

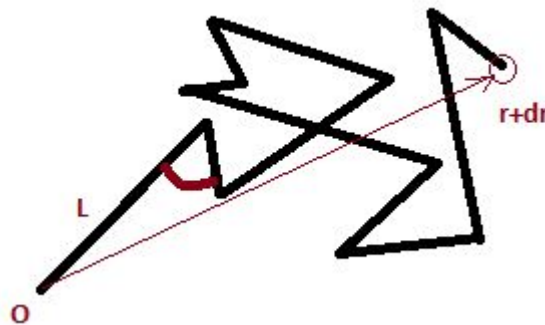
Видов Павел Викторович

**МОДЕЛИ НЕГАУССОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ С  
КОНЕЧНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ**

01.04.02 – Теоретическая физика  
диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

# 1. Задача о случайных блужданиях (формулировка Пирсона)

Задача о случайных блужданиях (К.Пирсон, 1905): человек начинает движение с точки  $O$  и двигается по прямой на расстояние  $l$ , затем он совершает поворот на произвольный угол. Процесс повторяется  $n$  раз. Необходимо найти вероятность того, что после  $n$  шагов человек будет находиться в интервале от  $r$  до  $r+dr$  от точки  $O$ .



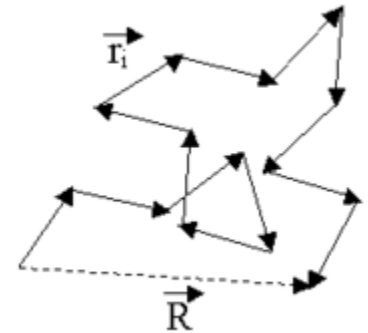
# 2. Задача о случайных блужданиях

Задача о случайных блужданиях: нужно найти плотность вероятности того, что частица, испытав  $N$  прыжков в пространстве некоторой размерности  $G$  окажется в интервале  $\vec{R} \div \vec{R} + \Delta\vec{R}$

Каждый  $i$ -ый прыжок может быть произведен в интервал длин  $\vec{r}_i \div \vec{r}_i + \Delta\vec{r}_i$  с вероятностью  $\tau(\vec{r}_i)$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \quad (1) \quad W_{N+1}(\vec{R}) = \int \tau_{N+1}(\vec{R} - \vec{R}') W_N(\vec{R}') d^d \vec{R}' \quad (2)$$

$$W(\vec{R}) = \int \dots \int_V \delta(\vec{R} - \sum_{i=1}^N \vec{r}_i) \prod_{i=1}^N \tau(\vec{r}_i) d\vec{r}_i \quad (3)$$



$$W_1(R) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi N \langle r^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{R^2}{2N \langle r^2 \rangle}\right) \quad (4)$$

$$N \langle r^2 \rangle = Dt \quad (5)$$

**Важнейшим требованием для решения является наличие всех моментов закона прыжка**

\*Chandrasekhar S Rev.Mod.Phys. 15 1 (1943).

# 3. Диффузия

## Экспериментальные наблюдения:

- диффузия частичек угольной пыли на поверхности спирта (Я.Ингенхоуц, 1785)
- движения пыльцы в жидкости (Р. Броун, 1827)

## Математические результаты:

- К.Винер предположил, что движение броуновской частицы является следствием ее соударений с молекулами жидкости (1863)
- А.Эйнштейн получил уравнение диффузии

Хаотическое движение молекул жидкости можно представить как случайные блуждания с характерной длиной блуждания  $\Delta$  и временем  $\tau$ . Нас интересует вид функции , которая определяет плотность вероятности того, что частица будет находиться в положении в момент времени при стремлении величин:  
 $\Delta \rightarrow 0 \quad \tau \rightarrow 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = -v \frac{\partial}{\partial x} p(x,t) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x,t)$$

$$D = \lim_{\Delta, \tau \rightarrow 0} \frac{m_2 \Delta^2}{2\tau}$$

$$v = \lim_{\Delta, \tau \rightarrow 0} \frac{m_1 \Delta}{\tau}$$

# 4. Случайные блуждания с непрерывным временем (CTRW)

Данная модель предполагает, что прыжки или блуждания происходят в независимые случайные моменты времени, при этом вероятность того, что следующий прыжок произойдет через промежуток времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  определяется плотностью распределения  $w(t)$

В случае если характерное время между прыжками

$$T = \int_0^{\infty} dt w(t)t$$

конечно, то есть интеграл сходится, можно утверждать, что время, необходимое для совершения  $N$  прыжков, равно  $NT$ . Таким образом, можно заменить в дискретной задаче  $N$  на непрерывное время  $t/T$ .

Условная плотность распределения вероятности нахождения частицы в точке  $x$  в момент времени  $t$  определяется как:

$$\psi(x, t) = \lambda(x)w(t)$$

## 5. Случайные блуждания (случай отсутствия второго и более высоких моментов закона прыжка)

Закон элементарного прыжка, не дающий всех конечных моментов, но обладающий нормировкой:

$$\tau(r_i) = \frac{C_1}{(z^2 + r_i^2)^\beta} \quad C_1 = 2\Gamma(\beta)z^{(2\beta-1)} / \pi^{1/2}\Gamma(\beta - 1/2)$$

$3/2 > \beta > 1/2$ ,  $z$  – характерная длина прыжка

$$W_1(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(KR) \exp[-N(Kz)^{2\beta-1} \frac{\Gamma(3/2 - \beta)}{2^{2\beta-1}\Gamma(\beta + 1/2)}] dK \quad - \text{Распределение Леви}$$

$W_1(R) = W_1(RN^{-1/(2\beta-1)})N^{1/(2\beta-1)}$       Функция  $W_1(R)$  - самоподобна

$$W_1(R \rightarrow \infty) \approx \frac{\Gamma(2\beta) \sin[\frac{\pi}{2}(2\beta - 1)]}{\pi \rho^{2\beta}} \quad \rho = \frac{R}{R_0}, \quad R_0 = \frac{z}{2} \left[ N \frac{\Gamma(3/2 - \beta)}{\Gamma(\beta + 1/2)} \right]^{\frac{1}{2\beta-1}}$$

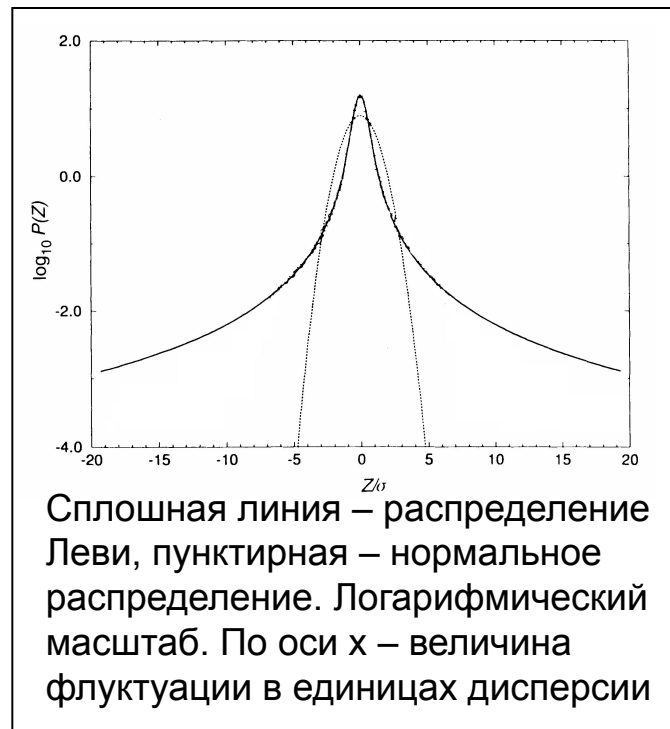
Медленно спадающая асимптотика, значительное количество больших флуктуаций

$$\frac{W_1(R \rightarrow \infty)}{\tau(r \rightarrow \infty)} = \frac{Nr^4}{R^4} \quad \text{Большие флуктуации могут возникать посредством одного прыжка } (R=r \text{ при } N=1)$$

# 6. Распределение Леви

Свойства устойчивого симметричного распределения Леви:

- Форма распределения Леви в явном виде известна только для двух значений  $\alpha$ . При распределении  $\alpha=1$  Коши, а при  $\alpha=2$  - распределение Гаусса.
- Распределение Леви обладает свойством масштабной инвариантности
- Для распределения Леви характерно наличие медленно спадающей асимптотики (тяжелых хвостов)
- Важным свойством распределения Леви является его сходимость к степенному закону для больших значений  $x$ .
- Отсутствует как дисперсия, так и все более высокие моменты распределения.



$$\hat{L}(k) = \exp(-c^\alpha |k|^\alpha), \quad 0 < \alpha < 2$$
$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx) \exp(-c^\alpha |k|^\alpha) dk$$

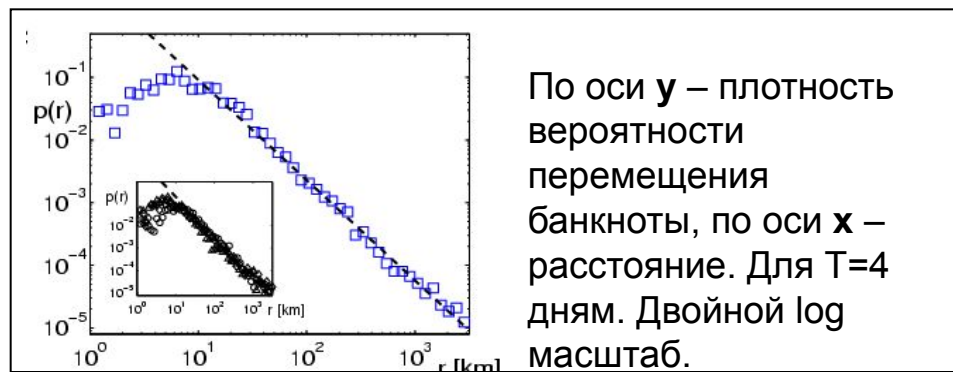
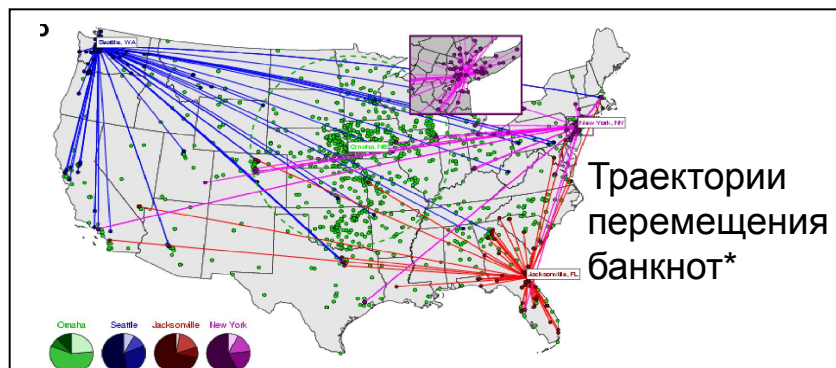
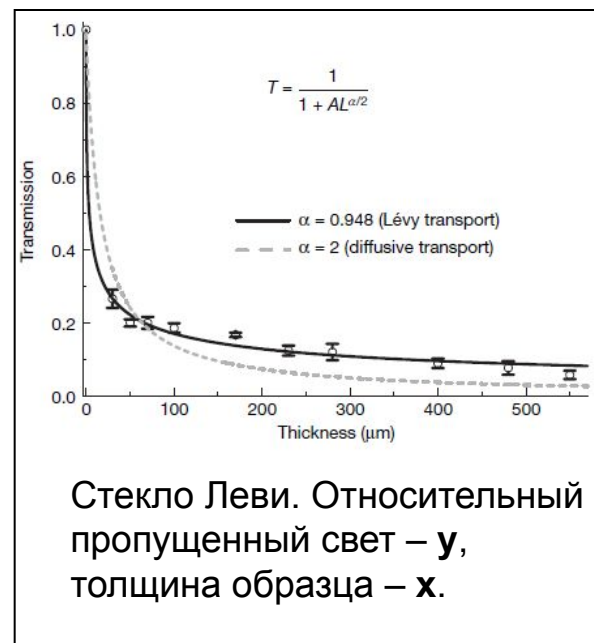
# 7. Распределения Леви в физике и других областях

## Физические примеры аномальной диффузии:

- прохождение света через стекло Леви

## Нефизические примеры аномальной диффузии:

- перемещения альбатросов
- перемещения банкнот в мире



\*D. Brockman, L. Hufnagel, T. Geisel, "The scaling of human travel", Nature 439, 462-465. (2006)



# 8. Случайные блуждания (случай отсутствия моментов закона прыжка выше второго)

Здесь закон прыжка тот же, но  $\beta > 3/2$

В области малых флуктуаций:

$$W_1^G(R) = \sqrt{\frac{\beta - 3/2}{\pi N z^2}} \exp\left(-\frac{\beta - 3/2}{N z^2} R^2\right)$$

При больших флуктуациях впервые получено:

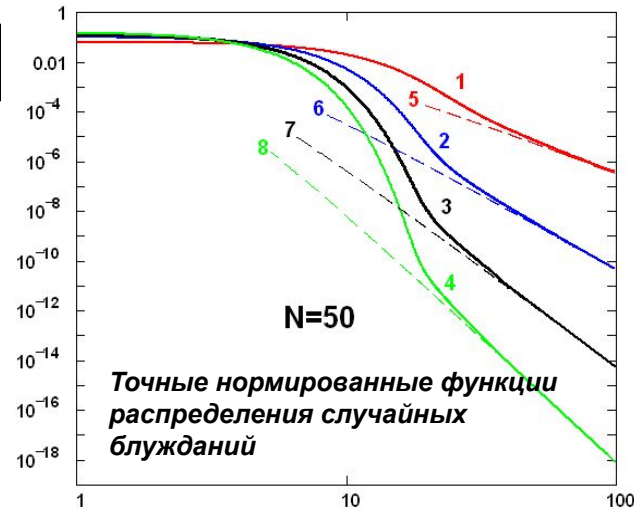
$$W_1(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{2^\beta z^{2\beta-1} N}{\pi(2\beta - 3)R^{2\beta}}$$

Такие случайные блуждания представляют собой «усеченные» блуждания Леви.

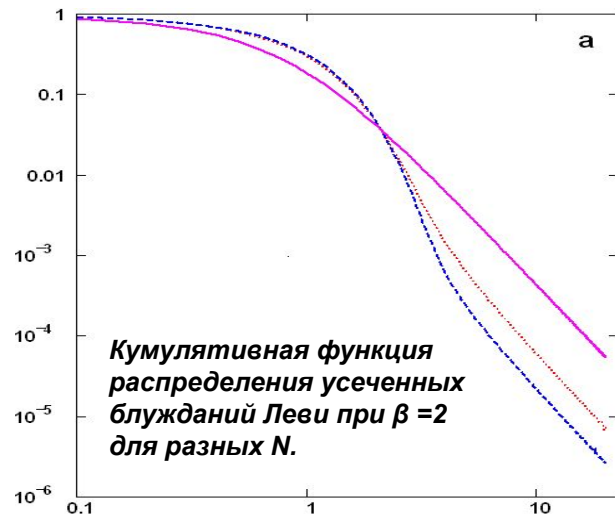
Зависимость СКО от числа прыжков:

$$\langle R^2 \rangle = \frac{N z^2}{2\beta - 3}$$

Для  $\beta=2$  – неотличимо от Гаусса



Для  $\beta=2$  (1),  $\beta=3$  (2),  $\beta=4$  (3),  $\beta=5$  (4) в зависимости от длины блужданий  $R$ , нормированных на  $z$ . Штриховые прямые -асимптотики при больших  $R$ . Двойной логарифмический масштаб.



Сплошная линия:  $N = 1$ , пунктирная линия:  $N = 60$ , точки:  $N = 450$

# 9. Промежуточные выводы

- Введение закона прыжка вида:

$$\tau(r_i) = \frac{C_1}{(z^2 + r_i^2)^\beta}$$

позволяет единым аналитическим образом рассмотреть как обычные блуждания Леви, так и усеченные блуждания Леви.

- Для усеченных блужданий получены аналитические асимптоты, как для области малых флуктуаций, так и для области больших флуктуаций.

$$W_1^G(R) = \sqrt{\frac{\beta - 3/2}{\pi Nz^2}} \exp\left(-\frac{\beta - 3/2}{Nz^2} R^2\right)$$

$$W_1(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{2^\beta z^{2\beta-1} N}{\pi(2\beta - 3)R^{2\beta}}$$

# 10. Эмпирически наблюдаемые негауссовы случайные блуждания

Дискретные временные ряды относительных приращений цен акций

$$S(\Delta t) = \ln \frac{Y(t + \Delta t)}{Y(t)}$$

где  $Y(t)$  – цена акции в момент времени  $t$

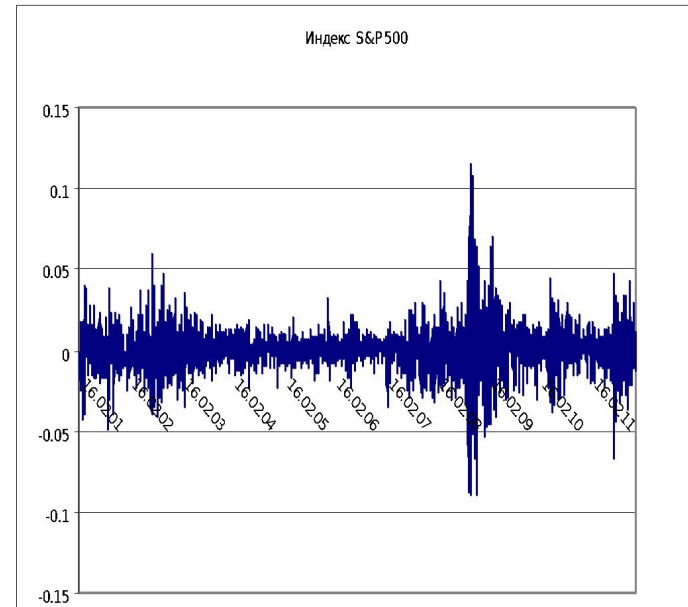
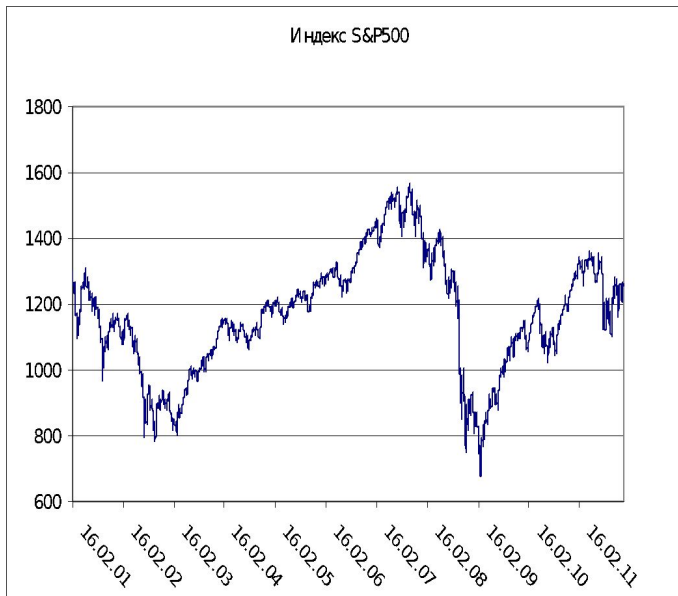


График значений индекса S&P 500 (а), флуктуаций индекса S&P 500 (б) в период с 1.01.2000 по 1.01.2012.

# 11. Статистические характеристики финансовых временных рядов

Дискретные временные ряды относительных приращений цен акций

$$S(\Delta t) = \ln \frac{Y(t + \Delta t)}{Y(t)}$$

где  $Y(t)$  – цена акции в момент времени  $t$

1. Автокорреляционная функция:

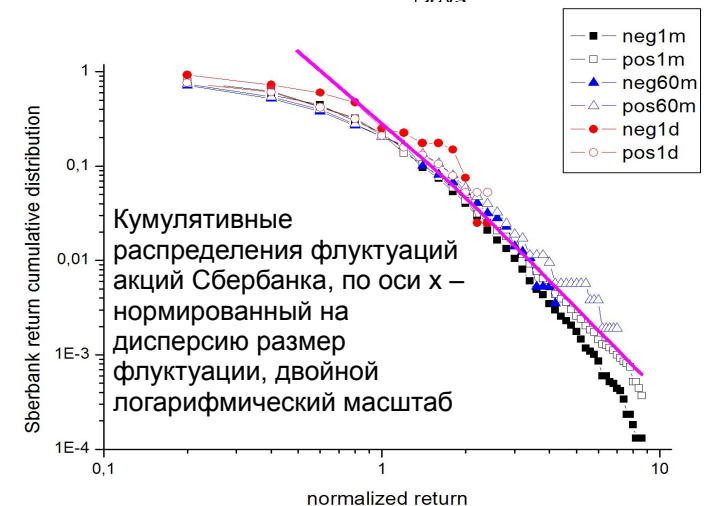
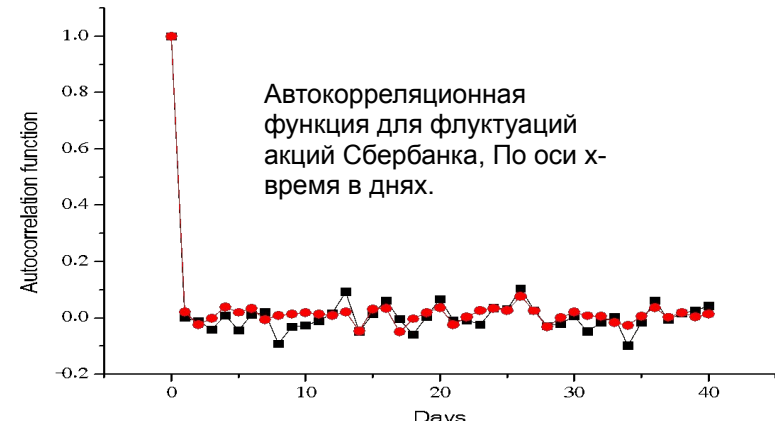
$$B(\Delta t) = \langle S(t)S(t + \Delta t) \rangle \sim \delta(\Delta t)$$

Флуктуации  $S(\Delta t)$  – случайные блуждания

2. Распределения флуктуаций доходностей на фондовом рынке:

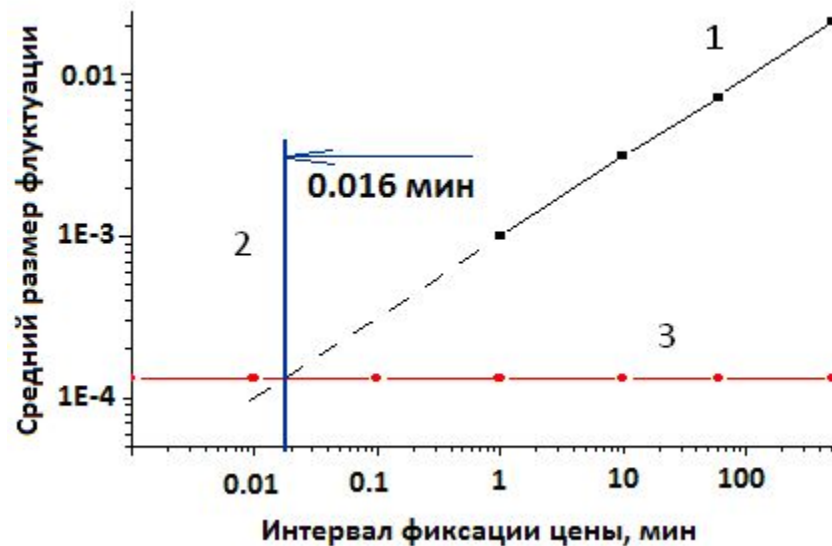
- «толстые хвосты»
- масштабная инвариантность
- степенное усечение хвостов с законом:

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} x^{-3}, & S(\Delta t) > x \\ -x^{-3}, & S(\Delta t) < -x \end{cases}$$



# 12. Определение минимального масштаба процесса

Эмпирические данные позволяют легко определить среднее значение временного интервала между отдельными изменениями цены и собственно характерный масштаб этого изменения. Если тик цены является минимальным масштабом процесса, то эти две величины должны удовлетворять функциональной связи, определяющей зависимость дисперсии от числа прыжков



# 13. Применение модели «усеченных» блужданий Леви для описания рассматриваемой системы

- Характер асимптотики «усеченных» блужданий Леви с законом единичного прыжка  $\tau(r_i) = \frac{\text{при } \beta=2}{(z^2 + r_i^2)^\beta}$  соответствует эмпирическим

распределениям, однако в этом случае имеет место различное поведение распределения для разных значений  $N$ , чего не видно в реальности.

- Попробуем применить схему случайных блужданий с непрерывным временем (CTRW). Данная модель позволяет простым образом перейти от дискретных случайных блужданий к непрерывным. Если ввести функцию плотности распределения прыжков за определенное время  $p(N,t)$ , то наблюдаемая плотность распределения  $W(R,t)$  выражается формулой подчинения:

$$W(R,t) = \int_0^{N \rightarrow \infty} W(N,R)p(N,t)dN$$

Функция распределения временных интервалов спадает с уменьшением  $\Delta t$  как  $(\Delta t)^{4.4}$ . Учет времени между прыжками не позволяет получить новые результаты в силу наличия математического ожидания величины временного интервала.

# 14. Модификация модели

Обнаружено эмпирическое кумулятивное распределение объемов сделок формирующих временной ряд, имеющее хвосты степенного вида с показателем степени  $1.7 > \zeta > 1.5$

Каждое  $z$  в схеме является случайной величиной  $z_i$  пропорциональной кол-ву акций в  $i$ -ой сделке. Мы вводим зависимость функции распределения вероятности единичных флуктуаций  $\tau_i(r_i)$  от другой случайной величины  $z_i$ .  
Функция распределения «усеченных» случайных блужданий Леви при  $\beta=2$ :

$$W_{\beta=2, z_i}(R) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dK \exp(iKR) \prod_{i=1}^N e^{-Kz_i} (1 + Kz_i)$$

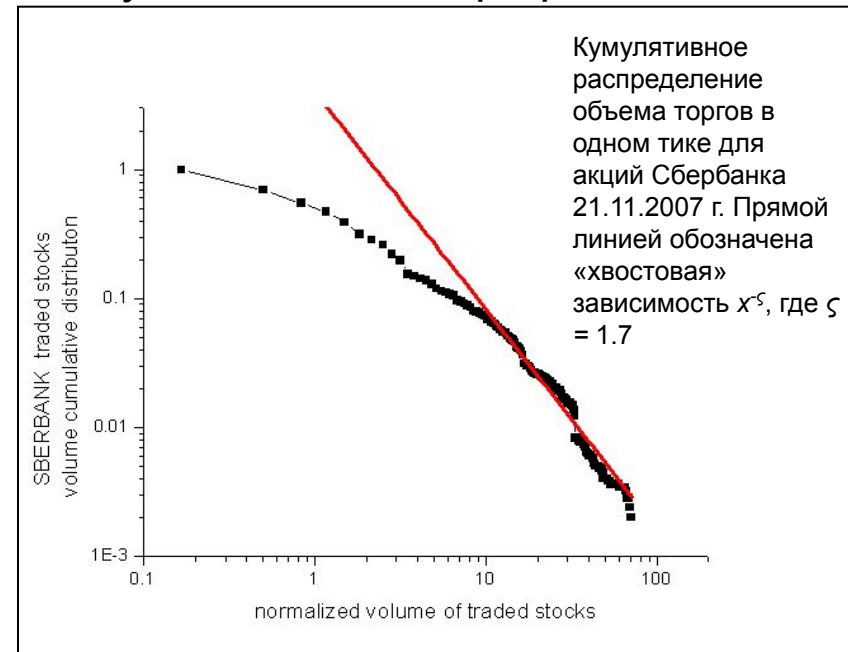
Асимптотика распределения при больших  $R$ :

$$W_{\beta=2, z_i}(R) = \frac{4 \sum z_i^3}{\pi R^4}$$

$\{z_i\}$  имеют функцию распределения  $\sim x^{-\delta}$

$$\delta \sim 2.5 - 2.7$$

Плотность вероятности  $\sum z_i^3 \sim x^{\frac{2}{3} \frac{\delta}{3}}$



# 15. Сравнение результатов модели и эмпирических данных.

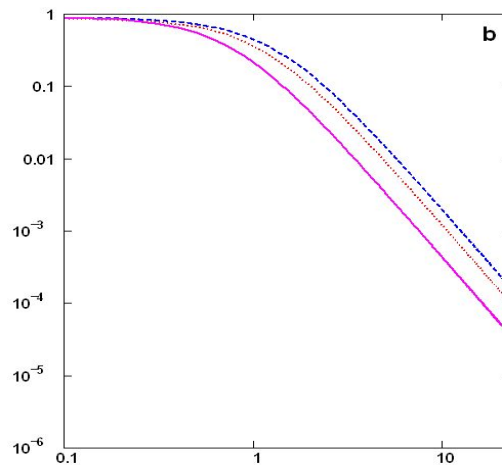
Если перенормировать соответствующее асимптотическое кумулятивное распределение:

$$\Phi_{\beta=2, z_i}(R) \approx \frac{4 \sum z_i^3}{3\pi R^3}$$

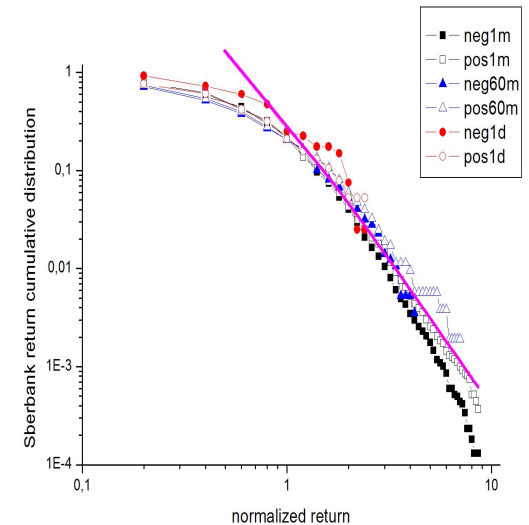
на величину стандартного отклонения:

$$\Phi_{\beta=2, z_i}^{renorm} \left( \frac{R}{\left( \sum z_i^2 \right)^{1/2}} \right) \sim N^{\frac{3}{\delta-1} - \frac{3}{2}}$$

При  $\delta \sim 2.5-2.7$ , получаем зависимости от  $N$  в диапазоне  $N^{0.5} - N^{0.27}$ , то есть слабую зависимость от  $N$ , что и наблюдается для эмпирических данных.



Кумулятивная функция распределения, полученная в модели для  $\beta = 2$  (ось Y), нормированная на ст. отклонение. Сплошная линия:  $N = 1$ , пунктирная линия:  $N = 60$ , точки:  $N = 450$ .



Кумулятивные распределения флуктуаций акций Сбербанка, по оси x – нормированный на ст. отклонение размер флуктуации, двойной логарифмический масштаб



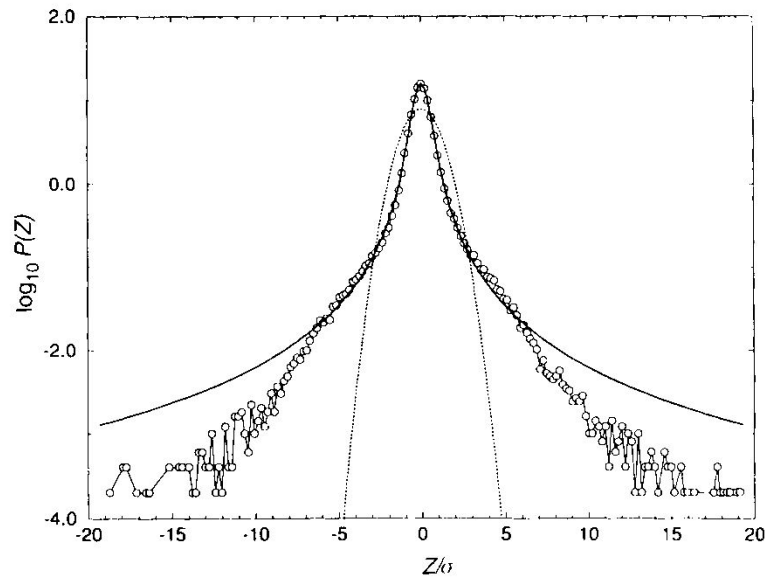
# 16. Выводы

- Введение закона прыжка позволяет единым аналитическим образом рассмотреть как обычные блуждания Леви, так и «усеченные» блуждания Леви.
- Для усеченных блужданий получены аналитические асимптоты и выяснены законы масштабирования.
- Исследована система, в которой наблюдаются негауссовы случайные блуждания, представляющая собой динамику цен акций на российском фондовом рынке.
- Кумулятивные распределения флуктуаций российских акций и индексов обладают скейлингом, а асимптотика при больших флуктуациях описывается законом типа  $1/x^3$ .
- Установлен закон прыжка, удовлетворяющий исследованной системе
- Предложена схема модификации модели, позволяющая получить точный аналитический вид распределения, хорошо описывающий реальные данные.

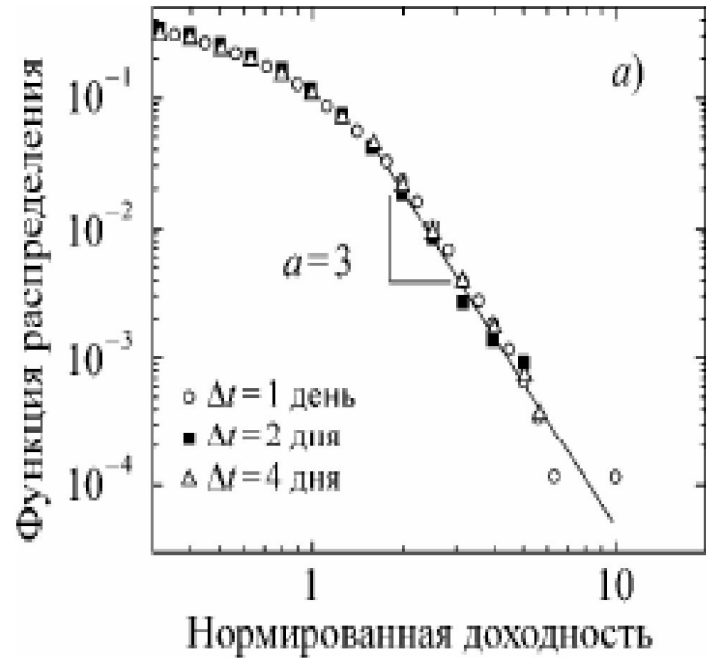
# Публикации

1. Видов П.В., Романовский М.Ю., Доходность активов российского фондового рынка: автокорреляции и распределения, **"Математика. Компьютер. Образование"**, Тезисы XV международной конференции (2008)
2. Видов П.В., Жуков И.А., Романовский М.Ю., Доходность активов российского фондового рынка: автокорреляции и распределения, **"Математика. Компьютер. Образование"**. Сб. трудов XV международной конференции, Ижевск: Научно-издательский центр "Регулярная и хаотическая динамика", (2008). Том 1, 302 стр. Стр. 196-201
3. П.В. Видов, М.Ю. Романовский, Аналитические представления негауссовых законов случайных блужданий, **Труды Института общей физики им. А.М. Прохорова**, Т.65, (2009)
4. P.V.Vidov and M.Yu.Romanovsky. Analytical representation of non-Gaussian laws of random walks, **Physics of wave phenomena**. (2009). V.17, No.3. P.218-228.
5. М.Ю.Романовский, П.В. Видов, В.А. Пыркин, Является ли тик элементарным прыжком в схеме случайных блужданий на фондовом рынке? **Компьютерные исследования и моделирование**, Т.2, № 2, с.219-223, (2010)
6. Видов П.В., Романовский М.Ю., "Неклассические случайные блуждания и феноменология флуктуаций доходности ценных бумаг на фондовом рынке" **УФН**, 181, 774–778 (2011)
7. M.Yu. Romanovsky, P.V. Vidov, Analytical representation of stock and stock-indexes returns: Non-Gaussian random walks with various jump laws, **Physica A**, 390, 21-22 (2011)

**Спасибо за внимание!**



Сравнение экспериментального распределения, полученного для 1-мин приращений индекса S&P500 (кружки) с устойчивым распределением Леви (сплошная линия) и распределением Гаусса (пунктирная линия).



Кумулятивная функция распределения доходностей для индекса S&P500