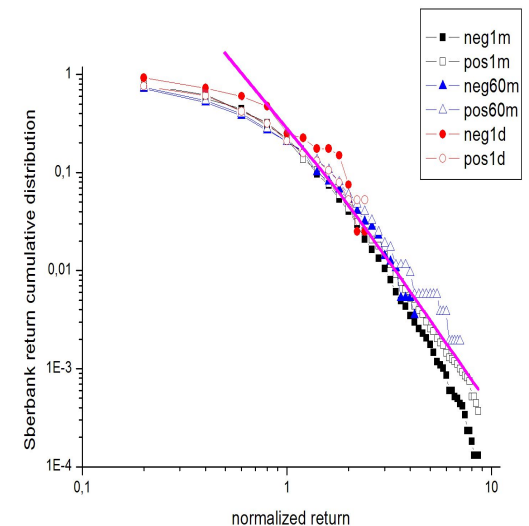
отклонения: $(\sum z_i^2)^{1/2}$

$$\Phi_{\beta=2, z_i}^{renorm} \left(\frac{R}{\sqrt{\sum z_i^2}} \right) \sim N^{\frac{3}{\delta-1} - \frac{3}{2}}$$

При $\delta \sim 2.5-2.7$, получаем зависимости от N в диапазоне $N^{0.5} - N^{0.27}$, то есть слабую зависимость от N , что и наблюдается для эмпирических данных.



Кумулятивная функция распределения, полученная в модели для $\beta = 2$ (ось Y), нормированная на *ст. отклонение*. Сплошная линия: $N = 1$, пунктирная линия: $N = 60$, точки: $N = 450$.



Кумулятивные распределения флуктуаций акций Сбербанка, по оси x – нормированный на *ст. отклонение* размер флуктуации, двойной логарифмический масштаб

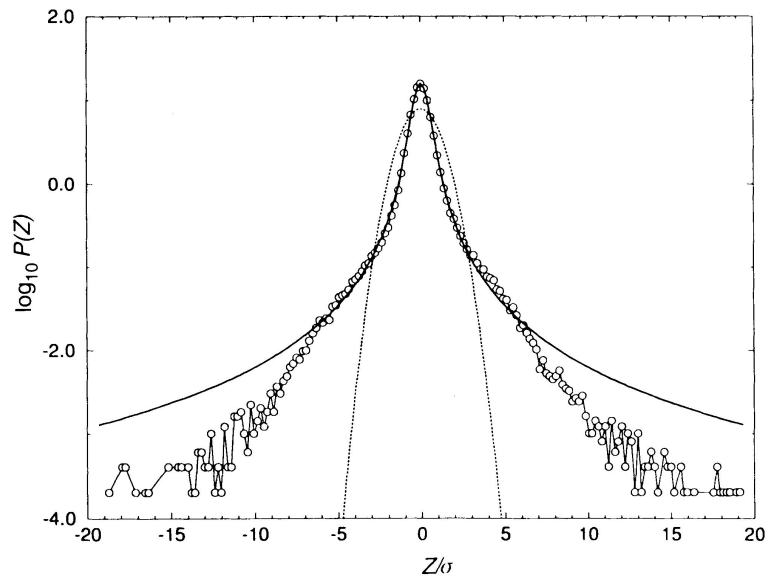
16. Выводы

- Введение закона прыжка позволяет единым аналитическим образом рассмотреть как обычные блуждания Леви, так и «усеченные» блуждания Леви.
- Для усеченных блужданий получены аналитические асимптоты и выяснены законы масштабирования.
- Исследована система, в которой наблюдаются негауссовы случайные блуждания, представляющая собой динамику цен акций на российском фондовом рынке.
- Кумулятивные распределения флуктуаций российских акций и индексов обладают скейлингом, а асимптотика при больших флуктуациях описывается законом типа $1/x^3$.
- Установлен закон прыжка, удовлетворяющий исследованной системе
- Предложена схема модификации модели, позволяющая получить точный аналитический вид распределения, хорошо описывающий реальные данные.

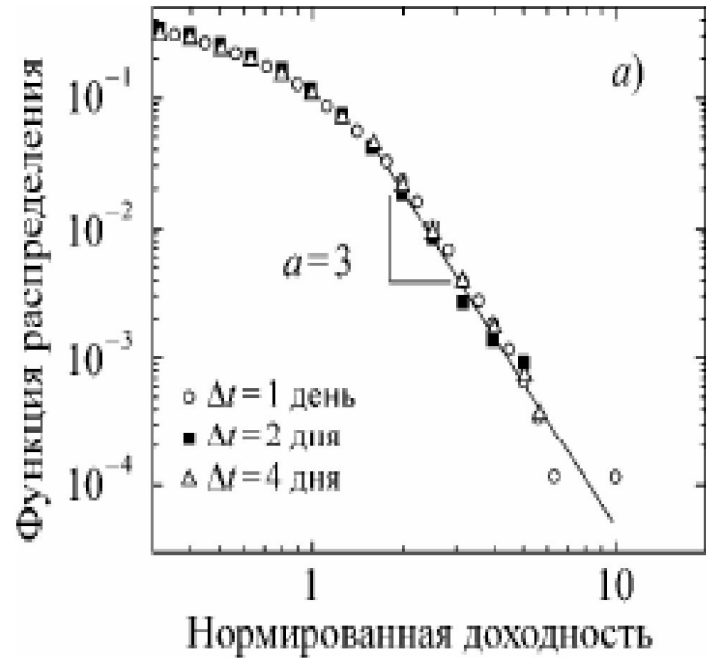
Публикации

1. Видов П.В., Романовский М.Ю., Доходность активов российского фондового рынка: автокорреляции и распределения, **"Математика. Компьютер. Образование"**, Тезисы XV международной конференции (2008)
2. Видов П.В., Жуков И.А., Романовский М.Ю., Доходность активов российского фондового рынка: автокорреляции и распределения, **"Математика. Компьютер. Образование"**. Сб. трудов XV международной конференции, Ижевск: Научно-издательский центр "Регулярная и хаотическая динамика", (2008). Том 1, 302 стр. Стр. 196-201
3. П.В. Видов, М.Ю. Романовский, Аналитические представления негауссовых законов случайных блужданий, **Труды Института общей физики им. А.М. Прохорова**, Т.65, (2009)
4. P.V.Vidov and M.Yu.Romanovsky. Analytical representation of non-Gaussian laws of random walks, **Physics of wave phenomena**. (2009). V.17, No.3. P.218-228.
5. М.Ю.Романовский, П.В. Видов, В.А. Пыркин, Является ли тик элементарным прыжком в схеме случайных блужданий на фондовом рынке? **Компьютерные исследования и моделирование**, Т.2, № 2, с.219-223, (2010)
6. Видов П.В., Романовский М.Ю., "Неклассические случайные блуждания и феноменология флуктуаций доходности ценных бумаг на фондовом рынке" **УФН**, 181, 774–778 (2011)
7. M.Yu. Romanovsky, P.V. Vidov, Analytical representation of stock and stock-indexes returns: Non-Gaussian random walks with various jump laws, **Physica A**, 390, 21-22 (2011)

Спасибо за внимание!



Сравнение экспериментального распределения, полученного для 1-мин приращений индекса S&P500 (кружки) с устойчивых распределением Леви (сплошная линия) и распределением Гаусса (пунктирная линия).



Кумулятивная функция распределения доходностей для индекса S&P500