Тема: НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ В ПРЕДЕЛАХ УПРУГОСТИ

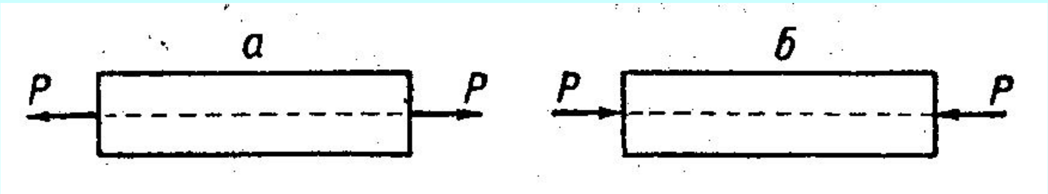
1. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПО ПЛОЩАДКАМ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ К ОСИ СТЕРЖНЯ.
2. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ПОДБОР СЕЧЕНИЯ.
3. ДЕФОРМАЦИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ. ЗАКОН ГУКА.
4. КОЭФФИЦИЕНТ ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПО ПЛОЩАДКАМ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ К ОСИ СТЕРЖНЯ.

Решение основной задачи сопротивления материалов мы начнём с ***простейшего случая растяжения или сжатия призматического стержня***.

Центральным растяжением или сжатием этого стержня называется деформация его под действием двух равных и прямопротивоположных сил, приложенных к концевым сечениям и направленных по оси стержня. Если эти силы направлены наружу от концевых сечений, то мы имеем растяжение (рис. а), в противном случае — сжатие (рис. б).

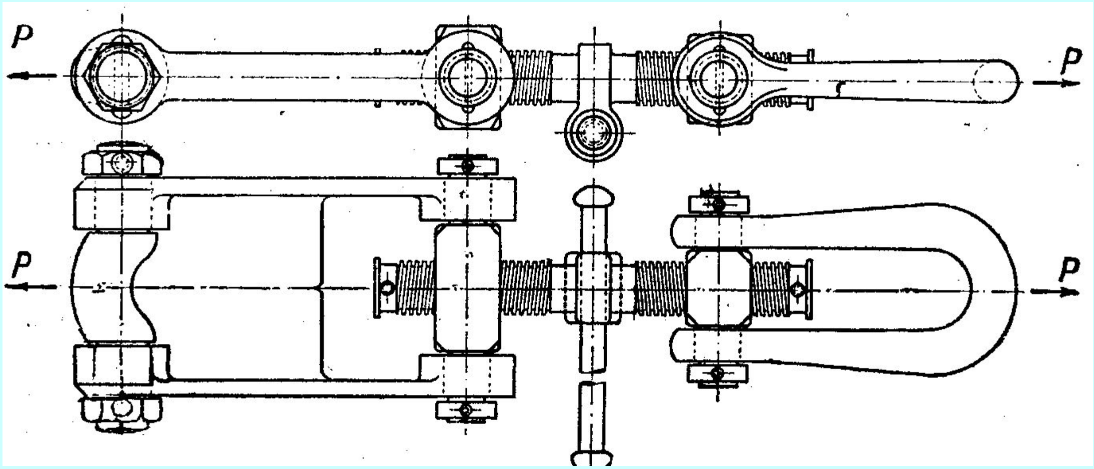
По общему плану решения всякой задачи сопротивления материалов мы прежде всего должны найти величину этих внешних сил P, растягивающих стержень. Величина сил P обычно может быть определена из условий взаимодействия рассматриваемого стержня с остальными частями конструкции.



1. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПО ПЛОЩАДКАМ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ К ОСИ СТЕРЖНЯ.

В качестве простейшего примера можно рассмотреть винт вагонной стяжки (рис. 2). При равномерном движении поезда сила тяги паровоза Р, передающаяся через стяжку, уравновешивается с сопротивлением движению остальной части поезда. Сила тяги паровоза (она иногда достигает 250000н -25т) передаётся на винт стяжки при помощи винтовой нарезки так, что силы Р направлены по оси винта. Стержень винта подвергается растяжению. Нашей задачей будет подобрать поперечные размеры винта таким образом, чтобы прочность его была обеспечена.

Внешние силы, действующие на винт, равны силе тяги. Далее необходимо найти вызванные этими силами напряжения, установить для них допускаемую величину и выбрать так размеры поперечного сечения стержня, чтобы действительные напряжения не превосходили допускаемых.



1. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПО ПЛОЩАДКАМ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ К ОСИ СТЕРЖНЯ.

Для вычисления напряжений необходимо выбрать те разрезы, которыми мы будем разделять стержень на две части. Для проверки прочности следует отыскать опасное сечение, т.е. то, через которое передаётся *наибольшее* напряжение. Мы установим формулы для вычисления напряжений сначала по сечениям, перпендикулярным к оси стержня, а в дальнейшем и по наклонным сечениям; таким путём мы сумеем отыскать наиболее опасное сечение.

Возьмём растянутый стержень и разделим его на две части поперечным сечением mn (рис. 3), перпендикулярным к оси. Отбросим вторую часть; тогда, чтобы равновесие первой не было нарушено, мы должны заменить действие отброшенной части силами, передающимися на оставшуюся часть через сечение (рис. 4). Заменяющие силы будут уравновешивать внешнюю силу Р, поэтому они должны сложиться в равнодействующую Рн (значок «Н» при Р (Рн) означает, что эта величина является равнодействующей распределённых по сечению сил, выражаемых через напряжения), равную Р, направленную по оси стержня в сторону, противоположную внешней силе (рис. 4). Эта равнодействующая Рн будет усилием, действующим в стержне.

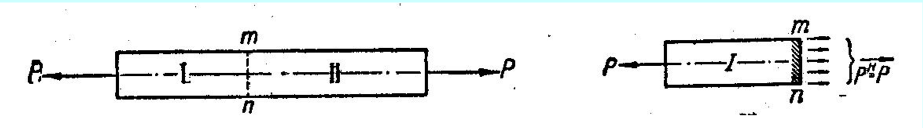


Рис. 3 Рис. 4

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПО ПЛОЩАДКАМ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ К ОСИ СТЕРЖНЯ.

Опыты с растяжением стержней из различных материалов показывают, что если растягивающие силы достаточно точно совпадают с осью стержня, то удлинения прямых линий, проведённых на поверхности стержня параллельно его оси, будут одинаковы. Отсюда возникает предположение о равномерном распределении напряжений по сечению. Лишь у концов стержня, там, где происходит непосредственная передача сил P на стержень, растяжение распределяется неравномерно между отдельными участками площади сечения: те участки, к которым непосредственно приложена сила P, перегружаются; но уже на небольшом расстоянии от концов работа материала выравнивается, и наступает равномерное распределение напряжений по сечению, перпендикулярному к оси. Эти напряжения направлены параллельно силе P, т. е. нормально к сечению; поэтому их называют нормальными напряжениями и обозначают буквой σ. Так как они распределены равномерно по площади сечения, то Pн=P , отсюда получаем

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

2. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ПОДБОР СЕЧЕНИЯ.

Чтобы выяснить, какую величину напряжений мы можем считать допустимой при работе стержня из выбранного материала, необходимо опытным путём установить зависимость между прочностью стержня и возникающими в нём напряжениями. Для этого изготовим из данного материала образец (обычно круглого или прямоугольного поперечного сечения), заложим концы его в захваты машины, позволяющей осуществить растяжение стержня, и начнём постепенно увеличивать силы Р. Образец будет растягиваться и, наконец, разорвётся.

Пусть наибольшей нагрузкой, которую выдержал образец до разрыва, будет Рв. Величина нормальных напряжений, вызванных этой нагрузкой, равная

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F}$$

называется *пределом прочности* или *временным сопротивлением* испытываемого материала на растяжение. Она выражается обычно в кг/мм^2 или кг/см^2.

2. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ПОДБОР СЕЧЕНИЯ.

Как было указано ранее, в стержнях конструкции приходится допускать при работе на растяжение нормальные напряжения [σ], в несколько раз меньшие, чем предел прочности $\sigma_в$, допускаемое напряжение получается делением предела прочности $\sigma_в$ на коэффициент запаса прочности k. Величина этого коэффициента определяется целым рядом соображений, которые подробно будут изложены дальше. Во всяком случае она должна быть такова, чтобы при нормальной работе стержня не только не произошло разрыва, но чтобы не образовалось и остающихся деформаций, могущих изменить схему сооружения или машины. Коэффициент запаса меняется в зависимости от характера применяемого материала, способа действия сил на элемент, экономических условий и ряда других факторов.

2. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ПОДБОР СЕЧЕНИЯ.

Ввиду важности правильного выбора коэффициента запаса прочности и величины допускаемых напряжений эти величины для многих конструкций даются нормами, обязательными для составителей проектов и расчётов. Таким образом, величины допускаемых напряжений [σ] дли каждого случая можно считать известными. Тогда для определения необходимой величины площади поперечного сечения растянутого стержня можно, пользуясь формулой (1), написать *условие прочности*; это условие должно выразить, что действительное напряжение σ в растянутом стержне при действии сил P не должно превосходить допускаемого напряжения [σ]:

. (2)

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]$$

Из этого условия определяется наименьшая необходимая площадь стержня:

. (3)

$$F \geq \frac{P}{[\sigma]}$$

Пользуясь формулой (3), мы можем производить подбор сечения стержня.

Иногда площадь поперечного сечения является заданной. Тогда, решая формулу (3) относительно ***P***, мы производим определение допускаемой силы

. (4)

$$P \leq F[\sigma]$$

2. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ПОДБОР СЕЧЕНИЯ.

Возвращаясь к расчёту стержня вагонной стяжки (рис. 2), мы должны установить материал, идущего для изготовления этой детали, и допускаемое напряжение. Стержень стяжки делается из стали с пределом прочности около 500 н/мм^2. Такой выбор материала определяется тем, что винт стяжки должен быть не очень тяжёлым, — это требует материала повышенной прочности; с другой стороны, в этом направлении нельзя идти слишком далеко, чтобы материал винта мог хорошо сопротивляться ударам и толчкам. Если применить сталь со слишком высоким пределом прочности, она окажется хрупкой.

Винт стяжки не только не должен давать обрыва, но в нём не должно быть даже незначительных остаточных деформаций, чтобы не произошло заедания в нарезке. Предел упругости для выбранного материала составляет примерно 0,60 от предела прочности $\sigma_в$. Как мы увидим дальше, при внезапном приложении сил (движение с места) напряжения увеличиваются примерно вдвое по сравнению со спокойным, статическим растяжением, при котором определяют механические характеристики материала в лаборатории. Поэтому величина допускаемых напряжений не должна превышать

$$0{,}5\cdot 0{,}60\cdot\sigma_в = 0{,}30\cdot\sigma_в.$$

Это даёт коэффициент запаса прочности $k=1/0{,}3\approx 3{,}3$

Таким образом, в данном случае допускаемое напряжение может быть принято равным

$$[\sigma] = \sigma_в/k = 0{,}3\ \sigma_в = 500\cdot 0{,}3 = 150\ н/мм^2 = 15000\ н/см^2$$

Необходимая площадь при P=250000 н равна

$$F\geq P/[\sigma]=250000/15000 = 16{,}7\ см^2.$$

Диаметр d стержня стяжки определяется условием

$$\pi d^2/4=F\geq 16{,}7$$

Откуда

$$d \geq \sqrt{\frac{16{,}7\cdot 4}{\pi}} = 4{,}55 \approx 4{,}5 см$$

2. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ПОДБОР СЕЧЕНИЯ.

Полученный диаметр определён по дну нарезки для наименьшей площади поперечного сечения. В тех случаях, когда площадь отдельных сечений стержня меньше других, например из-за наличия отверстий для болтов или заклёпок, наличия канавок (прорезки), определяется эта наименьшая площадь сечения, называемая площадью нетто и обозначаемая Fнетто или Fн. Площадь поперечных сечений, не имеющих ослаблений, называется площадью брутто и обозначается Fбрутто или Fбр. Определив посредством расчета сечение Fн, размеры Fбр получаем уже из конструктивных соображений.

Выведенные выше формулы относились к случаю растяжения стержня. Без всяких изменений они могут быть применены и к тому случаю, когда мы встречаемся с деформацией сжатия. Разница будет лишь в направлении нормальных напряжений и в величине допускаемого напряжения [σ]; при сжатии стержней явление осложняется тем, что такие стержни могут оказаться неустойчивыми, — они могут внезапно искривиться. Тогда необходимо проверить данный стержень расчетами на устойчивость, о которых мы будем говорить отдельно.

2. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ПОДБОР СЕЧЕНИЯ.

На рис. 5 изображено распределение нормальных напряжений, действующих по сечению, перпендикулярному к оси стержня, для случая растяжения и сжатия. Для ряда материалов (сталь) величина допускаемого напряжения может быть принята одинаковой как при растяжении, так и при сжатии (коротких стержней, т. е. таких, у которых длина превышает размеры поперечного сечения не более чем в 5 раз). В других случаях (чугун) приходится назначать различные величины допускаемых напряжений для растяжения и сжатия в зависимости от величины предела прочности при этих деформациях.

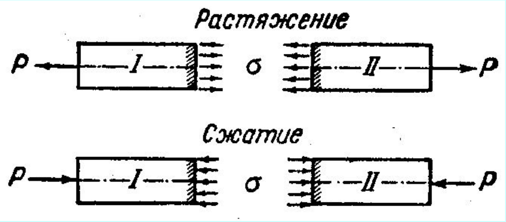


Рис.5

В ряде конструкций мы встречаемся со случаем передачи сжимающих напряжений от одного элемента другому через сравнительно небольшую площадь, по которой соприкасаются между собой эти элементы. Подобные напряжения называют обыкновенно напряжениями смятия или контактными напряжениями. Распределение напряжений около места соприкосновения весьма сложно и поддаётся определению лишь методами теории упругости. При обычных расчетах рассматривают в большинстве случаев эти напряжения просто как сжимающие и ограничиваются лишь назначением для них специального допускаемого напряжения.

3. Деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука.

Для того чтобы иметь полную картину работы растянутого или сжатого элемента, необходимо иметь возможность вычислить, как будут меняться его размеры.

Соответствующие законы можно получить лишь на основании опытов с растяжением и сжатием образцов изучаемого материала; эти же опыты дают возможность изучать и прочность материала, определять его предел прочности и другие характеристики.

Для осуществления подобных опытов в лабораториях пользуются специальными машинами, позволяющими деформировать образцы и доводить их до разрушения, измеряя требуемую для этого величину усилий.

Одновременно при помощи достаточно точных измерительных приборов — тензометров — производят измерения деформаций образцов. Предельные нагрузки, которые можно в настоящее время осуществлять при помощи испытательных машин и точно измерять, достаточно велики. Существуют испытательные прессы, силой до 50000кн, на которых можно испытывать на сжатие целые части конструкций (колонны, части стен); что касается испытаний на растяжение, то лаборатории располагают машинами, позволяющими осуществлять растягивающие усилия до 15000кн. В большинстве современных лабораторий пользуются машинами гораздо меньшей силы — от 5 до 100 т на растяжение и до 200…500 т на сжатие.

3. Деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука.

Пользуясь такими машинами и приборами, можно установить, как будут меняться размеры образцов материала при растяжении и сжатии. Если мы будем наблюдать, как изменяется расстояние l между двумя точками A и B (рис. 6) при растяжении образца, то увидим, что по мере увеличения нагрузки увеличивается и расстояние между намеченными точками.

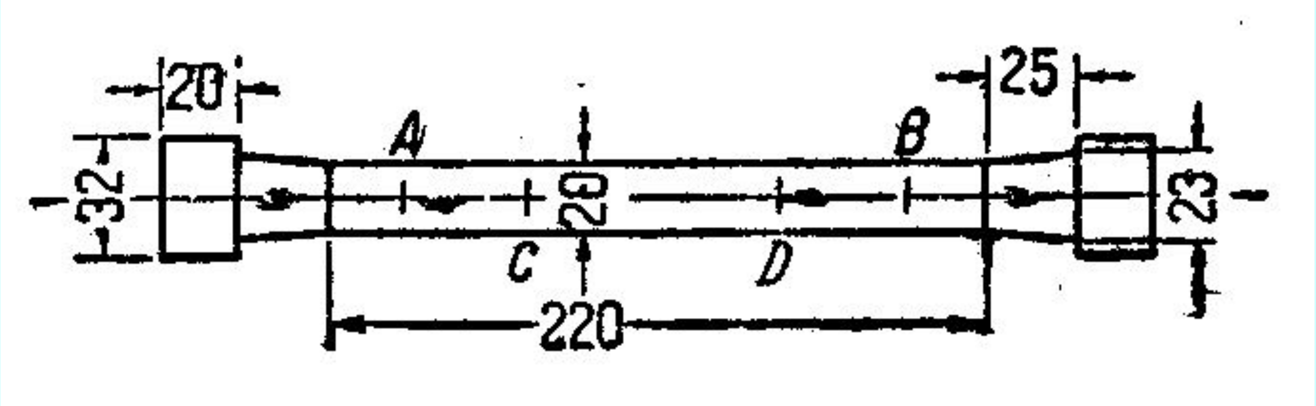


Рис. 6

3. Деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука.

В таблице даны результаты одного из опытов по растяжению стержня, вырезанного из рельса. Нагрузка, при которой было произведено первоначальное измерение длины между двумя намеченными точками стержня, равнялась 0,5 т. Далее эта нагрузка увеличивалась ступенями тоже по 0,5т. При каждом увеличении нагрузки измерялось специальным точным прибором, называемым тензометром, приращение Δl длины l (100 мм) между намеченными точками. Таким образом, например, при увеличении от 1,5 до 2,0 т эта длина увеличилась на $13{,}4 \cdot 10^{-3}$ мм. Величины этих приращений Δl при каждой ступени нагрузки даны в таблице.

Данные опытных наблюдений.

Нагрузки в тоннах	Удлинения от каждой ступени нагрузки в 10^{-3} *мм*	Полные удлинения в 10^{-3} *мм*	Нагрузки в тоннах	Удлинения от каждой ступени нагрузки в 10^{-3} *мм*	Полные удлинения в 10^{-3} *мм*
0,5					
1,0	14,5	14,5	5,0	13,7	123,4
1,5	13,7	28,2	5,5	13,6	137,0
2,0	13,4	41,6	6,0	14,4	151,4
2,5	13,5	55,1	6,5	14,6	166,0
3,0	13,7	68,8	7,0	17,5	183,5
3,5	13,4	82,2	7,5	36,3	219,8
4,0	13,6	95,8	8,0	328,2	548,0
4,5	**13,9**	109,7	8,5	361,0	909,0

Примечание. Расчётная длина ***l*=100** *мм.* Площадь поперечного сечения *F*= 191,2 *мм*^{2}.

3. Деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука.

Анализ результатов таблицы 1 показывает, что:

1) в начале опыта увеличение длины идёт пропорционально увеличению нагрузки; каждому приращению нагрузки в 0,5 т соответствует приращение длины примерно на одну и ту же (в пределах точности опыта) величину, а именно 13,6·10-3 мм (в среднем);

2) эта пропорциональность нарушается, когда нагрузка достигла известного предела, в данном случае 5,5т; за этим пределом деформации (удлинение образца) растут быстрее, чем нагрузки.

Если мы полученные в этом опыте результаты изобразим графически, откладывая нагрузки по вертикали, а соответствующие удлинения участка АВ—по горизонтали, то в известных пределах (в данном случае до нагрузки в 5,5 т) получим прямую, показывающую пропорциональность между силой и вызванным ею удлинением (рис. 7). Нагрузка, после достижения которой нарушается пропорциональность между приращением нагрузки и приращением удлинения, называется нагрузкой, соответствующей пределу пропорциональности. Напряжение же, вызванное этим грузом, называется пределом пропорциональности. Оно получается делением величины этой силы на площадь поперечного сечения растягиваемого образца.

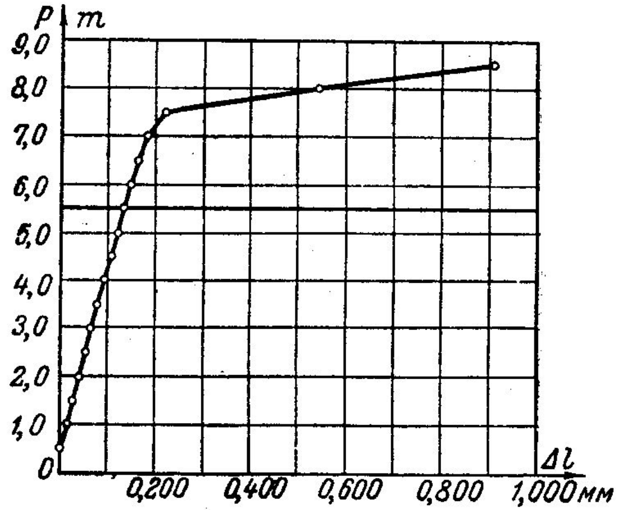


Рис. 7

3. Деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука.

Если мы, повторяя опыт, будем измерять увеличение длины между двумя другими точками C и D, нанесёнными на расстоянии, вдвое меньшем длины AB, то приращения длины CD от тех же ступеней нагрузки будут вдвое меньше приращений длины AB.

Если же мы повторим опыты со стержнями из того же материала, но с иной площадью поперечного сечения, то увидим, что удлинения меняются обратно пропорционально площади.

Таким образом, опыты приводят к заключению, что пока нагрузка на образец не достигла известного предела, удлинение прямо пропорционально растягивающей силе *P*, длине образца *l* и обратно пропорционально площади поперечного сечения F. Обозначая через Δl приращение длины образца от силы *P*, можем написать формулу, связывающую между собой эти опытные данные:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F}$$

где E — коэффициент пропорциональности, различный для разных материалов. Величина ***Δl*** называется *абсолютным удлинением* стержня от силы ***P***. Формула (2.5) носит название ***закона Гука***, по имени учёного, впервые открывшего этот закон пропорциональности в 1660 г. Зависимость (5) можно представить в ином виде. Разделим обе части этой формулы на первоначальную длину стержня ***l***:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{E \cdot F}$$

отношение ***Δl/l*** — абсолютного удлинения к первоначальной длине — называется *относительным удлинением* оно и обозначается буквой ε.

3. Деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука.

Относительное удлинение является отвлечённой величиной, как отношение двух длин Δl и l, и по своему числовому значению равно удлинению каждой единицы длины стержня. Подставив в предыдущую формулу вместо $\Delta l/l$ величину ε, а вместо P/F — величину нормального напряжения σ, получаем иное выражение закона Гука:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (6)$$

или

$$\sigma = \varepsilon \cdot E. \qquad (7)$$

Таким образом, нормальное напряжение при растяжении или сжатии прямо пропорционально относительному удлинению или укорочению стержня.

Коэффициент пропорциональности E, связывающий нормальное напряжение и относительное удлинение, называется *модулем упругости* при растяжении материала. Чем *больше* эта величина, тем *менее* растягивается стержень при прочих равных условиях (длине, площади, силе P). Таким образом, физически модуль E характеризует *сопротивляемость* материала упругой *деформации* при растяжении.

Так как ε — относительное удлинение — является отвлечённой величиной, то из формулы (7) следует, что модуль выражается в тех же единицах, что и напряжение σ, т. е. в единицах силы, делённых на единицу площади.

3. Деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука.

Надо заметить, что величина модуля упругости материала ***E*** даже для одного и того же материала не является постоянной, а несколько колеблется. Для некоторых материалов величина модуля оказывается одинаковой как при растяжении, так и при сжатии (сталь, медь), в других случаях — различной для каждой из этих деформаций. В обычных расчётах этой разницей пренебрегают и принимают для громадного большинства материалов одно и то же значение Е как при растяжении, так и при сжатии.

Надо иметь в виду, что закон Гука представлен формулой, которая только приближённо отражает результаты опытов, схематизируя их, поэтому он не представляет собой совершенно точной зависимости.

Все материалы при растяжении или сжатии дают величины деформаций, более или менее отклоняющиеся от этого закона. Для некоторых материалов (большинство металлов) эти отклонения ничтожно малы, и можно считать, что осуществляется полная пропорциональность между деформацией и нагрузкой; для других (чугун, камень, бетон) — отклонения значительно больше.

Однако для практических целей мы можем пренебречь наблюдающимися небольшими отклонениями от формул и пользоваться ими при вычислении деформаций стержней.

3. Деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука.

Средние величины модуля Е для ряда материалов даны в таблице. Более подробные данные приведены в справочниках по сопротивлению материалов.

Значения модуля упругости..

Наименование материала	Е в миллионах кг/см^2
Сталь	2,0
Чугун (серый, белый)	1,15…1,60
Медь и её сплавы (латунь, бронза)	1,0
Алюминий и дуралюмин	0,7
Каменная кладка:	
из гранита	0,09
из известняка	0,06
из кирпича	0,03
Бетон	0,1…0,3
Дерево:	
вдоль волокон	0,1
поперёк волокон	0,005
Каучук	0,00008
Целлулоид	0,0174…0,0193

3. Деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука.

Из рассмотрения формулы

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F}$$

ясно, что чем больше её знаменатель, тем менее растяжим (податлив) или, как говорят, тем более жёсток стержень, поэтому знаменатель формулы, величина E·F, называется жёсткостью стержня при растяжении или сжатии. Мы видим, что жёсткость при растяжении или сжатии зависит, с одной стороны, от материала стержня, характеризуемого величиной его модуля упругости E, а с другой стороны, от размеров поперечного сечения стержня, характеризуемых величиной площади его поперечного сечения F. Иногда бывает удобно пользоваться понятием относительной жёсткости, которая равна E·F/l, т. е. отношению жёсткости к длине стержня.

Формулы (5) и (6) позволяют определить удлинения и укорочения, которые получает тот или иной стержень конструкции при растяжении или сжатии. Обратно, зная эти удлинения, размеры и материал стержня, можно вычислить нормальные напряжения, которые в нём возникают. Таким образом, для вычисления напряжений σ мы имеем два пути: если известны внешние силы P, растягивающие или сжимающие стержень, то σ вычисляется по формуле

(1), $$\sigma = \frac{P}{F}$$

если же внешние силы неизвестны, а можно измерить удлинение стержня, то σ определяется формулой

$$\sigma = \varepsilon \cdot E. \quad (7)$$

Величина относительного удлинения может быть вычислена, если мы измерим абсолютное удлинение ***Δl*** участка стержня длиной ***l*** и применим формулу

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

4. Коэффициент поперечной деформации

Стержни, работающие на растяжение или сжатие, испытывают помимо продольных деформаций и поперечные.

Как показывает опыт, при растяжении бруска (рис. 8) длина его увеличивается на величину Δl, ширина же уменьшается на величину

$$\Delta b = b - b1 \,.$$

Относительная продольная деформация равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

относительная поперечная деформация равна

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b}$$

При сжатии бруска продольной деформацией является укорочение, поперечной — удлинение.

Опыты показывают, что для большинства материалов ε_1 в 3…4 раза меньше, чем ε.

Абсолютная величина отношения относительной поперечной деформации ε_1 к относительной продольной ε называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона μ:

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \quad (8)$$

Коэффициент поперечной деформации μ, так же как и модуль упругости ***E***, является характеристикой упругих свойств материала. Для материалов, упругие свойства которых одинаковы во всех направлениях, упругие постоянные E и μ полностью характеризуют эти свойства. Такие материалы называют *изотропными*. С достаточной для целей практики точностью к ним могут быть отнесены сталь и другие металлы, большинство естественных камней, бетон, каучук, неслоистые пластмассы.