Нелинейные геометрии. СТО. История создания ОТО

ОТО

В геометрии ничего не изменится, если слова «точка», «прямая и «плоскость» заменить словами «стол», «стул» и «пивная кружка».

Гильберт

Общая теория относительности (ОТО) — физическая теория пространства-времени и тяготения, основана на экспериментальном принципе эквивалентности гравитационной и инерционной масс и предположении о линейности связи между массой и вызываемыми ею гравитационными эффектами.

Представления о тяготении И.Ньютона

- абсолютно все оказывает воздействие на абсолютно все во Вселенной;
- воздействие представляет собой силу тяжести (тяготения), которая является силой притяжения;
- независимо от физической структуры, все оказывает и все испытывает воздействие силы тяготения;
- из анализа проведенного И.Кеплером изучения движения планет следует, что сила притяжения между двумя телами больше для тел большей масс; она увеличивается при уменьшении расстояния;
- Сила тяготения — дальнодействующая, действует мгновенно на любом расстоянии

Классические представления о пространстве и времени

- пространство – бесконечно, однородно, изотропно, пусто, трехмерно, евклидово;
- время – бесконечно, однородно, однонаправленно.

Принцип относительности Галилея: ***во всех инерциальных системах отсчета законы механики формулируются одинаково. Это значит, что никакими механическими опытами внутри лаборатории нельзя установить, покоится ли она относительно главной системы или же движется относительно нее равномерно-прямолинейно.***

Геометрия Евклида

Геометрия Евклида - параболическая, радиус кривизны $R=0$

Геометрия на плоскости (Евклидова) основывается на пяти основных постулатах:

1.Из каждой точки к каждой точке можно провести прямую линию, и притом только одну.

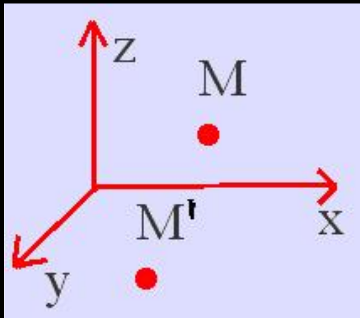
2.Отрезок можно непрерывно продолжить до прямой.

3.Из любого центра любым радиусом можно описать окружность.

4.Все прямые углы равны друг другу.

5.Через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной.

Евклидово пространство - это пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. Это n-мерное векторное пространство, в котором возможно ввести некоторые специальные координаты



Кривизна пространства Гаусса

Кривизна пространства Гаусса рассчитывается по формуле

$$K=1/R_1R_2$$

Если взять кривую поверхность и провести к какой-то точке касательную, затем построить в точку касания отрезок, перпендикулярный касательной плоскости, то получим нормаль.

Проведем через нормаль плоскость, точки пересечения двух плоскостей образуют часть окружности, наиболее плотно прилегающей к поверхности (для сферы – полную поверхность).

Т.к. можно провести сколько угодно плоскостей, то будут построены окружности с минимальным R_1 и максимальным R_2 радиусом. Можно посчитать Гауссову кривизну пространства:
Если К>0, то поверхность в этой точке эллиптическая.
Если К<0, то гиперболическая.
Если К=0, то параболическая.

Метрикой какого-либо геометрического объекта — поверхности, пространства, гиперпространства — называется закон определения расстояния между двумя точками этого объекта. Она определяет те главные свойства геометрического объекта, которые связаны с измерениями, - и

Пространства Гаусса

- ✔ Сечение плоскости плоскостями всегда дает прямые. Кривизна прямой всегда равна нулю. Значит, кривизна плоскости тоже всегда равна нулю.
- ✔Полная кривизна цилиндрической поверхности тоже равна нулю, т.к. одно из взаимно перпендикулярных сечений будет окружностью (сечение, перпендикулярное образующей цилиндра), а второе — прямой (сечение по образующей). Кривизна первой положительна, а второй — нулевая, их произведение даст нуль.
- ✔ У шара обе кривизны всегда положительны. Значит, будет положительной и полная кривизна.
- ✔ Поверхность постоянной отрицательной кривизны — псевдосфера («ложная сфера», «антисфера») два главных радиуса всегда имеют противоположные знаки — один «плюс», а другой «минус», произведение их всегда будет отрицательным. Еще одна из псевдосферических поверхностей похожа на седло - одна кривая сечения будет выпуклой, с положительной кривизной, то перпендикулярная ей кривизна окажется обязательно вогнутой — с отрицательной кривизной.

Главное свойство гауссовой кривизны — величина ее не меняется при любом изгибании поверхности, если та при этом не будет растягиваться или сжиматься. Цилиндр можно разрезать по образующей и развернуть — он превратится в кусок плоскости, где кривизна, равна нулю.

Нелинейные геометрии Лобачевского-Римана

***Геометрия Лобачевского,-
гиперболическая, радиус кривизны $R=-1$***

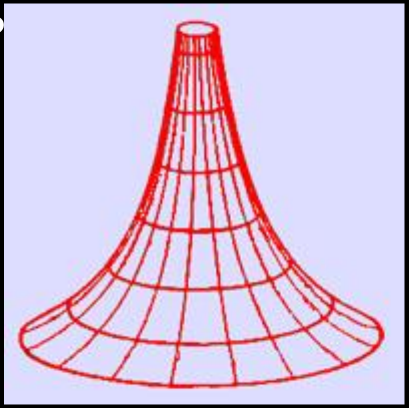
Аксиома о параллельных Н.И.Лобачевского: ***Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её.***

Лобачевский Н.И.

Геометрия на куске плоскости Лобачевского совпадает с геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны (псевдосфере).

Геометрия Лобачевского в пространстве может быть определена как геометрия внутри шара:

- Хорды – «прямые»;
- Плоские сечения внутри шара – "плоскости";
- Фигуры, которые переводятся одна в другую преобразованиями, переводящими шар в себя и хорды в хорды, – "равные фигуры;
- Сумма внутренних углов любого треугольника меньше двух прямых.



Псевдосфера

Нелинейная геометрия Лобачевского

- Если прямые имеют общий перпендикуляр, то они бесконечно расходятся в обе стороны от него. К любой из них можно восстановить перпендикуляры, которые не достигают другой прямой.
- Не существует подобных, но неравных треугольников; треугольники равны, если их углы равны.
- Сумма углов всякого треугольника меньше 2π и может быть сколь угодно близкой к нулю.
- Линия равных расстояний от прямой не есть прямая, а особая кривая, называемая эквидистантой, или *гиперциклом*.
- Предел окружностей бесконечно увеличивающегося радиуса не есть прямая, а особая кривая, называемая *предельной окружностью*, или *орициклом*.
- Длина окружности не пропорциональна радиусу, а растёт быстрее. В частности, в геометрии Лобачевского число не может быть определено как отношение длины окружности к её диаметру.

Нелинейные геометрии Лобачевского-Римана

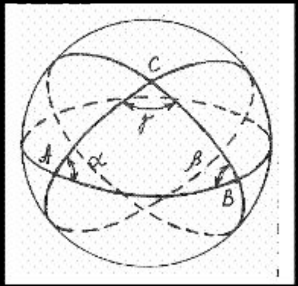
Геометрия Римана – эллиптическая , радиус кривизны $R=+1$

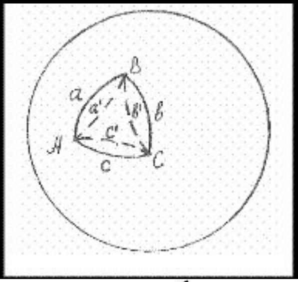
Через точку, лежащую вне прямой, невозможно провести ни одной прямой, параллельной первой".

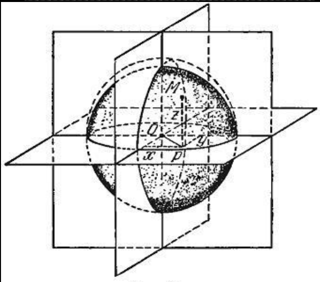
Риман: метрические отношения следует искать и фиксировать в бесконечно малой области пространства

Риман Георг Ф. Б

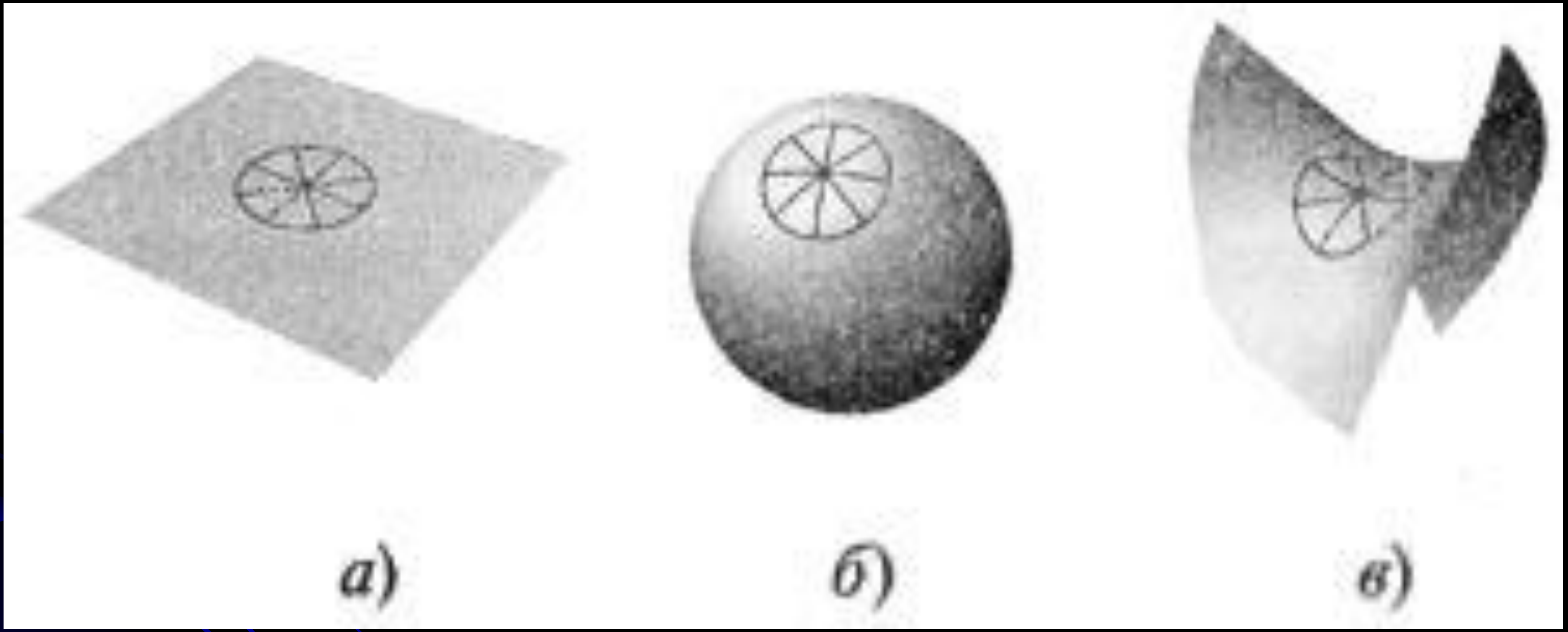
- Две прямые всегда пересекаются, параллельных прямых нет.
- Сумма углов прямолинейного треугольника больше 180°.
- Прямая имеет конечную длину, плоскость – конечную площадь.
- Расстояние между двумя точками на сфере - длина меньшей из 2х дуг большой окружности, соединяющей эти точки.
- Роль прямых линий на сфере (самых коротких линий, соединяющих две точки сферы) играют большие окружности - сечения сферы плоскостями, проходящими через ее центр.
- Углы между большими окружностями, как и углы между любыми другими линиями на сфере, равны углам между касательными к этим линиям в точках пересечения.
- Роль треугольников и многоугольников в сферической геометрии играют сферические треугольники и многоугольники, образованные дугами больших окружностей.
- Окружности в сферической геометрии - малые окружности,



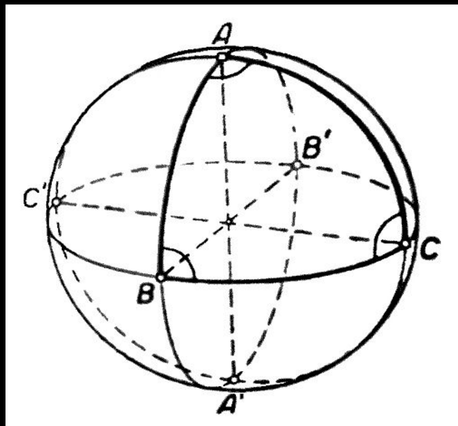




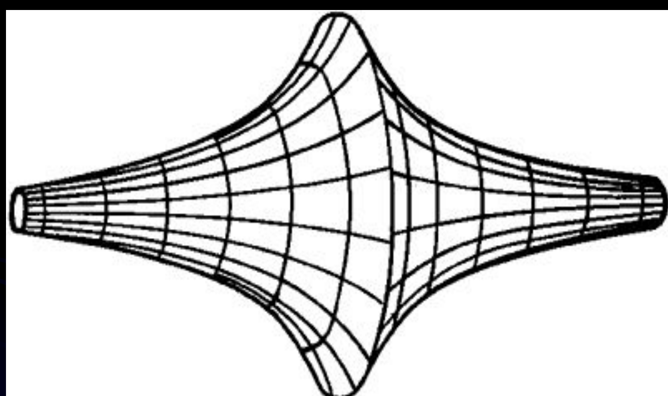
Окружность в евклидовом, сферическом и гиперболическом пространствах



Модели Б. Римана, Н.И. Лобачевского

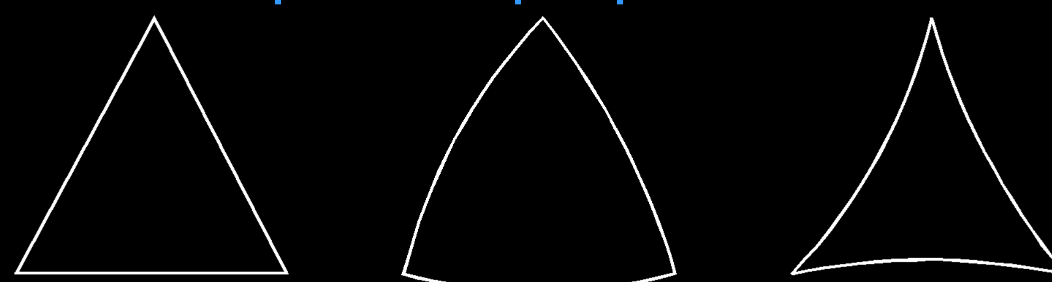


Модель пространства Б. Римана обладает положительной кривизной. В данной космологической модели прямая определяется двумя точками, плоскость - тремя, две плоскости пересекаются по прямой и т.д., но через данную точку нельзя провести к прямой ни одной параллельной.



Модель пространства Н. И. Лобачевского, также известна как пространство - псевдосфера, описываемой неэвклидовой геометрией (геометрией Н. И. Лобачевского). Характеризуется отрицательной кривизной.

Наглядное сравнение степеней кривизны пространства:



а б в

а - геометрия Эвклида, сумма углов ▲=180°

б - пространство Б.Римана, сумма углов ▲>180°

в - пространство Н.И.Лобачевского, сумма углов ▲<180°

Сопоставление геометрий Евклида, Лобачевского, Римана

Риман: метрические отношения следует искать и фиксировать в бесконечно малой области пространства

Евклид	Лобачевский	Риман
2 точки определяют единственную прямую.		
2 прямые пересекаются в единственной точке.		
Через точку вне прямой проходит одна параллельная прямая	Через точку вне прямой проходит сколько угодно параллельных прямых	Параллельных прямых нет - все прямые пересекаются
Сумма углов треугольника:		
Равна 180	Меньше180	Больше 180
Существуют подобные треугольники; стороны не выражаются через углы	Не существует подобных треугольников; стороны выражаются через углы	
Площадь треугольника:		
Не выражается через углы	S=k(p - s), где s -сумма углов треугольника	S=k (s - p), где s -сумма углов треугольника

Пространство Минковского

Введено А.Пуанкаре и Г. Минковским в 1907-08 гг.

Пространство Минковского - четырёхмерное пространство, объединяющее физическое трёхмерное пространство и время.

Точки в пространстве Минковского соответствуют «событиям» специальной теории относительности.

А.Пуанкаре первым установил и детально изучил одно из самых важных свойств преобразований Лоренца — их групповую структуру, и показал, что" *преобразования Лоренца представляют не что иное, как поворот в пространстве четырех измерений, точки которого имеют координаты*

Положение события в пространстве Минковског
задаётся четырьмя координатами — **тремя пространственными и одной временной:** x, y,
где x, y, z — прямоугольные декартовы координа
события в некоторой инерциальной системе отсчёта, и координата ct, где t — время события, c — скорость света.

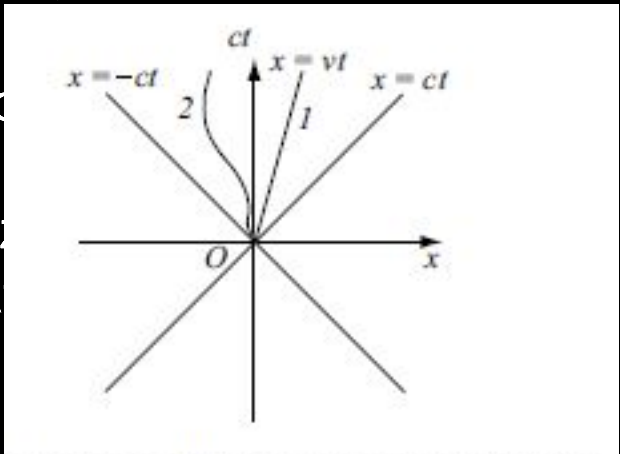


Диаграмма Минковского и мировые линии

Термины гиперболической геометрии

Множество мировых точек, описывающее движения частицы (материальной точки) во времени, называется **мировой линией**.

Интервал в пространстве Минковского $s = \sqrt{(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$ играет роль, аналогичную роли расстояния в геометрии евклидовых пространств. Квадрат интервала не всегда положителен, также между различными событиями интервал может быть равен нулю. Множество всех векторов с нулевым квадратом интервала образует коническую поверхность и называется ***световым конусом.***

Основной инвариант пространства Минковского — квадрат длины четырёхмерного вектора, соединяющего две точки — события, не меняющийся при вращениях в пространстве, и равный по величине (но противоположный по знаку) квадрату четырёхмерного ин $s^2 = c^2t^2 - x^2$ иальной теории относительности: (для одномерного случая)

Вектор, лежащий внутри светового конуса, называется **времениподобным вектором**, вне светового конуса — **пространственноподобным**.

Интервал между двумя событиями, через которые проходит мировая линия инерциального наблюдателя, делённый на , называется его **собственным временем (**совпадает со временем, измеренным движущимися вместе с наблюдателем часами). Для неинерциального наблюдателя собственное время между двумя событиями соответствует интегралу от интервала вдоль мировой линии.

Термины гиперболической геометрии

Если вектор, соединяющий мировые точки, *временниподобен*, то существует система отсчета, в которой ***события происходят в одной и той же точке трёхмерного пространства.***

Если вектор, соединяющий мировые точки двух событий, *пространственноподобен,* то существует система отсчета, в которой эти два **события происходят одновременно**; они не связаны причинно-следственной связью; модуль интервала определяет простран-ственное расстояние между этими точками (событиями) в этой системе отсчета.

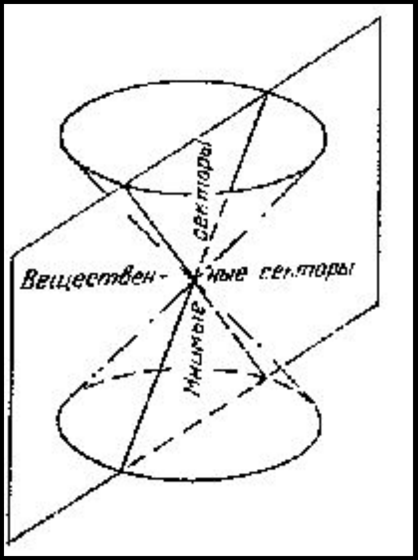
Множество всех мировых линий света, исходящих из данной мировой точки, как правило, рассматриваемые в совокупности со всеми входящими, образует **двухполостную коническую гиперповерхность**, инвариантную относительно преобразований Лоренца, называемую **изотропным** или **световым конусом**. Эта гиперповерхность разделяет причинное прошлое данной мировой точки, её причинное будущее и причинно независимую с данной мировой точкой (пространственноподобную) область пространства Минковского.

Касательный вектор к мировой линии любого обычного физического тела является **времениподобным вектором.** Касательный вектор к мировой линии света (в вакууме) является **изотропным вектором.** Кривая, касательный вектор к которой в каждой ее точке времениподобен, называется **времениподобной линией.** Аналогично определяются **пространственноподобные** и **изотропные линии**.

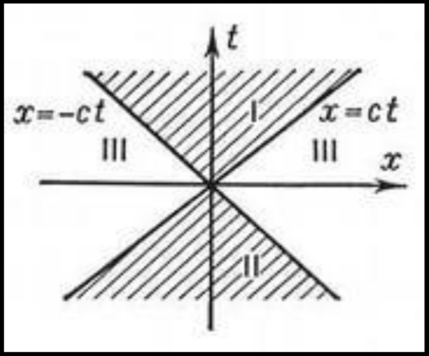
Гиперповерхность, все касательные векторы которой *пространственноподобны,* называется **пространственноподобной гиперповерхностью** (на ней задаются начальные условия), если же в каждой точке гиперповерхности найдется *времениподобный* касательный вектор, такая поверхность называется

Пространство Минковского

В геометрии Минковского уравнению $t^2 - x^2 - y^2 = 0$ соответствуют две чашеобразные поверхности, расположенные на «единичном расстоянии» от начала координат («расстоянию» в геометрии Минковского соответствует реальное время, т. е. время, измеряемое в физическом эксперименте при помощи движущихся часов). Внутренняя геометрия является гиперболической - пространством Лобачевского.



Группой движений пространства Минковского, то есть группой преобразований, сохраняющих метрику, является 10-параметрическая *группа Пуанкаре*, состоящая из 4 трансляций — 3 пространственных и 1 временно́й, 3 чисто пространственных вращений и 3 пространственно-временных вращений, иначе называемых *бустами*. Последние 6, взятые вместе, образуют подгруппу группы Пуанкаре — *группу преобразований Лоренца*. Таким образом, пространство Минковского является четырёхмерным метрическим пространством наивысшей возможной степени симметрии.



События в пространстве Минковского

Событие находящееся за пределом светового конуса относительно данного, не связано с ним причинно-следственными связями.
На рис. все точки верхнего сектора, исходящего из точки A, включая ограничивающие его изотропные прямые y = x и y = - x, находятся в области абсолютного будущего по отношению к точке A, а все точки нижнего сектора вместе с ограничивающими его изотропными прямыми - в области абсолютного прошлого. Из каждой точки псевдоевклидовой плоскости исходят два сектора: сектор абсолютного прошлого и сектор абсолютного будущего.
Точки, лежащие на одной мировой линии, находятся во временной последовательности. Для точек, не лежащих на одной мировой линии, последовательность событий нарушается.

Траектория частицы с отличной от нуля массой временеподобна - такая кривая в случае пространства Минковского целиком лежит внутри светового конуса с вершиной в любой точке на ней.