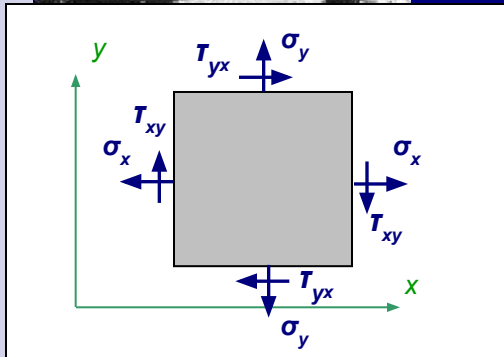


Бондаренко А.Н.

# Курс лекций по сопротивлению материалов

## Часть 1.2



Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в ХаБииЖТе, СГУПСе и МИИТе (1965-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме двух семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional. Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.

Завершение – Esc.

Замечания и предложения можно послать по e-mail: [bond@miit.ru](mailto:bond@miit.ru).

Москва - 2007

# Содержание

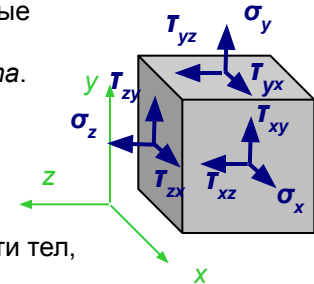
- **Лекция 9.** Краткие сведения о напряженном и деформированном состояниях в точке. Виды напряженных состояний. Анализ плоского напряженного состояния. Напряжения на наклонных площадках.
- **Лекция 10.** Главные напряжения и положения главных площадок. Максимальные касательные напряжения. Понятие о круге Мора для напряжений. Главные деформации.
- **Лекция 11.** Геометрические характеристики поперечных сечений. Статические моменты. Определение координат центра тяжести поперечного сечения. Осевой, центробежный и полярный моменты инерции. Моменты инерции простейших фигур. Зависимость между моментами инерции при параллельном переносе осей.
- **Лекция 12.** Зависимость между моментами инерции при повороте осей. Главные оси и главные моменты инерции. Понятие о радиусе инерции.
- **Лекция 13.** Изгиб балок. Основные допущения. Нормальные напряжения при чистом изгибе. Момент сопротивления при изгибе. Условие прочности по нормальным напряжениям. Понятие рационального сечения при изгибе.
- **Лекция 14.** Вывод формулы касательных напряжений при поперечном изгибе. Распределение касательных напряжений для некоторых типов поперечных сечений. Условие прочности на сдвиг. Понятие центра изгиба.
- **Лекция 15.** Расчеты на прочность по касательным напряжениям и усилиям сдвига. Составные балки (клееные, сварные и заклепочные соединения). Анализ напряженного состояния при изгибе. Изгиб стержня в упруго-пластической стадии.
- **Лекция 16.** Понятие о чистом сдвиге. Закон Гука при сдвиге. Связь между модулями упругости при растяжении и сдвиге. Кручение стержней круглого поперечного сечения. Напряжения и перемещения. Анализ напряженного состояния.
- **Лекция 17.** Статически неопределимые задачи при кручении. Основные результаты теории кручения стержней прямоугольного сечения.

## Рекомендуемая литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов для вузов. М.: Высшая школа. 1995, 2001 г. 560 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов под ред. Александрова А.В., М.: Стройиздат. 1977г. 335 с.
3. Методические указания к выполнению расчетно-графических работ. Изд. МИИТ.
4. Лабораторные работы по сопротивлению материалов (Методические указания под ред. Александрова А.В., часть 1, МИИТ, 1974 г.)

# Лекция 9

- Напряженное состояние в точке** - При анализе напряжений в окрестности рассматриваемой точки выделяется бесконечно малый объемный элемент (параллелепипед со сторонами  $dx, dy, dz$ ), по каждой грани которого действуют, в общем случае, три напряжения, например, для грани, перпендикулярной оси  $x$  (площадка  $x$ ) –  $\sigma_x, T_{xy}, T_{xz}$ . Этот элемент можно по разному ориентировать в пространстве. При поворотах элемента нормальные и касательные напряжения на его наклонных гранях будут принимать новые значения.



Представляет интерес исследовать, как *изменяются эти напряжения от изменения ориентации элемента*. Это позволит найти наклонные площадки, по которым напряжения принимают максимальные и нулевые значения. Рассмотрим эту проблему вначале для более простого случая – *плоского напряженного состояния*.

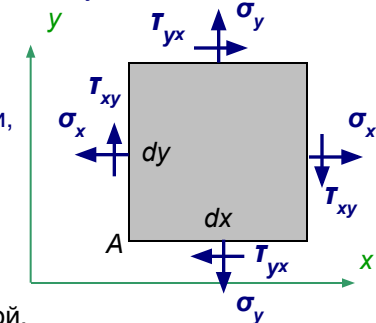
- Плоское напряженное состояние** – такое состояние, при котором две параллельные грани элемента свободны от напряжений, т.е. на них отсутствуют и нормальные и касательные напряжения. Такое напряженное состояние возникает в тонких пластинах, поверхности которых свободны от нагрузок, на незагруженной поверхности тел, при изгибе балок, кручении валов.

Пусть, например, по площадкам  $z$  напряжения отсутствуют:

Ниже будет показано, в этом случае напряжения  $T_{zx}$  и  $T_{zy}$  также должны отсутствовать.

Теперь элемент можно представить в виде его проекции на плоскость  $x, y$ . На рисунке показаны положительные направления напряжений, соответствующие правилам:

- положительные нормальные напряжения направлены *в сторону внешней нормали* соответствующей грани, т.е. они вызывают деформацию *растяжения* элемента.
- положительные касательные напряжения вращают элемент *по часовой стрелке* (при взгляде навстречу оси  $z$ ).



В общем случае, напряжения в деформированном состоянии меняются от точки к точке, т.е. являются функциями координат. Здесь при рассмотрении бесконечно малого элемента можно считать, что напряженное состояние однородное и напряжения по каждой из граней постоянные и на параллельных гранях элемента равны между собой.

Выделенный элемент должен находиться в равновесии и удовлетворять уравнениям равновесия для произвольной плоской системы сил – *равнодействующих по каждой из граней приложенных напряжений*:

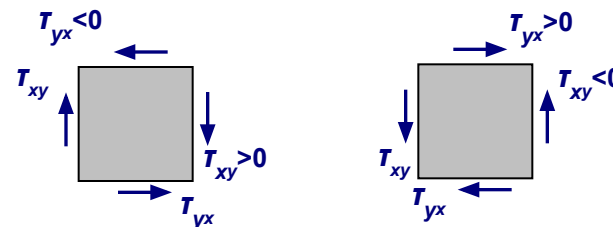
Суммы проекций на координатные оси тождественно равны нулю.

Составим сумму моментов относительно левого нижнего угла:

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad -(\tau_{yx} dx dz) dy - (\tau_{xy} dy dz) dx = 0. \quad \Rightarrow \quad \tau_{yx} = -\tau_{xy}$$

Получен **закон парности касательных напряжений**: Касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках равны друг другу по величине и противоположны по знаку.

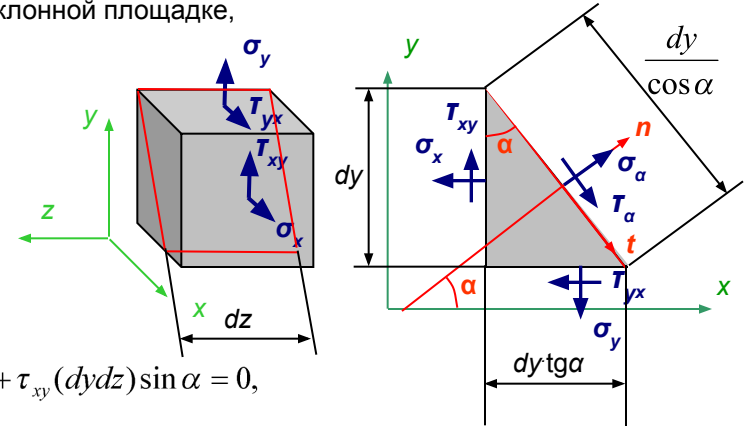
Таким образом, показанные направления касательных напряжений на рисунке, посвященном правилам знаков, не соответствуют равновесному состоянию элемента. Возможные, правильные направления касательных напряжений:



# Лекция 9 (продолжение – 9.2)

■ **Напряжения по наклонным площадкам** - Для определения напряжений по наклонной площадке, внешняя нормаль которой повернута на угол  $\alpha$  от оси  $x$ , используем метод сечений:

1. проведем наклонное сечение,
2. отбросим правую часть,
3. заменим отброшенную часть внутренними усилиями, которые представим в виде компонент напряжений - нормального и касательного (все напряжения показаны положительными),
4. составим уравнения равновесия для равнодействующих напряжений в проекциях на нормаль к наклонному сечению и ось, касательную к сечению:



$$(n): \sigma_{\alpha} \left( \frac{dy}{\cos \alpha} dz \right) - \sigma_x (dydz) \cos \alpha - \sigma_y ((dy \cdot \operatorname{tg} \alpha) dz) \sin \alpha - \tau_{yx} (dy \cdot \operatorname{tg} \alpha dz) \cos \alpha + \tau_{xy} (dydz) \sin \alpha = 0,$$

$$(t): \tau_{\alpha} \left( \frac{dy}{\cos \alpha} dz \right) - \sigma_x (dydz) \sin \alpha + \sigma_y ((dy \cdot \operatorname{tg} \alpha) dz) \cos \alpha - \tau_{yx} (dy \cdot \operatorname{tg} \alpha dz) \sin \alpha - \tau_{xy} (dydz) \cos \alpha = 0.$$

После деления уравнений на  $dydz$ , умножения на  $\cos \alpha$ , подстановки закона парности касательных напряжений и переноса в правую часть получим:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{yx} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\tau_{\alpha} = \sigma_x \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_y \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{yx} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha).$$

Или используя известные тригонометрические формулы двойного угла:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha,$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cos 2\alpha$$

Получены формулы для определения напряжений в любых площадках, проходящих через данную точку, если известны напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$ . Определим, каковы будут напряжения на площадке, перпендикулярной к рассмотренной наклонной площадке:

$$\sigma_{\alpha+90^0} = \sigma_x \cos^2(\alpha + 90^0) + \sigma_y \sin^2(\alpha + 90^0) + \tau_{yx} \sin 2(\alpha + 90^0) = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha.$$

$$\tau_{\alpha+90^0} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2(\alpha + 90^0) - \tau_{yx} \cos 2(\alpha + 90^0) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha$$

Из сравнения выражений для касательных напряжений вновь получаем **закон парности касательных напряжений**:  $\tau_{\alpha+90^0} = -\tau_{\alpha}$ .

Складывая выражения для нормальных напряжений получаем **закон постоянства суммы нормальных напряжений в любых взаимно перпендикулярных площадках**:

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+90^0} = \sigma_x + \sigma_y = \text{const.}$$

Из постоянства суммы нормальных напряжений следует, что при повороте этих площадок приращение (изменение) нормальных напряжений равны и противоположны по знаку:

$$d\sigma_{\alpha} + d\sigma_{\alpha+90^0} = 0; \quad d\sigma_{\alpha} = -d\sigma_{\alpha+90^0}.$$

Соответственно, если на одной из площадок нормальные напряжения достигают максимума, то на второй площадке они приходят к минимуму.

# Лекция 10

- Главные напряжения** - При расчете конструкций на прочность необходимо определить величину максимальных напряжений. **Максимальные и минимальные нормальные напряжения называются главными напряжениями**, а площадки, по которым они действуют – **главными площадками**.

Для определения положения главных площадок достаточно положить нулю первую производную нормальных напряжений по углу наклона:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha \implies \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} = \sigma_x (-2 \cos \alpha) \sin \alpha + \sigma_y 2 \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{yx} 2 \cos 2\alpha = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + 2\tau_{yx} \cos 2\alpha = 0.$$

$\implies \boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}}$ . Поскольку тангенс имеет одинаковые значения для углов, отличающихся друг от друга на  $180^\circ$ , полученное выражение определяет две площадки, отличающиеся друг от друга на  $90^\circ$ . Таким образом, обе главные площадки взаимно перпендикулярны.

Заметим, что производная нормальных напряжений в наклонной площадке по углу наклона оказывается равной удвоенной величине касательных напряжений по этой площадке:  $\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + 2\tau_{yx} \cos 2\alpha = -2\tau_\alpha$ .

Таким образом, **на главных площадках касательные напряжения обращаются в нуль**.

Для определения величины максимальных и минимальных нормальных напряжений надо найти значения угла через  $\operatorname{arctg}(\dots)$  и подставить в исходное выражение для нормальных напряжений, но проще непосредственно использовать следующие тригонометрические формулы:

$$\sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)^2}} = \frac{2\tau_{yx}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}} \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)^2}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}}$$

Подстановка этих тригонометрических функций в формулу нормальных напряжений дает для одной из главных площадок:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \left( \frac{1}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}} \right) + \sigma_y \left( \frac{1}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}} \right) + \tau_{yx} \frac{2\tau_{yx}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}} =$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left( \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}} \right) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}.$$

Поскольку угол для другой главной площадки отличается от первой на  $90^\circ$ , то синус и косинус двойного угла изменят знак на противоположный, что приведет к изменению знака второго слагаемого:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}.$$

Таким образом, по двум главным площадкам действуют главные напряжения:

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}}$$

$$\boxed{\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}}$$

# Лекция 10 (продолжение – 10.2)

- Максимальные касательные напряжения** - Существуют площадки, в которых касательные напряжения достигают максимальных значений. Для определения их положения достаточно положить нулю первую производную касательных напряжений по углу наклона:

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cos 2\alpha \implies \frac{\partial \tau_{\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2 \cos 2\alpha + \tau_{yx} 2 \sin 2\alpha = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + 2\tau_{yx} \sin 2\alpha = 0 \implies \boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{yx}}}$$

Поскольку тангенс имеет одинаковые значения для углов, отличающихся друг от друга на  $180^{\circ}$ , полученное выражение определяет две площадки, отличающиеся друг от друга на  $90^{\circ}$ . Таким образом, обе площадки взаимно перпендикулярны. Хотя в этих площадках в общем случае нормальные напряжения не обращаются в ноль, площадки, в которых касательные напряжения максимальные, называют *площадками сдвига*.

Определим *угол между площадкой сдвига и главной площадкой*.

Сравним формулы для углов наклона главных площадок и площадок сдвига:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Поскольку правые части обратные друг другу, то

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} \implies \operatorname{ctg}(90^{\circ} - 2\alpha_1) = -\operatorname{ctg} 2\alpha \implies 90^{\circ} - 2\alpha_1 = -2\alpha \implies \boxed{\alpha_1 = \alpha + 45^{\circ}}$$

Таким образом, **площадки сдвига повернуты относительно главных площадок на угол  $45^{\circ}$** .

Для определения величины максимальных касательных напряжений надо найти значения угла через  $\operatorname{arctg}(\dots)$  и подставить в исходное выражение для касательных напряжений, но проще *принять в качестве исходного состояния главные площадки* и перейти к площадкам сдвига:

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cos 2\alpha = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \sin(2 \cdot 45^{\circ}) - 0 \cdot \cos(2 \cdot 45^{\circ}) = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

При подстановке угла  $135^{\circ}$  или  $-45^{\circ}$  (вторая площадка сдвига) получим тот же результат, но с обратным знаком. Таким образом, вновь соблюдается закон парности касательных и в общем случае можно записать:

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

Подставим выражения для главных напряжений:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}$$

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}$$

- Понятие о круге Мора для напряжений** - Существуют графический способ определения положений главных площадок и напряжений, а также напряжений по любым другим площадкам. Способ основан на том, что зависимость между нормальными и касательными напряжениями описывается уравнением II порядка, а именно уравнением *окружности*:

Итак, получили уравнение II порядка

$$\left( \sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{yx}^2$$

Сравните его с уравнением окружности:

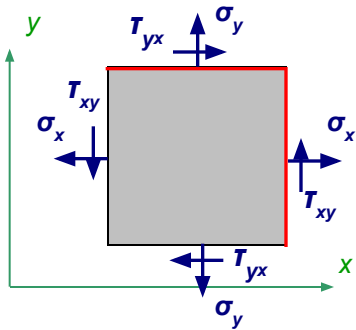
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \sigma_x \frac{1 + \cos \alpha}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos \alpha}{2} + \tau_{yx} \sin 2\alpha \implies \sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha \\ \left( \sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{\alpha}^2 &= \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 (\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha) + \tau_{yx}^2 (\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) + \\ &+ 2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \tau_{yx} (\sin 2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

# Лекция 10 (продолжение – 10.3)

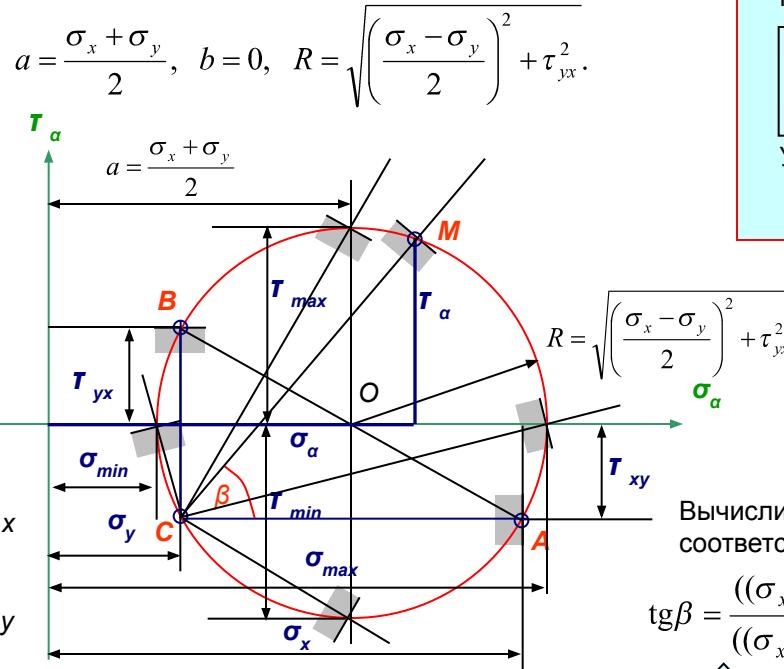
- Построение круга Мора и его использование** - Из сравнения уравнений координаты центра круга Мора и радиус равны:

Построим круг Мора для напряженного состояния:



Напряженное состояние по площадке  $x$  характеризуется точкой  $A$  на круге напряжений.

Напряженное состояние по площадке  $y$  характеризуется точкой  $B$  на круге напряжений.



Уравнение связи нормальных и касательных напряжений:

$$\left( \sigma_\alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{yx}^2.$$

Уравнение окружности:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Точка пересечения направлений площадок с окружностью (точка  $C$ ) называется **полюсом** для данного исходного состояния, и определяет направление любой наклонной площадки, напряженное состояние в которой изображается точкой круга Мора, например, точкой  $M$ :

Вычислим тангенс угла наклона площадки, соответствующей точке  $M$ , к площадке  $x$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{((\sigma_x - \sigma_y) \cos \alpha - 2\tau_{yx} \sin \alpha) \sin \alpha}{((\sigma_x - \sigma_y) \cos \alpha - 2\tau_{yx} \sin \alpha) \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Таким образом, **прямая  $CM$ , соединяющая изображающую точку  $M$  с полюсом  $C$ , показывает направление наклонной площадки, по которой действуют напряжения  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ .**

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_\alpha - \tau_{xy}}{\sigma_\alpha - \sigma_y} = \frac{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right) - \tau_{xy}}{(\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha) - \sigma_y}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} (\cos 2\alpha - 1)}{\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y (\sin^2 \alpha - 1) - \tau_{yx} \sin 2\alpha}$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cos 2\alpha$$

$$\tau_{yx} = -\tau_{xy}$$

**С помощью круга Мора легко определяются главные напряжения и направления главных площадок, экстремальные касательные напряжения и направления площадок сдвига.**

## ◀ ◀ Лекция 10 (продолжение – 10.4) ▶ ▶

- Главные деформации** - Подобно тому, как определялись напряжения на наклонных площадках, могут быть определены деформации. Выражения деформаций в новой системе координат, повернутой относительно начальной на некоторый угол, аналогичны выражениям для напряжений. Достаточно подставить вместо нормальных напряжений линейные деформации, а вместо касательных напряжений – половины углов сдвига:

$$\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \gamma_{yx} \sin 2\alpha,$$

$$\gamma_{\alpha} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \gamma_{yx} \cos 2\alpha.$$

Так же, как и для напряжений, существуют такие площадки, для которых отсутствуют углы сдвига, а линейные деформации принимают максимальные значения. Эти площадки и линейные деформации называются **главными**. Для их определения используются формулы, аналогичные полученным для напряжений:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{yx}^2}.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\gamma_{yx}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}.$$

**С помощью круга Мора, построенного для деформаций легко определяются главные деформации и направления главных площадок.**



Лучше не пользоваться таким шнуром. Думай, студент.



# Лекция 11

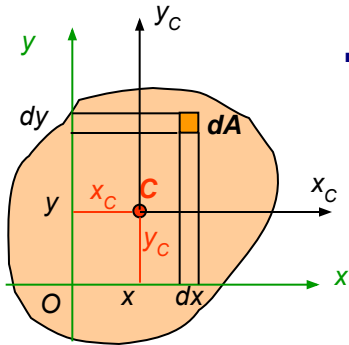
- **Геометрические характеристики поперечных сечений** - Величина нормальных напряжений в поперечном сечении растянутого (сжатого) стержня зависит от площади этого сечения. Таким образом, **площадь поперечного сечения является геометрической характеристикой, определяющей напряжение при растяжении (сжатии)**. В случае других видов напряженно-деформируемого состояния (изгиб, кручение) напряжения зависят не от площади, а от некоторых *других* геометрических характеристик поперечного сечения.
- Иерархия геометрических характеристик устанавливается видом подинтегрального выражения и представляется следующей:
- **Площадь поперечного сечения:**

$$A = \int_A dA$$

$$S_x = \int_A y dA;$$

$$S_y = \int_A x dA.$$

$$x_C = \frac{S_y}{A}; \quad y_C = \frac{S_x}{A}.$$



- **Статические моменты площади поперечного сечения:**

**Статические моменты используются при определении положения центра тяжести:**

**Определение координат центра тяжести.** Методы определения положения центра тяжести плоских фигур рассматривались в курсе теоретической механики, например, метод разбиения:

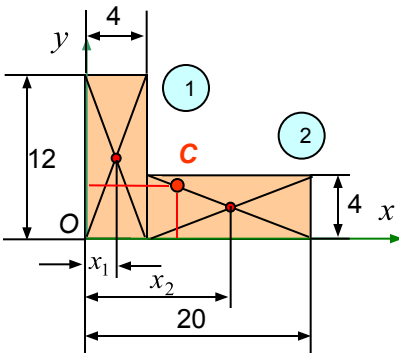
$$x_C = \frac{\sum S_{yi}}{\sum A_i} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}; \quad y_C = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}.$$

Здесь  $x_i, y_i$  – координаты центров тяжести простых фигур, для которых они известны или легко находятся. Напомним процедуру определения положения центра тяжести:

1. выбрать произвольную (начальную) систему координат  $x, y$ ;
2. разбить заданную фигуру на более простые фигуры.
3. вычислить статические моменты и использовать формулы координат центра тяжести.

**Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются центральными.** Можно показать, что относительно центральных осей статические моменты обращаются в ноль.

**Пример 1** – Определить положение центра тяжести уголкового поперечного сечения.



1. Выбираем систему координат  $x, y$  с началом в нижнем левом углу сечения.

2. Разбиваем фигуру на два прямоугольника, вычисляем площади и координаты центров тяжести каждого:

$$A_1 = 4 \cdot 12 = 48; \quad x_1 = 2; \quad y_1 = 6;$$

$$A_2 = (20 - 4) \cdot 4 = 64; \quad x_2 = \frac{20 - 4}{2} + 4 = 12; \quad y_2 = 2;$$

3. Вычисляем статические моменты и координаты центра тяжести всего сечения:

$$S_{x1} = y_1 A_1 = 6 \cdot 48 = 288; \quad S_{y1} = x_1 A_1 = 2 \cdot 48 = 96;$$

$$S_{x2} = y_2 A_2 = 2 \cdot 64 = 128; \quad S_{y2} = x_2 A_2 = 12 \cdot 64 = 768;$$

$$x_C = \frac{\sum S_{yi}}{\sum A_i} = \frac{S_{y1} + S_{y2}}{A_1 + A_2} = \frac{96 + 768}{48 + 64} = \frac{864}{112} = 7,71.$$

$$y_C = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{S_{x1} + S_{x2}}{A_1 + A_2} = \frac{288 + 128}{48 + 64} = \frac{416}{112} = 3,71.$$

# Лекция 11 (продолжение – 11.2)

## Моменты инерции площади поперечного сечения:

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA.$$

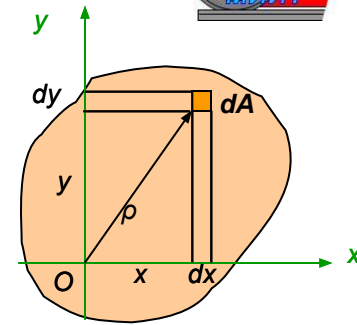
- осевые моменты инерции площади,

$$I_{xy} = \int_A xy dA,$$

- центробежный момент инерции площади.

$$I_\rho = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A \rho^2 dA.$$

- полярный момент инерции площади.



## Моменты инерции площади используются при определении напряжений при изгибе и кручении.

Можно показать, что **центробежный** момент инерции относительно осей, одна из которых совпадает с осью **симметрии**, равен нулю. В самом деле, в этом случае элементарной площадке  $dA$  с координатами  $x, y$  всегда будет соответствовать такая же площадка координатами  $-x, y$  или  $x, -y$ . Суммирование (интегрирование) произведений  $xy dA$  даст нуль. Далее будет показано, что для любой, в том числе несимметричной, фигуры можно найти такое положение осей, при котором центробежный момент обращается в нуль.

**Полярный** момент инерции не зависит ориентации координатных осей  $x, y$

и всегда равен сумме осевых моментов инерции:  $I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x.$

## Моменты инерции площади простейших сечений:

### ■ Прямоугольник

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = b \int_0^h y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}.$$

Известно, что центр тяжести прямоугольника находится на пересечении осей симметрии ( $x_C = b/2, y_C = h/2$ ). Для вычисления моментов инерции относительно центральных осей достаточно считать, что координата  $y$  измеряется от центральной оси  $x_C$  и изменить пределы интегрирования:

$$I_{x_C} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогично получим для других осей:

$$I_y = \frac{hb^3}{3}, \quad I_{y_C} = \frac{hb^3}{12}.$$

Центробежный момент инерции (по симметрии):  $I_{xy} = 0.$

Полярный момент инерции:

$$I_\rho = I_{x_C} + I_{y_C} = \frac{bh^3}{12} + \frac{b^3h}{12} = \frac{bh(h^2 + b^2)}{12}.$$

### ■ Треугольник

Элементарная площадка имеет переменную ширину и зависит от ее координаты по оси  $y$ :

$$\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}; \quad b_y = \frac{h-y}{h} b;$$

$$dA = b_y dy = \frac{h-y}{h} b dy.$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{h-y}{h} b dy =$$

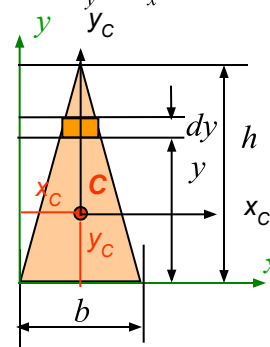
$$= \frac{b}{h} \int_0^h (hy^2 - y^3) dy = \frac{b}{h} \left( h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{bh^3}{12}.$$

Момент инерции относительно центральной оси  $x_C$ :

$$I_{x_C} = \frac{b}{h} \int_{-h/3}^{2h/3} (hy^2 - y^3) dy = \frac{b}{h} \left( h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{-h/3}^{2h/3} = \frac{bh^3}{36}.$$

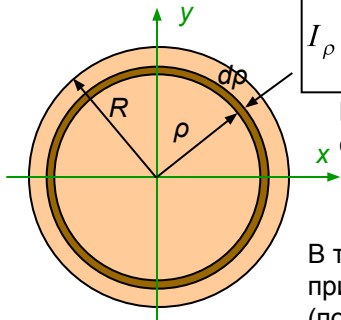
Момент инерции относительно центральной оси  $y_C$ :

$$I_{y_C} = 2I_{y_C(b/2)} = 2 \frac{h(b/2)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}.$$



# Лекция 11 (продолжение – 11.3)

- Круглое сечение:** Вычислим вначале полярный момент инерции:



$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^R \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

Моменты инерции относительно центральных осей с учетом симметрии:

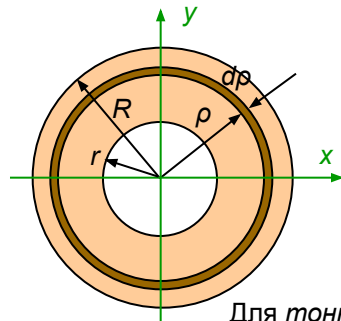
$$I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

В технике часто используют приближенные значения (погрешность менее 2%):

$$I_\rho \approx 0,1d^4$$

$$I_x = I_y \approx 0,05d^4$$

- Кольцевое сечение:** Достаточно изменить пределы интегрирования:



$$I_\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_r^R = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

Моменты инерции относительно центральных осей с учетом симметрии:

$$I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$

Для тонкостенного кольца ( $t < 0,075R$ ) можно приближенно считать, что  $\rho = R_{cp} = \text{const}$  по его толщине и  $A = 2\pi R_{cp} t$ :

$$I_\rho = \rho^2 \int_A dA = R_{cp}^2 2\pi R_{cp} t = 2\pi R_{cp}^3 t = \frac{\pi D_{cp}^3 t}{4}$$

$$I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \pi R_{cp}^3 t = \frac{\pi D_{cp}^3 t}{8}$$

В технике иногда используют приближенные значения в виде:

$$I_\rho \approx 0,8D_{cp}^3 t$$

$$I_x = I_y \approx 0,4D_{cp}^3 t$$

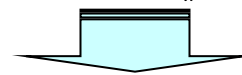
- Моменты инерции площади составных сечений**

- вычисляются, так же как и при вычислении координат центра тяжести, методом разбиения на простые фигуры, для которых известны или легко вычисляются координаты центров тяжести и моменты инерции.

Например, момент инерции кольцевого сечения может быть вычислен как разность моментов инерции круглого сплошного сечения радиуса  $R$  и такого же сечения, но радиуса  $r$ . Заметим, что при сложении моментов инерции по каждой из координатных осей для каждой из фигур моменты инерции должны вычисляться относительно осей, являющихся общими для рассматриваемого сечения и всех составляющих фигур. Отсюда следует необходимость располагать формулами, позволяющими переходить от одних осей к другим.

- Зависимость между моментами инерции при параллельном переносе осей**

$$I_{x1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA$$



$$I_{x1} = I_x + 2aS_x + a^2 A$$

Аналогично для оси  $y_1$ :

$$I_{y1} = I_y + 2aS_y + b^2 A$$

$$I_{x1y1} = \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (y+a)(x+b) dA$$

$$I_{x1y1} = I_{xy} + aS_y + bS_x + abA$$

Формулы упрощаются, если исходные оси являются *центрными*, т.к.  $S_{xc} = S_{yc} = 0$ :

$$I_{x1} = I_{xc} + a^2 A$$

$$I_{y1} = I_{yc} + b^2 A$$

$$I_{x1y1} = I_{xcyc} + abA$$

# Лекция 12

## Зависимость между моментами инерции при повороте осей

Координаты элементарной площадки  $dA$  в системе координат  $u, v$  выражаются через исходные координаты  $x, y$  линейными зависимостями:

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad v = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Осевые моменты инерции относительно осей  $u$  и  $v$ :

$$I_u = \int v^2 dA = \int (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \int y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int xy dA + \sin^2 \alpha \int x^2 dA.$$

$$I_v = \int u^2 dA = \int (y \sin \alpha + x \cos \alpha)^2 dA = \sin^2 \alpha \int y^2 dA + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int xy dA + \cos^2 \alpha \int x^2 dA.$$

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha.$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha.$$

$$I_u + I_v = I_x + I_y.$$

$$I_x + I_y = \text{const} = \text{invar}$$

**Центробежный момент инерции относительно осей  $u$  и  $v$ :**

$$I_{uv} = \int uv dA = \int (y \sin \alpha + x \cos \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA = \sin \alpha \cos \alpha (\int y^2 dA - \int x^2 dA) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int xy dA.$$

Сумма осевых моментов инерции относительно двух перпендикулярных осей не зависит от угла  $\alpha$  и при повороте осей сохраняет постоянное значение.

## Главные оси и главные моменты инерции

– Полученные зависимости показывают, что при изменении угла поворота осей значения моментов инерции изменяются, при этом сумма осевых моментов инерции остается постоянной.

Это означает, что можно определить такое положение осей, при котором один из осевых моментов достигает максимального значения, а другой – соответственно минимального значения:

**Максимальные и минимальные осевые моменты инерции называются главными моментами инерции**, а оси, относительно которых они вычисляются, – **главными осями**.

Для определения положения главных осей достаточно положить нулю первую производную осевого момента инерции по углу поворота:

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \implies \frac{\partial I_u}{\partial \alpha} = I_x (-2 \cos \alpha) \sin \alpha + I_y 2 \sin \alpha \cos \alpha - I_{xy} 2 \cos 2\alpha = -(I_x - I_y) \sin 2\alpha - 2I_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

Полученный результат показывает, что для искомого положения осей **центробежный момент обращается в нуль**.

Отсюда же следует:

Поскольку тангенс имеет одинаковые значения для углов, отличающихся друг от друга на  $180^\circ$ , полученное выражение определяет два положения осей, отличающиеся друг от друга на  $90^\circ$ . Таким образом, **обе главные оси взаимно перпендикулярны**.

$$\text{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

# Лекция 12 (продолжение – 12.1)

Для определения величины максимальных и минимальных моментов инерции (главных моментов инерции) надо найти значения угла через  $\arctg(\dots)$  и подставить в исходное выражение для осевых моментов инерции, или непосредственно использовать тригонометрические формулы двойных углов, как это было сделано, например, при определении главных напряжений (лекция 10). Здесь попробуем чуть иначе.

Представим осевой момент в виде:

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \frac{1}{\cos 2\alpha} \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} \cdot \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

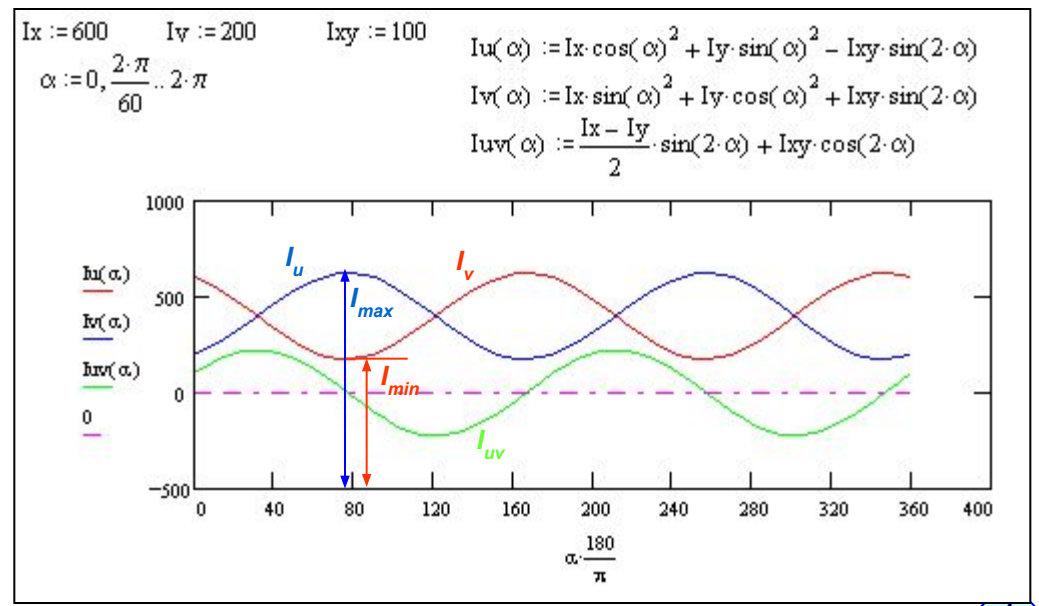
$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

Подставляя последнее выражение и сокращая разность моментов инерции получаем окончательно:

Знак плюс перед вторым слагаемым относится к максимальному моменту, знак минус – к минимальному.

**Замечание.** Полученные формулы для моментов инерции, связанные с поворотом осей, а также для главных моментов инерции, практически аналогичны по структуре соответствующим формулам для нормальных и касательных напряжений по наклонным площадкам и для главных напряжений. Отсюда можно заключить, что положения осей, соответствующих экстремальным значениям моментов инерции и сами значения можно находить с помощью круга Мора, построенного для моментов инерции.

Здесь же проиллюстрируем характер изменения моментов инерции при последовательном повороте осей в диапазоне  $0 - 2\pi$  (графики построены в системе MathCAD): Хорошо видно, что при достижении осевыми моментами инерции максимальных и минимальных значений центробежный момент инерции обращается в ноль. А при достижении центробежным моментом инерции максимального значения (при повороте от главных осей на  $45^\circ$ ) осевые моменты становятся равными между собой.



# Лекция 12 (продолжение – 12.2)

- **Радиус инерции** – есть величина, связывающая момент инерции с площадью поперечного сечения и определяемая из равенств: Радиус инерции представляет собой расстояние от рассматриваемой оси до той точки, в которой условно можно сосредоточить всю площадь поперечного сечения. Эта величина характеризует насколько хорошо “развито” сечение, как далеко отстоят от оси отдельные области сечения, что в свою очередь характеризует экономичность сечения при изгибе и сжатии с изгибом.

$$I_x = i_x^2 A.$$

$$I_y = i_y^2 A.$$

Радиусом инерции удобно пользоваться при оценке гибкости сжатых стержней.

Конечно для этого радиусы инерции предварительно вычисляются для типовых и прокатных сечений по формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}.$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.$$

Радиусы инерции, соответствующие главным осям, называются **главными радиусами инерции** и определяются по формулам:

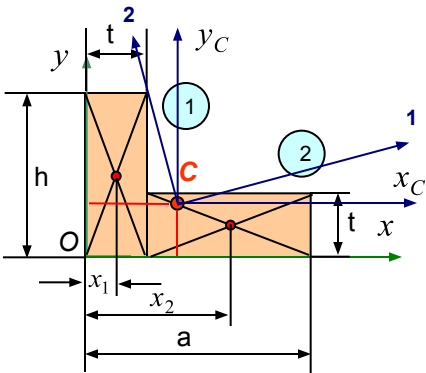
$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}}.$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}.$$

■ **Вычисление моментов инерции сложных фигур** – выполняется в следующем порядке:

1. Сечение разбивается на части, для которых известны координаты центров тяжести и моменты инерции или легко находятся.
2. Выбираются начальные оси, относительно которых вычисляются координаты центра тяжести сечения.
3. Вычисляются координаты центра тяжести сечения.
4. Проводятся центральные оси (проходящие через центр тяжести сечения), относительно которых вычисляются моменты инерции.
5. Вычисляются осевые и центробежные моменты инерции сечения относительно центральных осей.
6. Вычисляются главные центральные моменты и определяется положение главных осей.

**Пример 1** – Определить главные центральные моменты и положение главных осей уголкового поперечного сечения. Пример дается в виде документа в среде MathCAD. Его можно использовать для любого другого составного сечения.



```

a:=20  h:=12  t:=4  n:=2 - количество фигур разбиения  i:=1..n  ORIGIN :=1
Координатные оси:
x = ( 2
      12 )
Моменты инерции:
Ix1 :=  Iy1 :=  Ixy1 :=
Моменты инерции сечения:
I_max := (Ix_C + Iy_C) / 2 + 1/2 * sqrt((Ix_C - Iy_C)^2 + 4*Ixy_C)  I_min := (Ix_C + Iy_C) / 2 - 1/2 * sqrt((Ix_C - Iy_C)^2 + 4*Ixy_C)
I_max = 3.403 * 10^3  I_min = 1.869 * 10^3
Положение главных осей:
tg2*alpha := -2*Ixy_C / (Ix_C - Iy_C)  tg2*alpha = 1.429  alpha2 := atan(tg2*alpha) * 180 / pi  alpha2 = 55.008
alpha := alpha2 / 2  alpha = 27.504
Проверка:
Ix_C + Iy_C = 5.272 * 10^3  I_max + I_min = 5.272 * 10^3
I_uv := (Ix_C - Iy_C) / 2 * sin(alpha2 * pi / 180) + Ixy_C * cos(alpha2 * pi / 180)  I_uv = 1.137 * 10^-13
    
```

# Лекция 13

## Изгиб балок. Основные допущения:

1. **Продольные волокна стержня** (параллельные его оси) **испытывают лишь деформации растяжения-сжатия** и не оказывают давления друг на друга (гипотеза об отсутствии сдавливания продольных волокон).
2. Каждое **поперечное сечение стержня, плоское до деформаций, остается плоским** и нормальным к деформированной оси стержня после деформации (гипотеза плоских сечений).

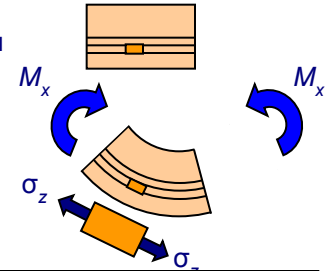
Первая гипотеза пренебрегает влиянием нормальных напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  на продольную деформацию элемента, вторая – деформациями сдвига. Обе гипотезы подтверждаются экспериментально на основной части длины стержня. В общем случае балка может испытывать изгиб под действием изгибающих моментов относительно осей  $x$  и  $y$ .

Если один из них равен нулю, а другая – постоянна, то балка испытывает изгиб в одной плоскости. Если и одну из главных центральных осей стержня, то это означает *отсутствие поперечных сил*.

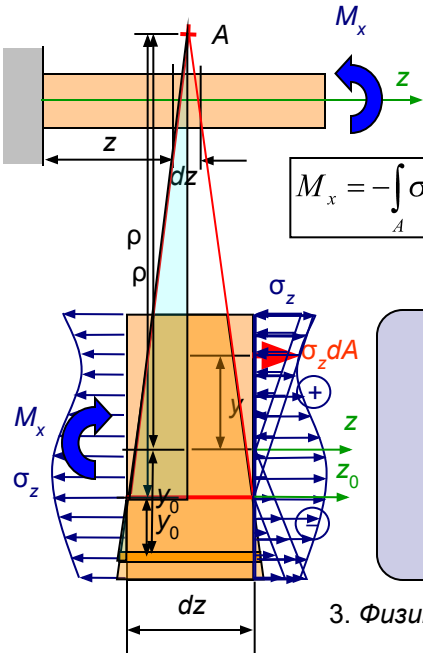
■ **Нормальные напряжения при изгибе** – неопределимой, для решения которой требуется дополнительное уравнение.

Подставим напряжение в выражение для изгибающего момента ( $y_0 \equiv y$ ):

$$M_x = - \int_A \left( -E \frac{y_0}{\rho} \right) y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_x \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \Rightarrow \sigma = - \frac{M_x}{I_x} y.$$



1. **Статика:** Выделим малый элемент двумя нормальными к оси бруса сечениями и заменим действие отброшенных частей нормальными напряжениями. Под их действием элемент находится в равновесии. Ранее *приведением распределенных сил к центру и центральным осям* было получены интегральные соотношения, связывающие нормальное усилие и изгибающий момент с нормальными напряжениями:



$$M_x = - \int_A \sigma_z y dA.$$

**Замечание:** Знак минус учитывает правило знаков для изгибающего момента и напряжений.

$$N = \int_A \sigma_z dA;$$

Так как нормальное усилие при изгибе равно нулю, то:

$$\int_A \sigma_z dA = 0.$$

Последнее указывает на то, что в сечении возникают напряжения разного знака и следует предполагать, что существуют волокна, в которых напряжения равны нулю (нейтральная ось).

Из этих соотношений найти напряжения и положение нейтральной оси пока нельзя, поскольку закон изменения напряжений по высоте сечения неизвестен.

2. **Геометрия:** Согласно гипотезе плоских сечений, продольные волокна испытывают деформации растяжения-сжатия, пропорциональные расстоянию от нейтральной оси. Нейтральная ось, как и центральная ось стержня, *изгибается* и имеет радиус кривизны  $\rho$  (т. А – центр кривизны).

Абсолютное удлинение волокна, находящегося на произвольном расстоянии от нейтральной оси, из подобия треугольников равно:

$$\Delta dz = 2 \frac{dz}{2} \frac{|y_0|}{\rho} = - \frac{y_0}{\rho} dz \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = - \frac{y_0}{\rho}.$$

3. **Физика:** По закону Гука:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z \Rightarrow \sigma_z = -E \frac{y_0}{\rho}.$$

Таким образом, нормальное напряжение линейно зависит от расстояния до нейтральной оси. При  $y_0 > 0$  – сжатие.

Подставим напряжение в выражение для нормальной силы:

$$- \int_A E \frac{y_0}{\rho} dA = - \frac{E}{\rho} \int_A y_0 dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой статический момент площади и равенство его нулю означает, что **нейтральная ось проходит через центр тяжести**.

# Лекция 13 (продолжение – 13.2)

- Момент сопротивления при изгибе** – Из формулы напряжений при изгибе следует, что наибольшие (положительные – растягивающие) и наименьшие (отрицательные – сжимающие) напряжения в поперечном сечении возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, расположенных по обе стороны от нее:

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y.$$

При симметричном сечении относительно нейтральной оси абсолютные величины наибольших растягивающих и сжимающих напряжений равны и могут быть определены по формуле:

искать  $y_{\max}$ , но формула остается в силе.

В других случаях необходимо специально

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max}.$$

Величина, зависящая только от размеров и формы поперечного сечения, называется **осевым моментом сопротивления**:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}.$$

С использованием осевого момента сопротивления максимальные напряжения вычисляются как:

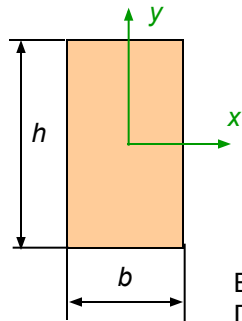
$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}.$$

Моментом сопротивления удобно пользоваться при расчете на прочность (подбор сечения) балки при изгибе.

Конечно для этого моменты сопротивления предварительно вычисляются для типовых и прокатных сечений по предыдущей формуле.

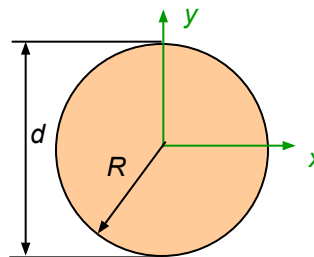
- Момент сопротивления типовых и прокатных сечений:**

## 1. Прямоугольное сечение:



$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}.$$

## 2. Круглое сечение:



$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{R} = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

- Для **прокатных сечений** все геометрические характеристики, в том числе и моменты сопротивления, уже вычислены и содержатся в специальных таблицах – сортаментах.

Во всех случаях, кроме круглого сечения, следует использовать моменты сопротивления, соответствующие ориентации плоскости действия изгибающего момента. Например, при действии на балку прямоугольного сечения момента  $M_y$  при вычислении максимальных нормальных напряжений необходимо использовать  $W_y$ :

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{hb^2}{6}.$$

- Условие прочности по нормальным напряжениям:**

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} < R.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} < [\sigma]$$

**Максимальные напряжения не должны превышать расчетных или допускаемых напряжений.**

Отсюда при подборе сечения определяется требуемая величина момента сопротивления для прокатных сечений или характерных размеров для других сечений:

$$W_x^{\text{треб}} > \frac{M_x}{R}.$$

В случае, например, прямоугольного сечения необходимо задать один из размеров или соотношение между ними. Пусть  $h / b = k$ .

Тогда требуемая высота сечения:

$$h^{\text{треб}} = \sqrt[3]{6kW_x^{\text{треб}}}$$

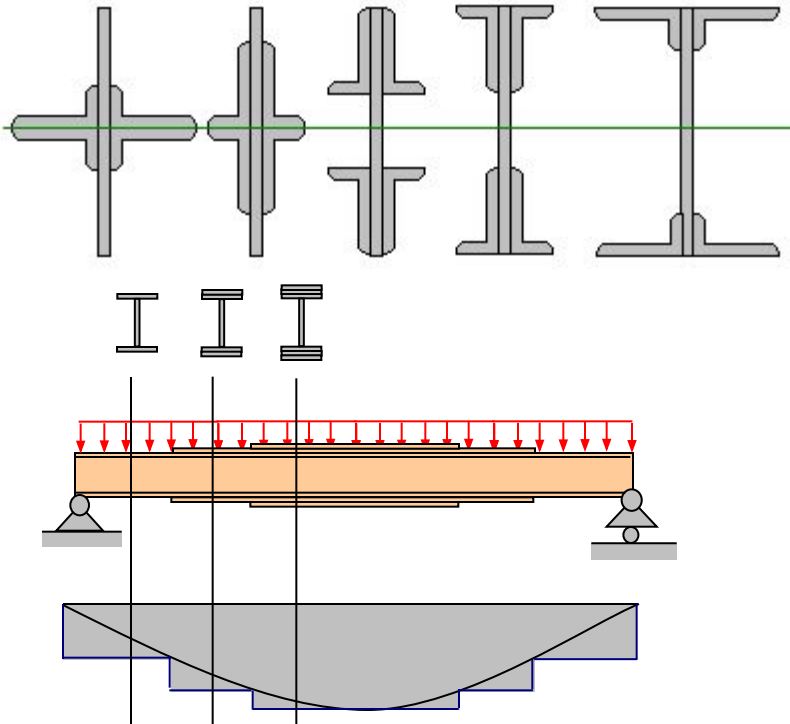


# Лекция 13 (продолжение – 13.3)

- **Понятие рационального сечения при изгибе** – Из формулы напряжений при изгибе следует, что наибольшие (положительные – растягивающие) и наименьшие (отрицательные – сжимающие) напряжения в поперечном сечении зависят от величины осевого момента инерции или осевого момента сопротивления:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} \cdot \quad \sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}.$$

- При изменении размеров сечения изменяются как осевой момент сопротивления, так площадь сечения. При этом величина осевого момента сопротивления зависит, например, для прямоугольного сечения, от квадрата высоты сечения, а площадь – линейно. Увеличение площади увеличивает расход материала на изготовление балки. Более рациональным сечением считается такое сечение, при котором отношение момента сопротивления к площади имеет большее значение. Для этого следует возможно большую часть площади поперечного сечения располагать как можно дальше от нейтральной оси. Ниже показаны 5 поперечных сечений балки, составленных из неравнобоких уголков и листа, площадь всех сечений одинакова, а моменты сопротивления различны:



В связи с тем, что площади этих сечений одинаковы, наиболее рациональным из них является то, у которого момент сопротивления  $W_x$  больше.

- Добиться снижения веса балки можно также путем изменения размеров сечения по ее длине в соответствии с изменением величины изгибающего момента. Поскольку эпюра изгибающего момента имеет в общем случае криволинейное очертание, то для получения рационального сечения размеры, например высота или толщина полок, должны непрерывно изменяться. Из технологических соображений вместо этого используют ступенчатое изменение толщины, достигаемое приваркой или приклепыванием дополнительных горизонтальных листов. На рисунке изображена, так называемая, эпюра материалов, ординаты которой равны произведению момента сопротивления поперечного сечения на допустимое напряжение:

$$M_x = W_x [\sigma]$$

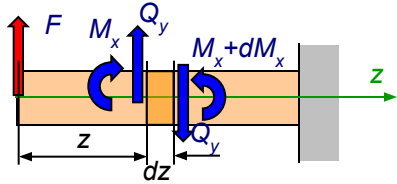
# Лекция 14

■ **Прямой поперечный изгиб** – в поперечном сечении балки, кроме изгибающего момента, действует также поперечная сила. При прямом поперечном изгибе изгибающий момент действует в плоскости, совпадающей с одной из главных плоскостей инерции поперечного сечения балки. Поперечная сила при этом обычно параллельна плоскости действия изгибающего момента.

■ **Касательные напряжения при поперечном изгибе** - В общем случае при поперечном изгибе балок произвольного профиля могут возникать две компоненты полного касательного напряжения в сечении. Компонента  $\tau_{zx}$  для такого сечения не может быть найдена методами сопротивления материалов. Касательные напряжения  $\tau_{zy}$ , возникающие в поперечном сечении, связаны с поперечной силой, действующей в этом сечении бруса, интегральной зависимостью:

$$Q_y = \int_A \tau_{zy} dA.$$

Поскольку закон изменения касательных напряжений по сечению неизвестен, то из этого уравнения найти касательные напряжения для известной поперечной силы нельзя.



Выделим малый элемент двумя нормальными к оси бруса и заменим действие отброшенных частей нормальными напряжениями и касательными напряжениями. Под их действием элемент находится в равновесии.

При действии поперечной силы изгибающий момент в сечении, отстоящем на расстоянии  $dz$  от другого сечения, имеет приращение  $dM_x$ .

Согласно зависимости  $\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$  нормальные напряжения также получают приращения:

$$d\sigma = \frac{dM_x}{I_x} y.$$

Отсечем от рассматриваемого элемента некоторую ее часть горизонтальной плоскостью и заменим ее действие касательными напряжениями (нормальные напряжения в соответствии с гипотезой об отсутствии сдавливания продольных волокон не рассматриваются).

Оставшийся элемент по-прежнему находится в равновесии. Уравнение равновесия в проекции на ось z:

$$\sum Z_i = 0; \quad - \int_{A_{отс}} (\sigma_z + d\sigma_z) dA + \int_{A_{отс}} \sigma_z dA + \int_{A_1} \tau_{yz} dA = 0. \quad \text{или} \quad - \int_{A_{отс}} d\sigma_z dA + \int_{A_1} \tau_{yz} dA = 0.$$

Здесь  $A_{отс}$  – площадь отсеченной части поперечного сечения,  $A_1$  – площадь горизонтального сечения элемента, равная  $bdz$ .

Перенесем первый интеграл в правую часть и подставим в него выражение для нормальных напряжений:  $\int_{A_1} \tau_{yz} dA = \int_{A_{отс}} \frac{dM_x}{I_x} y dA$ . Приращение изгибающего момента и осевой момент инерции сечения не зависят от площади отсеченной части и их можно вынести за знак интеграла. Оставшееся подинтегральное выражение совпадает с выражением для **статического момента площади отсеченной части поперечного сечения**:  $\int_{A_1} \tau_{yz} dA = \frac{dM_x}{I_x} \int_{A_{отс}} y dA = \frac{dM_x}{I_x} S_x^{отс}$ . Полагая касательные напряжения *постоянными* по площади  $A_1$ , что соответствует предположению постоянства деформаций сдвига по ширине поперечного сечения, учитывая *закон парности касательных перемещений* и *дифференциальную зависимость поперечной силы*, получаем:

$$\tau_{zy} b dz = \frac{dM_x}{I_x} S_x^{отс} \quad \Rightarrow \quad \tau_{zy} = \frac{dM_x}{dz} \frac{S_x^{отс}}{I_x b} \quad \text{или} \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^{отс}}{I_x b}.$$

Формула Журавского

# Лекция 14 (продолжение – 14.2)

■ **Распределение касательных напряжений по высоте сечения** – Из формулы Журавского следует, что касательные напряжения в волокнах поперечного сечения, расположенных на некотором расстоянии от оси, зависят от величины статического момента площади отсеченной части и ширины сечения на высоте секущей плоскости:

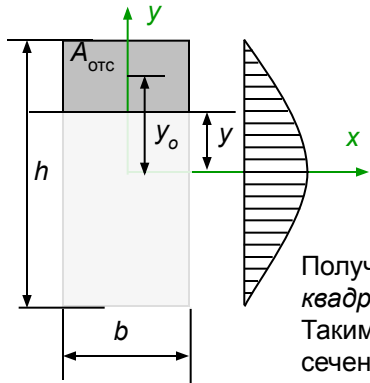
$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b}$$

■ Построим эпюры касательных напряжений для некоторых простых сечений:

■ **Прямоугольное сечение**

Проведем горизонтальное сечение на высоте  $y$  и вычислим **статический момент отсеченной части**:

$$S_x^{\text{отс}} = y_o A_{\text{отс}} = \left( y + \frac{h-y}{2} \right) b \left( \frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{8} (2y+h)b(h-2y) = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) b$$



Подставим в формулу Журавского выражения для статического момента и момента инерции:

$b := 10 \quad h := 40$

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{h}{2} \\ \frac{3}{2 \cdot b \cdot h} \\ -\frac{h}{2} \end{array} \right] \cdot 1$$

Полученная зависимость является **квадратичной** от координаты рассматриваемого сечения. Таким образом, касательные напряжения сечения изменяются по **квадратной параболе**:  $y = \pm h/2, \tau_{zy} = 0; y = 0, \tau_{zy} = \tau_{\text{max}}$

$B := 0.1 \quad H := 0.6 \quad b := 0.06 \quad h := 0.3 \quad Q_y := 10^3$

$$I_x := \frac{B \cdot H^3}{12} + \left[ -\frac{(B-b) \cdot h^3}{12} \right] \quad I_x = 0.002 \quad y := -\frac{H}{2}, -\frac{H}{2} + \frac{H}{200}, \frac{H}{2}$$

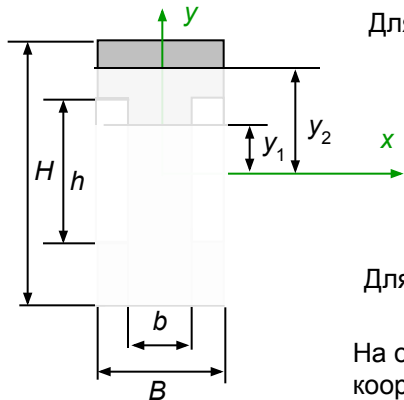
$$S_y(y) := \text{if} \left[ |y| < \frac{h}{2}, \frac{1}{4} \cdot (H^2 - h^2) \cdot B + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \cdot b, \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{H^2}{4} - y^2 \right) \cdot B \right]$$

$$b_y(y) := \text{if} \left[ |y| < \frac{h}{2}, b, B \right] \quad \tau_{zy}(y) := \frac{Q_y \cdot S_y(y)}{I_x \cdot b_y(y)}$$

Можно убедиться, что объем эпюры напряжений  $\tau_{zy}(y) \cdot b/Q_y$  равен 1, что означает выполнение условия Журавского.

■ **Толстостенный двутавр**

Сечение имеет ступенчатое изменение ширины и поэтому с изменением координаты:  $0 < y_1 < h/2$  – стенка и  $h/2 < y_2 < H/2$  – полка



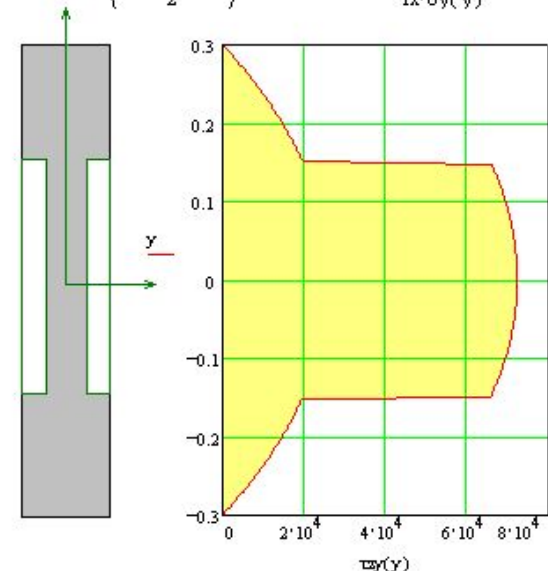
Для стенки:

$$S_x^{\text{отс}} = \left( \frac{H}{2} - \frac{H-h}{2} \right) B \left( \frac{H-h}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) b = \frac{1}{4} (H^2 - h^2) B + \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) b$$

Для полки:

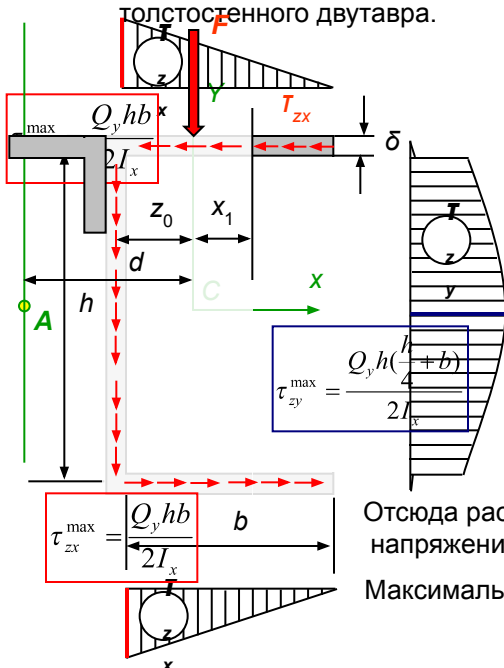
$$S_x^{\text{отс}} = \frac{1}{2} \left( \frac{H^2}{4} - y_2^2 \right) B$$

На обоих участках соблюдается квадратичная зависимость от координаты волокна. В местах резкого изменения ширины сечения в соответствии с формулой Журавского эпюра имеет скачки:



# Лекция 14 (продолжение – 14.3)

- Тонкостенное сечение** – Эпюра вертикальных касательных напряжений  $\tau_{zy}$  строится аналогично рассмотренному ранее для толстостенного двутавра.



$$\tau_{zy}^{\max} = \frac{Q_y h \left( \frac{h}{4} + b \right)}{2I_x}$$

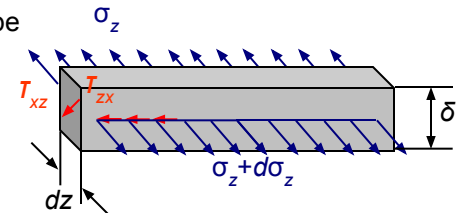
В полках возникают горизонтальные касательные напряжения  $\tau_{zx}$ , которые могут быть определены по формуле Журавского, при этом статический момент площади, отсекаемой вертикальной плоскостью на расстоянии  $x_1$ , вычисляется по-прежнему относительно оси  $x$ :

Это следует из того факта, что при сечении вертикальной плоскостью в продольном сечении возникают касательные напряжения  $\tau_{xz}$ , равные касательным напряжениям  $\tau_{zx}$  в поперечном сечении на расстоянии  $x_1$ . Далее, следуя процедуре вывода формулы Журавского, приходим к той же формуле.

$$\tau_{zx} = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x \delta}$$

В отличие от предыдущего (определение вертикальных касательных напряжений) теперь статический момент отсеченной части изменяется по **линейному** закону:

$$S_x^{\text{отс}} = A_{\text{отс}} \frac{h}{2} = (b - z_0 - x_1) \delta \frac{h}{2}$$



$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x \delta} = \frac{Q_y (b - z_0 - x_1) \delta \frac{h}{2}}{I_x \delta} = \frac{Q_y (b - z_0 - x_1) h}{2I_x}$$

Отсюда рассматриваемые горизонтальные касательные напряжения изменяются также по **линейному** закону:

Максимальные касательные напряжения:

$$\tau_{zy}^{\max} = \frac{Q_y \left( \delta \frac{h}{2} + b \delta \frac{h}{2} \right)}{I_x \delta} = \frac{Q_y h \left( \frac{h}{4} + b \right)}{2I_x} \quad \tau_{zx}^{\max} \Big|_{x_1 = -z_0} = \frac{Q_y h b}{2I_x}$$

Первый интеграл равен площади эпюры касательных напряжений  $\tau_{zx}$ , умноженной на толщину полки:

$$T_x = \frac{1}{2} \tau_{zx}^{\max} b \delta = \frac{Q_y h b^2 \delta}{4I_x}$$

Таким образом,

$$\text{крутящий момент равен: } M_z = T_x h + Q_y z_0 = Q_y \left( \frac{h b^2 \delta}{4I_x} + z_0 \right)$$

Приведение системы касательных напряжений к равнодействующей дает:

$$d = \frac{M_z}{Q_y} = \frac{h b^2 \delta}{4I_x} + z_0$$

Полученный центр приведения определяет положение равнодействующей касательных напряжений и называется **центром изгиба**. Для рассмотренного сечения он находится вне контура сечения. **При прохождении поперечной силы через центр изгиба кручение сечения не возникает.**

... как алгебраическая сумма:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x \delta} + \frac{Q_x S_y^{\text{отс}}}{I_y \delta}$$

**Критерии прочности на срез:**

$$\tau_{\text{факт}} = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x \delta} \leq R_{\text{ср}} \leq R_{\text{ср}}^{\text{расч}}$$

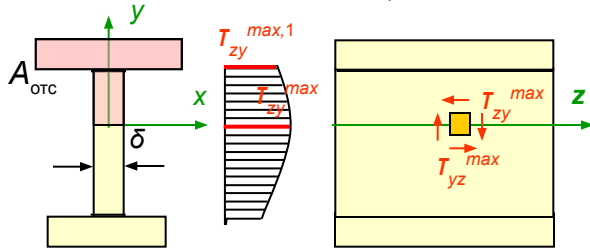
Тонкостенных балок показывают, что в поперечном сечении поперечной осью балки, т.е. система внутренних сил действует в плоскости действия нагрузки находится в главной плоскости инерции.

$$M_z = 2 \left( \int_{A_1} \tau_{zx} dA_1 \right) \frac{h}{2} + \left( \int_A \tau_{zy} dA \right) z_0$$

Последний интеграл равен поперечной силе  $Q_y$ .

# Лекция 15

- **Расчеты на прочность по касательным напряжениям и усилиям сдвига** – Составные изгибаемые элементы собираются на основе клеевых, сварных, заклепочных и болтовых соединений, позволяющих создать рациональные сечения. Эти соединения непосредственно воспринимают касательные усилия (напряжения).
- **Клеевые соединения** – рассчитываются на сопротивление сдвигу составных частей.



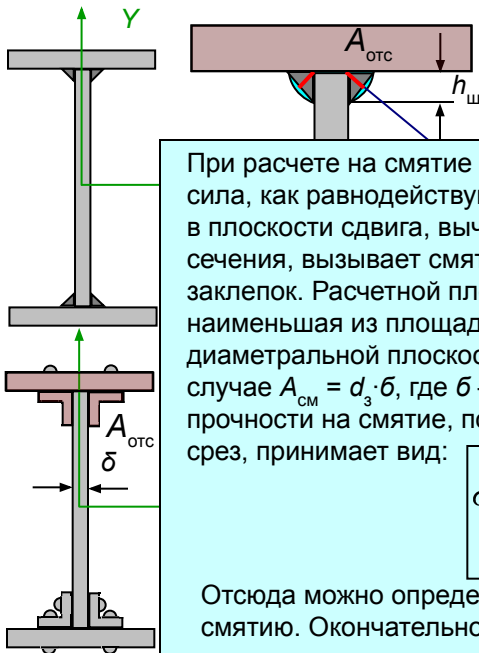
Условие прочности: 
$$\tau_{zy}^{\max,1} = \frac{Q_y^{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x \delta} \leq R_{\text{кл}},$$
 где  $R_{\text{кл}}$  – расчетное сопротивление клея на срез.

Кроме того должна быть обеспечена прочность на срез основного материала по наибольшим касательным напряжениям на уровне нейтрального слоя:

$$\tau_{zy}^{\max} = \frac{Q_y^{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x \delta} \leq R_{\text{сп}},$$
 где  $R_{\text{сп}}$  – расчетное сопротивление материала на срез.

Если материал дерево, прочность которого на скалывание ниже чем на срез поперек волокон, то берется расчетное сопротивление на скалывание, поскольку  $\tau_{zx} = \tau_{yz}$  по закону парности касательных напряжений.

- **Сварные соединения** – рассчитываются на прочность сварного шва, воспринимающего продольное сдвигающее усилие.



Опасным сечением для углового сварного шва является сечение, проходящее по биссектрисе прямого угла, соответствующее наименьшей площади среза шва. За расчетное сечение принимается  $A_{\text{ш}} = b_{\text{ш}} \cdot l_{\text{ш}} = h_{\text{ш}} \cdot \cos 45^\circ \cdot l_{\text{ш}}$ , где  $l_{\text{ш}}$  - длина шва (сегментная часть площади поперечного сечения шва отбрасывается, как область, в которой не обеспечивается качество шва).

Для автоматической многопроходной сварки  $\beta = 0,7$ , где  $\beta$  - коэффициент формы углового шва, зависящий от типа сварки.

При расчете на смятие следует полагать, что сдвигающая сила, как равнодействующая касательных напряжений в плоскости сдвига, вызывает смятие боковой поверхности заклепок. Расчетной площадью смятия является наименьшая из площадей, образованной сечением диаметральной плоскостью тела заклепки. В данном случае  $A_{\text{см}} = d_3 \cdot b$ , где  $b$  – толщина стенки. Условие прочности на смятие, подобное условию прочности на срез, принимает вид:

$$\sigma_3^{\text{см}} = \frac{Q_y^{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x \frac{d_3 \delta}{a}} = \frac{a Q_y^{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x d_3 \delta} \leq R_3^{\text{см}}.$$

Отсюда можно определить требуемый шаг заклепок по смятию. Окончательно принимается наименьший шаг из определенных по условиям среза и смятия.

Условие прочности на срез материала шва:

$$\tau_{\text{ш}} = \frac{Q_y^{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x 2b_{\text{ш}}} = \frac{Q_y^{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x 2\beta h_{\text{ш}}} \leq R_{\text{ш}}^{\text{ср}}.$$

2 – количество швов узла

Условие прочности на срез и смятие заклепок (болтов), воспринимающих

усилиями одинаков. В этом случае, в более тяжелых условиях работают болты отсеченной части для них больше, чем для заклепок на полке.

Условие прочности на срез материала заклепки (болта):

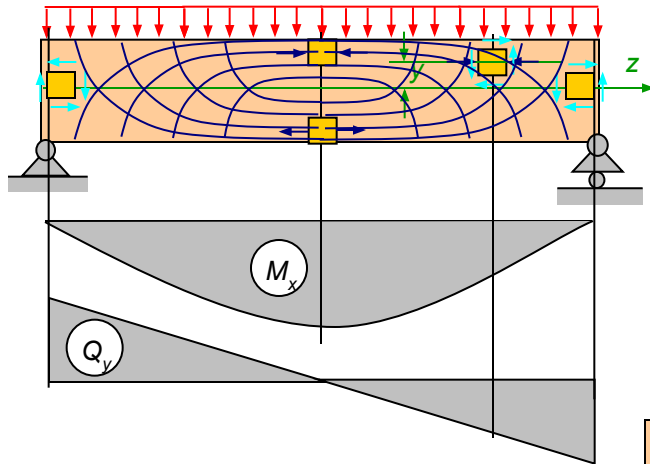
$$\tau_3 = \frac{Q_y^{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x 2 \frac{\pi d_3^2}{4a}} = \frac{2a Q_y^{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x \pi d_3^2} \leq R_3^{\text{ср}}.$$

2 – количество срезов заклепки

$$a = \frac{2\pi d_3^2 R_3^{\text{ср}} I_x}{Q_y^{\max} S_x^{\text{отс}}}.$$

# Лекция 15 (продолжение – 15.2)

- Анализ напряженного состояния при изгибе** – Ранее были получены и рассмотрены выражения для нормальных и касательных напряжений, возникающих при изгибе. При расчетах на прочность должны быть определены те сечения и те волокна, в которых эти напряжения достигают максимальных значений. И это разные сечения и разные волокна. Например, при поперечном изгибе двухопорной балки максимальный изгибающий момент возникает в середине пролета, а максимальная поперечная сила – в опорных сечениях.



Определив величины главных напряжений для ряда точек данного сечения на различном расстоянии от нейтральной оси, можно построить эпюры главных напряжений:

Наглядное представление о потоке внутренних сил в теле (стенке) балки могут дать **траектории главных напряжений** – линии, в каждой точке которого касательная совпадает с направлением главного напряжения в этой точке. На рисунке показаны траектории растягивающих

главных напряжений. Они пересекают нейтральную ось под углом  $45^\circ$ . При армировании бетона стальными стержнями учитывается характер этих траекторий, т.к. бетон плохо сопротивляется растяжению:

Траектории сжимающих главных напряжений учитываются при постановке ребер жесткости для предотвращения выпучивания тонких стенок, вследствие наличия сжатых областей в стенке.

Анализ напряженного состояния при изгибе балки показывает, что необходимо проверять условия прочности по нормальным напряжениям в крайних волокнах сечений с максимальной величиной изгибающего момента ( в середине пролета), по касательным напряжениям – на нейтральной оси опорных сечений и по главным напряжениям – в точках соединения стенки и полки сечений, в которых действуют изгибающий момент и поперечная сила.

При этом максимальные нормальные напряжения возникают в наиболее удаленных волокнах, а максимальные касательные напряжения – на нейтральной оси.

В элементе балки, находящейся в некотором сечении, в котором одновременно действуют достаточно большие изгибающий момент и поперечная сила, на произвольном расстоянии от нейтральной оси, возникают одновременно нормальные и касательные напряжения.

Главные напряжения в этом элементе и тангенс угла наклона главных площадок определяются выражениями:

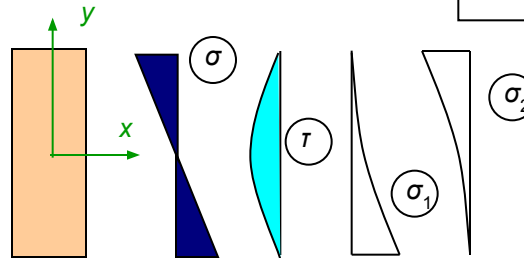
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}$$

При поперечном плоском изгибе  $\sigma_x = \sigma_z = \sigma$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau$ . получаем:

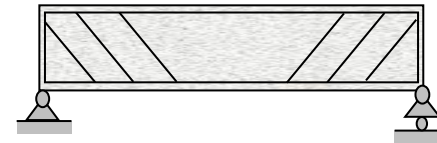
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Поскольку эпюры касательных напряжений имеют скачки в местах резкого изменения ширины поперечного сечения (двутавр, швеллер), то это найдет свое отражение на эпюрах главных напряжений.



# Лекция 15 (продолжение – 15.3)

- Изгиб стержня в упругопластической стадии** – Рассмотренные ранее условия прочности основываются на сравнении максимальных напряжений с расчетным сопротивлением в предположении упругой работы материала. Для хрупких материалов за расчетное сопротивление принимается величина, связанная с *пределом прочности*, для пластичных – с *пределом текучести*. Для хрупких материалов возникновение максимальных напряжений, больших расчетного сопротивления, действительно означает исчерпание несущей способности рассматриваемого сечения и балки в целом.

Это не так для материалов, имеющих стадию текучести. Можно заметить, что в случае изгиба при достижении напряжениями в крайних волокнах предельных значений, волокна, находящиеся ближе к нейтральной оси, испытывают меньшие, вплоть до нуля, напряжения.

**Для этих материалов, возникновение напряжений, равных пределу текучести, не является предельным состоянием**, поскольку другие волокна еще остаются упругими и могут воспринимать увеличение нагрузки.

При увеличении нагрузки зона текучести начинает увеличиваться, продвигаясь к нейтральной оси.

**Исчерпание несущей способности сечения** произойдет в момент, когда зона текучести распространится вплоть до нейтральной оси и материал по всему сечению будет деформироваться при постоянной нагрузке.

Состояние сечения, когда во всех его точках развиваются пластические деформации, называют **пластическим шарниром**. При возникновении пластического шарнира балка не может остаться в равновесии и превращается в механизм:

При образовании пластического шарнира нулевая линия занимает положение, разделяющее сечение на две равновеликие части. Это следует из равенства нулю суммарного продольного усилия:

$$N = \int_{A_{\text{раст}}} \sigma_T dA - \int_{A_{\text{сж}}} \sigma_T dA = \sigma_T A_{\text{раст}} - \sigma_T A_{\text{сж}} = 0$$

Развившийся пластический шарнир не является идеальным (совершает работу при взаимном повороте смежных сечений, т.е. оказывает определенное сопротивление). Момент сопротивления повороту смежных сечений можно определить приведением напряжений относительно любой оси, например, центральной (равнодействующие сжимающих и растягивающих напряжений образуют пару):

$$M_x^{\text{пред}} = \int_{A_{\text{раст}}} \sigma_T y dA + \int_{A_{\text{сж}}} \sigma_T y dA = \sigma_T \int_{A_{\text{раст}}} y dA + \sigma_T \int_{A_{\text{сж}}} y dA = \sigma_T (S_x^{\text{раст}} + S_x^{\text{сж}}).$$

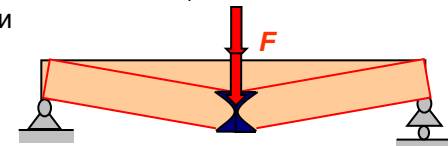
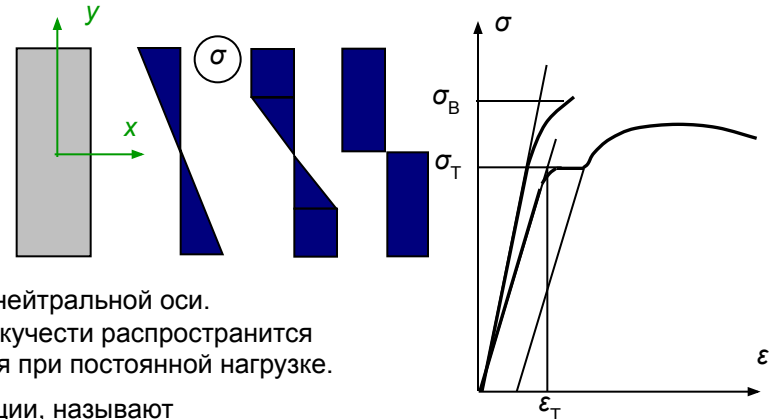
$$\downarrow$$

$$W_x^{\text{пл}}$$

Пластический момент сопротивления всегда больше момента сопротивления сечения в упругой стадии. Например, для прямоугольного сечения:

$$W_x^{\text{пл}} = S_x^{\text{раст}} + S_x^{\text{сж}} = A_{\text{раст}} \frac{h}{4} + A_{\text{сж}} \frac{h}{4} = \left(\frac{bh}{2}\right) \frac{h}{4} + \left(\frac{bh}{2}\right) \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4}, \quad W_x = \frac{bh^2}{6}.$$

Таким образом, пластический момент сопротивления прямоугольного сечения в 1,5 раза больше упругого, и это означает, что *нагрузка может быть увеличена в 1,5 раза с момента возникновения текучести до полного исчерпания ее несущей способности*.



Выражение в скобках можно рассматривать как пластический момент сопротивления, проводя аналогию с моментом сопротивления сечения в упругой стадии:

$$\sigma^{\text{пред}} = \sigma_T = \frac{M_x^{\text{пред}}}{W_x^{\text{пл}}}; \quad \left( \sigma^{\text{max}} = \frac{M_x}{I_x} y_{\text{max}} = \frac{M_x}{W_x} \right)$$

# Лекция 16

- Понятие о чистом сдвиге** – Кроме деформации растяжения или сжатия материал нагруженного элемента конструкции может испытывать *деформацию сдвига*. Примером этому может служить напряженно-деформированное состояние элемента стенки балки в произвольном сечении, рассмотренное в предыдущей лекции. Там же было показано, что в опорных сечениях на нейтральной оси на гранях элемента отсутствуют нормальные напряжения, а касательные напряжения максимальны.

Другим примером, можно сказать классическим, является кручение тонкостенной трубы, при котором любой элемент находится только под действием касательных напряжений.

**Напряженно-деформированное состояние, характеризуемое тем, что на гранях элемента возникают только касательные напряжения, называют чистым сдвигом.**

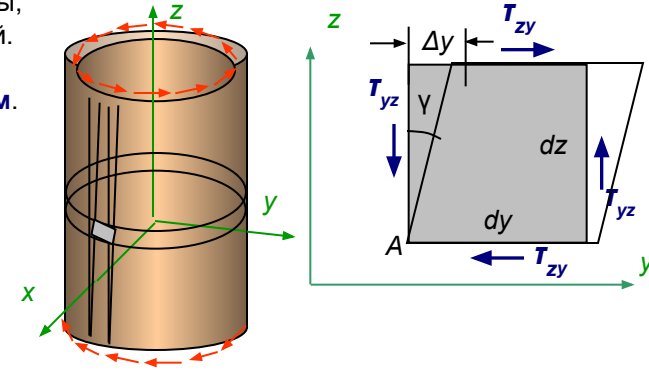
- Закон Гука сдвиге** – Деформации чистого сдвига экспериментально изучаются путем кручения трубчатых образцов. Экспериментальная диаграмма сдвига, связывающая напряжения и угол сдвига, для пластичной стали имеет такой же характер изменения, как и диаграмма растяжения:

До напряжения  $\tau_{пц}$ , называемого *пределом пропорциональности при сдвиге* справедлива линейная зависимость (**закон Гука при сдвиге**):

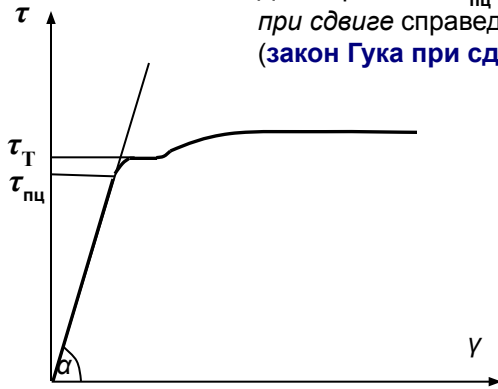
$$\tau = G\gamma.$$

Здесь  $\gamma$  - относительный сдвиг:  
 $G$  - модуль сдвига.

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta y}{dy}.$$



Касательное напряжение, при котором угол сдвига возрастает при постоянном напряжении называется *пределом текучести при сдвиге*.



- Связь между модулем сдвига и модулем упругости при растяжении** – Модуль сдвига и модуль упругости при растяжении являются физическими постоянными материала, характеризующими жесткость в каждом из этих двух видов деформации. Поскольку удлинение диагонали элемента, вызванное сдвигом, может быть получено также растяжением этого волокна под действием нормальных напряжений, эти константы должны быть связаны между собой некоторым соотношением:

Удлинение диагонали элемента вследствие деформации сдвига ( $dy = dz$ ):  $\Delta ds = \Delta y \cos 45^\circ$ .

$$\Rightarrow \Delta ds = \gamma dy \cos 45^\circ. \Rightarrow \Delta ds = \gamma (ds \cos 45^\circ) \cos 45^\circ = \gamma ds \cos^2 45^\circ. \Rightarrow \Delta ds = \frac{\tau}{G} ds \cos^2 45^\circ = \frac{\tau}{2G} ds.$$

Удлинение диагонали элемента вследствие деформации растяжения ( $\sigma_1 = T, \sigma_2 = -T$ ):

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) = \frac{1}{E}(\tau - \mu(-\tau)) = \frac{(1 + \mu)\tau}{E}. \Rightarrow \Delta ds = \frac{(1 + \mu)\tau}{E} ds. \Rightarrow \frac{(1 + \mu)}{E} = \frac{1}{2G}.$$

или

Таким образом **существует соотношение между модулем сдвига и модулем упругости при растяжении** с участием коэффициента Пуассона. Любую из этих величин можно определить, если известны две другие.

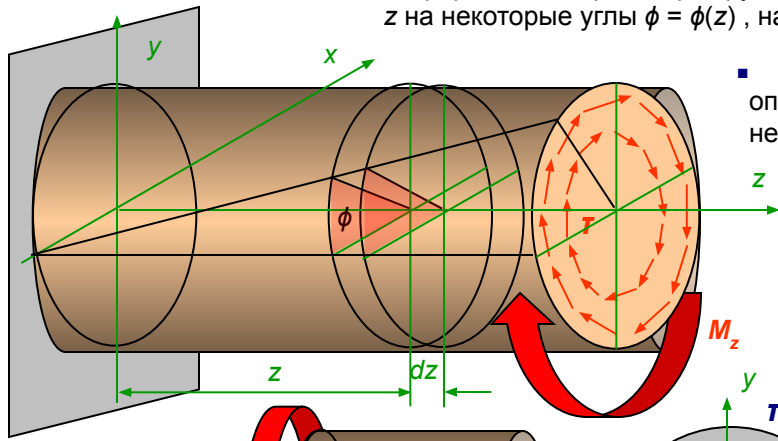
$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$



# Лекция 16 (продолжение – 16.2)

- Кручение стержней круглого поперечного сечения** – Кручение характерно тем, что в поперечных сечениях возникают касательные напряжения  $\tau$ , приводящиеся к крутящему моменту  $M_z$ .

Деформация стержня при кручении выражается тем, что поперечные сечения поворачиваются вокруг оси стержня  $z$  на некоторые углы  $\phi = \phi(z)$ , называемые *углами закручивания*.



- Касательные напряжения при кручении** – Как указывалось ранее, задача определения напряжений является статически неопределимой, для решения которой необходимо последовательно рассмотреть три стороны задачи:

1. *Статика*: Выделим малый элемент двумя нормальными к оси бруса сечениями и заменим действие отброшенных частей касательными напряжениями. Под их действием элемент находится в равновесии.

Ранее *приведением распределенных сил к центру и центральным осям* было получено интегральное соотношение, связывающие крутящий момент с касательными напряжениями:

$$M_z = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

Касательное напряжение произвольного направления в каждой точке плоскости поперечного сечения можно разложить по двум другим направлениям, а именно, по радиусу  $\rho$ , соединяющему точку с центром тяжести сечения, и по перпендикуляру к этому радиусу. Момент относительно центральной оси  $z$  будет создавать лишь вторая компонента, обозначаемая одним символом  $\tau$ . Тогда:

$$M_z = \int_A \tau \rho dA$$

Из этого соотношения найти напряжение по известному крутящему моменту пока нельзя, поскольку закон изменения напряжений по радиусу сечения неизвестен.

Полученная формула показывает, что касательные напряжения линейно зависят от расстояния рассматриваемого волокна до центральной оси и принимают максимальные значения при  $\rho = \rho_{\max}$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_p} \rho_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$$

**Условие прочности при кручении:**

$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$  [Т] – допускаемое касательное напряжение материала стержня,  $W_p$  – полярный момент сопротивления:

$$W_p = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}$$

ими (справедливо лишь для круглых сечений).  
 ваются на один тот же угол (угол закручивания).

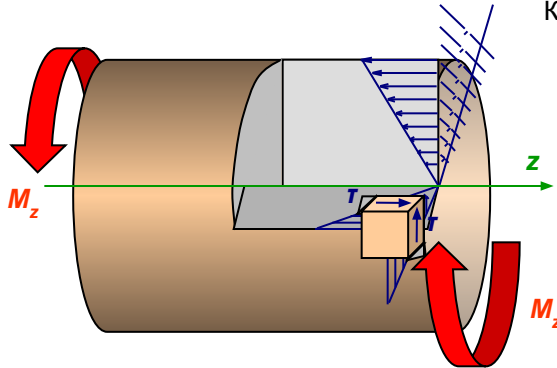
Закон Гука при сдвиге:  $\tau = G\gamma$   $\Rightarrow$   $\tau = G\rho \frac{d\phi}{dz}$

Интеграл:  $= G \frac{d\phi}{dz} \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\phi}{dz} I_p$   $\Rightarrow$   $d\phi = \frac{M_z}{GI_p} dz$

Закон Гука:  $\tau = \frac{M_z}{I_p} \rho$

# Лекция 16 (продолжение – 16.3)

- Анализ напряженного состояния при кручении** – По закону парности касательных напряжений полученная формула для касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении, одновременно определяет касательные напряжения в плоскости, перпендикулярной продольному диаметральному сечению:



Каждый прямоугольный элемент материала испытывает **напряженное состояние чистого сдвига**.

- Определение углов закручивания** – При выводе формулы касательных напряжений при кручении была получена дифференциальная зависимость:

$$d\varphi = \frac{M_z}{GI_p} dz$$

**Угол закручивания** определяется из этого дифференциального соотношения интегрированием левой и правой части:

$$\varphi = \int_{z_0}^z \frac{M_z}{GI_p} dz + \varphi_0, \quad \text{где } \varphi_0 \text{ – угол поворота при } z = 0.$$

В частном случае при постоянном моменте  $M_z$ , постоянной жесткости  $GI_p$  и неподвижном сечении в начале координат ( $\varphi_0 = 0$ ) получаем:

$$\varphi = \frac{M_z z}{GI_p} \Big|_0^l = \frac{M_z l}{GI_p}$$

Этой формулой можно пользоваться при определении угла для вала *постоянного* или *ступенчато постоянного* сечения, нагруженного *сосредоточенными* моментами.

При этом на каждом из участков, на котором крутящий момент, жесткость постоянны, угол закручивания изменяется по *линейному* закону. Как следует из общей формулы определения угла закручивания, при построении эпюры углов закручивания ординаты эпюры откладываются от уровня предыдущего угла закручивания, т.е. строятся *нарастающим итогом*, учитывая угол закручивания предыдущего участка.

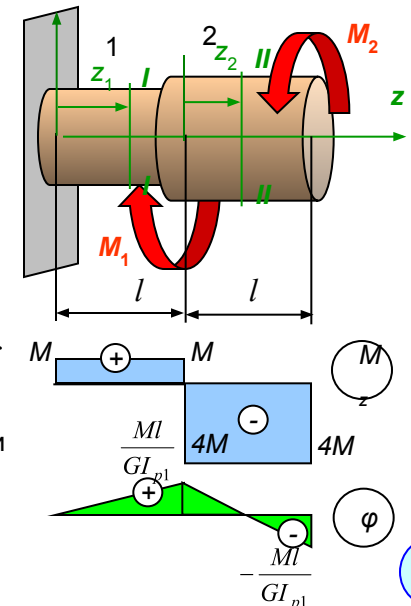
**Пример:** Построить эпюру углов закручивания для стержня нагруженного сосредоточенными моментами:  $M_1 = 5M$ ,  $M_2 = 4M$ , где  $M$  – параметр нагрузки,  $I_{p2}/I_{p1} = 2$ .

1. Сечение I-I ( $0 < z_1 < l$ ):  $M_z^{I-I} = \sum M_{zi}^{\text{справа}} = M_1 - M_2 = 5M - 4M = M$ .  $\varphi_1 = \frac{M_z^{I-I} z_1}{GI_{p1}} \Big|_{z_1=l} = \frac{Ml}{GI_{p1}}$

2. Сечение II-II ( $0 < z_2 < l$ ):  $M_z^{II-II} = \sum M_{zi}^{\text{справа}} = -M_2 = -4M$ .  
 $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{M_z^{II-II} z_2}{GI_{p2}} \Big|_{z_2=l} = \frac{Ml}{GI_{p1}} + \frac{(-4M)l}{2GI_{p1}} = -\frac{Ml}{GI_{p1}}$

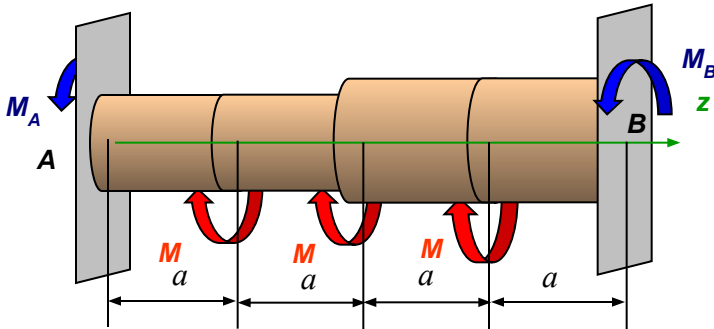
**Расчеты на жесткость** – Валы машин испытывают переменные (динамические) нагрузки. При малой жесткости валов могут возникать нежелательные крутильные колебания. Поэтому, помимо условий прочности должны выполняться условия жесткости, ограничивающие величину максимального угла закручивания, отнесенного к длине (погонного угла закручивания):

$$\theta_{\max} = \frac{M_z}{GI_p} \leq \theta_{\text{расч}}$$



# Лекция 17

- **Статически неопределимые задачи при кручении** – решаются так же, как и при других видах деформации, т.е. последовательно раскрываются три стороны задачи (статика, геометрия и физика). Специфика лишь состоит в том, что составляются другие уравнения равновесия, сопоставляются угловые перемещения (углы закручивания) и используются физические соотношения упругости, связывающие деформации и усилия при кручении.
- **Пример.** Вал круглого сечения имеет ступенчатое изменение диаметра ( $d = 0.707D$ ) и нагружен тремя скручивающими моментами  $M$ .



1. **Статика** – Отбрасываем жесткие заделки, заменяем их реактивными моментами:  
Составляем **моментное уравнение равновесия** относительно оси вала:  
$$\sum M_{zi} = 0; \quad M_A - M - M - M + M_B = 0. \quad \text{Или:} \quad \boxed{M_A - 3M + M_B = 0.}$$
  
Это уравнение единственное, которое связывает нагрузку и реактивные моменты. Все другие (сумма проекций на координатные оси и суммы моментов относительно осей  $x, y$ ) обращаются в тождества. Следовательно, задача является статически неопределимой с одним “лишним” неизвестным.
2. **Геометрия** – При наличии на обоих концах вала неподвижных заделок сумма углов закручивания на каждом из участков при любом нагружении должна быть равной нулю

**Уравнение совместности** принимает вид:  $\sum \varphi_i = 0; \quad \varphi_{M_1} + \varphi_{M_2} + \varphi_{M_3} + \varphi_{M_B} = 0.$

Здесь первые три слагаемые есть углы закручивания, вычисленные для сечения B, от действия трех заданных моментов по отдельности. Последнее слагаемое – угол закручивания от действия неизвестного опорного момента  $M_B$ .

**Соотношения упругости:**

Подстановка этих соотношений после некоторых сокращений дает:

$$4M + 8M + 9M - 10M_B = 0,$$

откуда получаем:  $\boxed{M_B = 2.1M.}$

Далее находится из уравнения равновесия левый опорный момент и строится эпюра крутящих моментов обычным образом или ее можно построить без нахождения левого опорного момента, двигаясь *справа*.

Для построения эпюры углов закручивания придется вычислить для каждого из участков относительные углы, как это было показано при предыдущем подходе к решению.

$$\varphi_{M_1} = \frac{Ma}{G \frac{\pi(0,707D)^4}{32}} = \frac{32 \cdot 4Ma}{G\pi D^4};$$

$$\varphi_{M_2} = \frac{M2a}{G \frac{\pi(0,707D)^4}{32}} = \frac{32 \cdot 8Ma}{G\pi D^4};$$

$$\varphi_{M_3} = \frac{M2a}{G \frac{\pi(0,707D)^4}{32}} + \frac{Ma}{G \frac{\pi D^4}{32}} = \frac{32 \cdot 9Ma}{G\pi D^4};$$

$$\left( \frac{M_B 2a}{G \frac{\pi(0,707D)^4}{32}} + \frac{M_B 2a}{G \frac{\pi D^4}{32}} \right) = - \frac{32 \cdot 10M_B a}{G\pi D^4}.$$

**Уравнение совместности):**  $\sum \varphi_i = 0; \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0.$

получим:

$$\varphi_1 = \frac{M_z^I l_1}{GI_{p1}} = \frac{M_A a}{G \frac{\pi(0,707D)^4}{32}} = \frac{32 \cdot 4M_A a}{G\pi D^4};$$

$$\varphi_2 = \frac{M_z^{II} l_2}{GI_{p2}} = \frac{(M_A - M)a}{G \frac{\pi(0,707D)^4}{32}} = \frac{32 \cdot 4(M_A - M)a}{G\pi D^4};$$

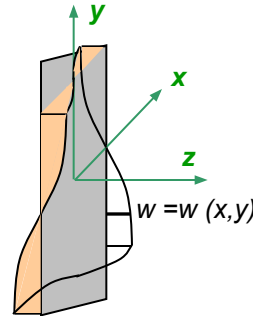
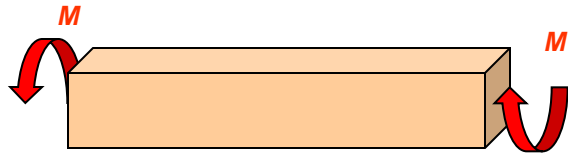
$$\varphi_3 = \frac{M_z^{III} l_2}{GI_{p3}} = \frac{(-M_B + M)a}{G \frac{\pi D^4}{32}} = \frac{32(-M_B + M)a}{G\pi D^4};$$

$$\varphi_4 = \frac{M_z^{IV} l_4}{GI_{p4}} = \frac{(-M_B)a}{G \frac{\pi D^4}{32}} = \frac{32(-M_B)a}{G\pi D^4}.$$

Умножим на  $M_B = 0$ .  
Уравнение равновесия через  $M_B$  примет вид:  
 $(M_A - 3M - 2M_B) = 0. \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_B = 2.1M.}$

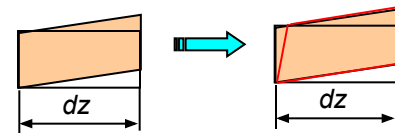
# Лекция 17 (продолжение – 17.2)

- Основные результаты теории кручения стержней прямоугольного сечения** – При рассмотрении деформации кручения стержней круглого сечения использовалась *гипотеза плоских сечений*. При кручении стержней прямоугольного сечения возникает **депланация сечения** – точки плоского до деформации поперечного сечения дополнительно перемещаются из этой плоскости по некоторому нелинейному закону:



$$w = w(x, y).$$

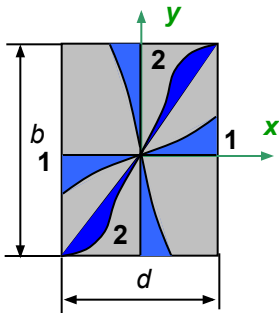
Из рисунка [1] видно, что угол сдвига элемента, выделенного на поверхности бруса, происходит не только за счет наклона образующих, но и за счет наклона сторон, лежащих в поперечных сечениях:



При вычислении касательных напряжений в угловых точках по формуле, выведенной при использовании гипотезы плоских сечений (круглые сечения), в углах прямоугольного сечения должны получаться максимальные касательные напряжения ( $\rho = \rho_{\max}$ ), а на самом деле в этих точках прямой угол остается прямым и касательные напряжения равны нулю.

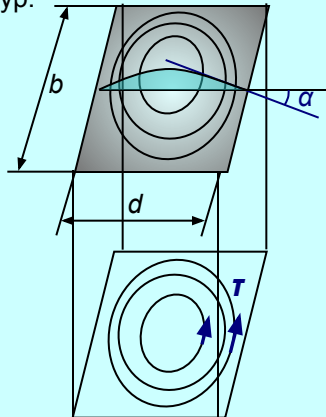
Таким образом гипотеза плоских сечений, принимая допущения, принимая (кто не сдаст сопромата) Приведем некоторые

- Наибольшие максимальные** представлены в виде



- В углах сечения касательные напряжения равны нулю

**Мембранная аналогия** – позволяет установить качественную картину распределения касательных напряжений. В теории упругости доказывается, что полное касательное напряжение пропорционально тангенсу угла наклона касательной к поверхности идеальной гибкой мембраны, натянутой на контур сечения, равномерно растягиваемой во всех направлениях и нагруженной постоянно распределенной поперечной нагрузкой. Некоторое представление от такой мембраны дает мыльная пленка, выдуваемая на проволочный контур.



Поперечная нагрузка, например, давление воздуха (дутье), вызывает прогибы поверхности. Сечения поверхности горизонтальными плоскостями дают линии равных прогибов (горизонтали), расстояния между которыми обратно пропорциональны тангенсу угла наклона касательной и, значит, величине касательных напряжений. Направление вектора касательных напряжений совпадает с касательными к горизонталям.

С помощью мембранной аналогии можно качественно предсказать положение точек, в которых возникают максимальные касательные напряжения (сгущение горизонталей) и минимальные (нулевые). На рисунке изображены (по техническим причинам) эллипсы, на самом деле при приближении к контуру должны быть некоторые овалы. Тем не менее можно увидеть, что в углах прямоугольного контура касательные напряжения должны обращаться в ноль.

ется

$\infty$
1/3
0,749
1/3



Автор благодарит вас, уважаемые студенты, за то, что вы воспользовались этим материалом для подготовки к экзаменам по рассмотренным разделам сопротивления материалов. Это только первая часть увлекательной и важной дисциплины. Дальше будет еще интереснее для тех, кто продолжит обучение. Тем, кто оставит нас – с теми попрощаемся без обид (“Каждому – свое” было написано на воротах Бухенвальда).

[Об авторе](#)

[Список трудов](#)



Если представленный материал поможет молодым преподавателям сопротивления материалов подготовиться к чтению лекций или послужит основой для разработки собственного курса лекций, то авторы будут только рады. Успеха всем!