ЛЕКЦИЯ 2.

13 февраля 2004г.

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Примеры расчета магнитных полей:

- магнитное поле на оси кругового тока.

2. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\vec{B}$

3. Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

4. Примеры расчета магнитных полей:

- магнитное поле соленоида.

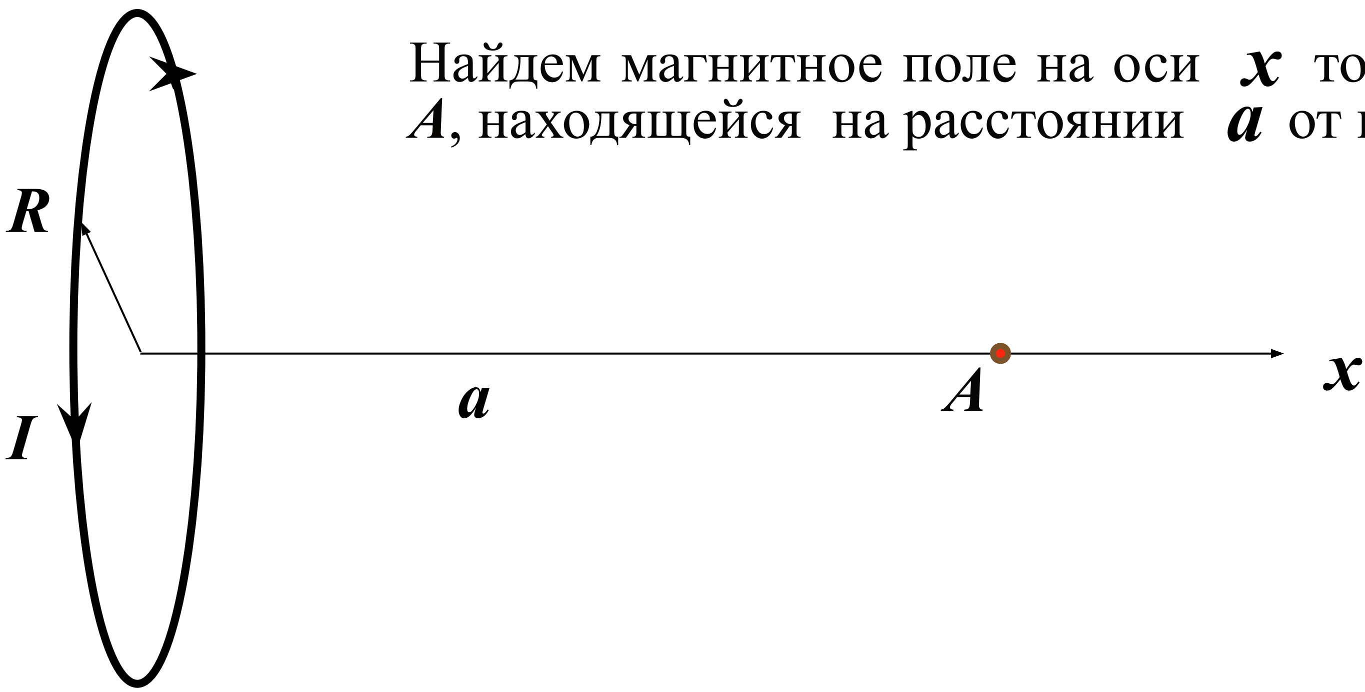
- магнитное поле тороида (самостоятельно).

Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле на оси кругового тока

Пусть электрический ток силой $\boldsymbol{I}$ течет по проводнику радиусом $\boldsymbol{R}$.

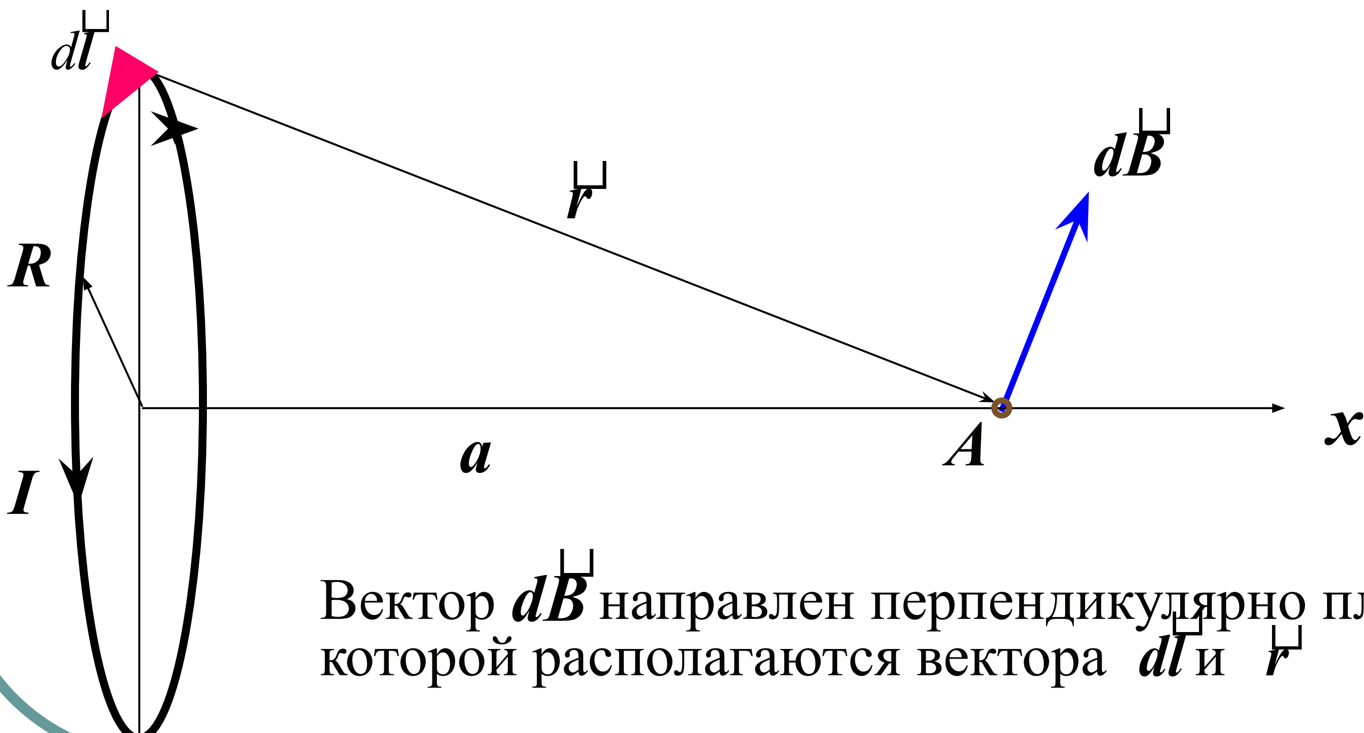
Найдем магнитное поле на оси $\boldsymbol{x}$ тока в точке $\boldsymbol{A}$, находящейся на расстоянии $\boldsymbol{a}$ от центра



Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей

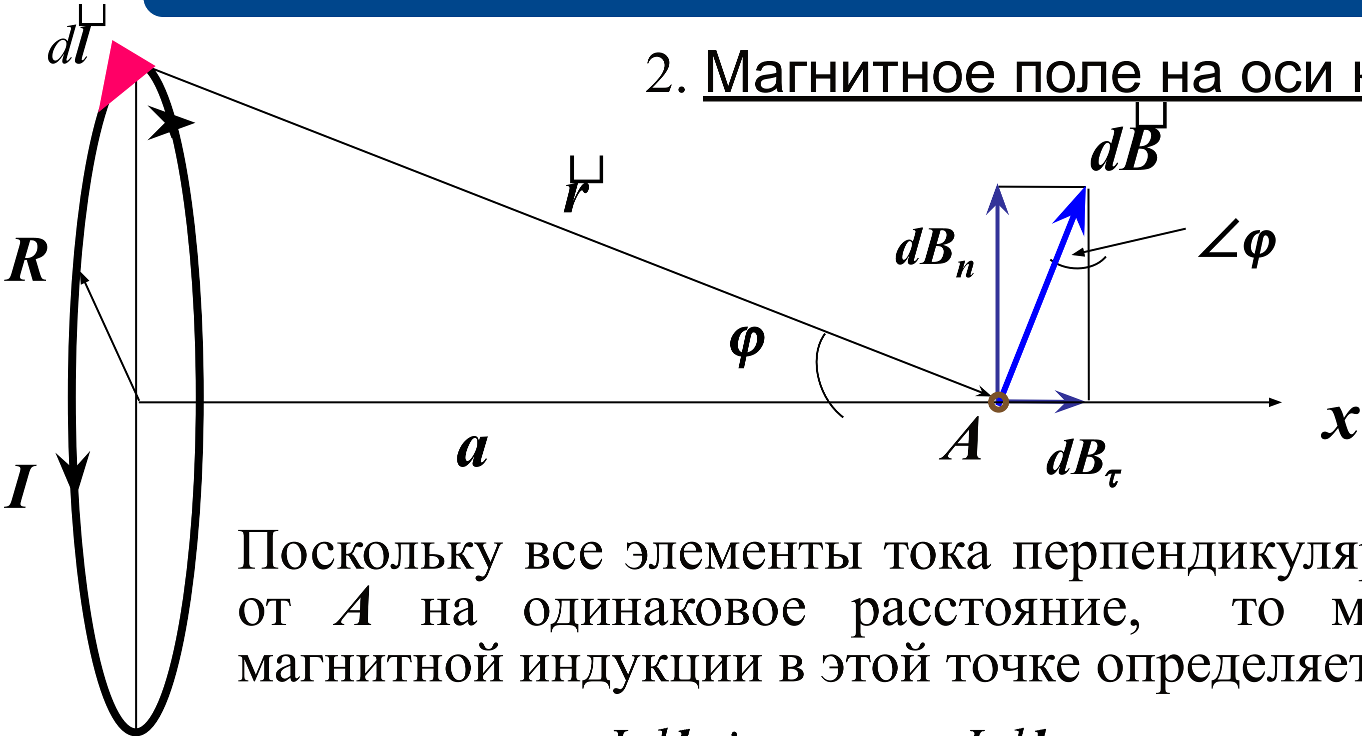
2. Магнитное поле на оси кругового тока

Разобьем круговой ток на элементы тока длиной $d\vec{l}$ и проведем от произвольного элемента тока радиус-вектор $\vec{r}$ в точку ***A*.**



Вектор $d\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой располагаются вектора $d\vec{l}$ и $\vec{r}$

Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей



2. Магнитное поле на оси кругового тока

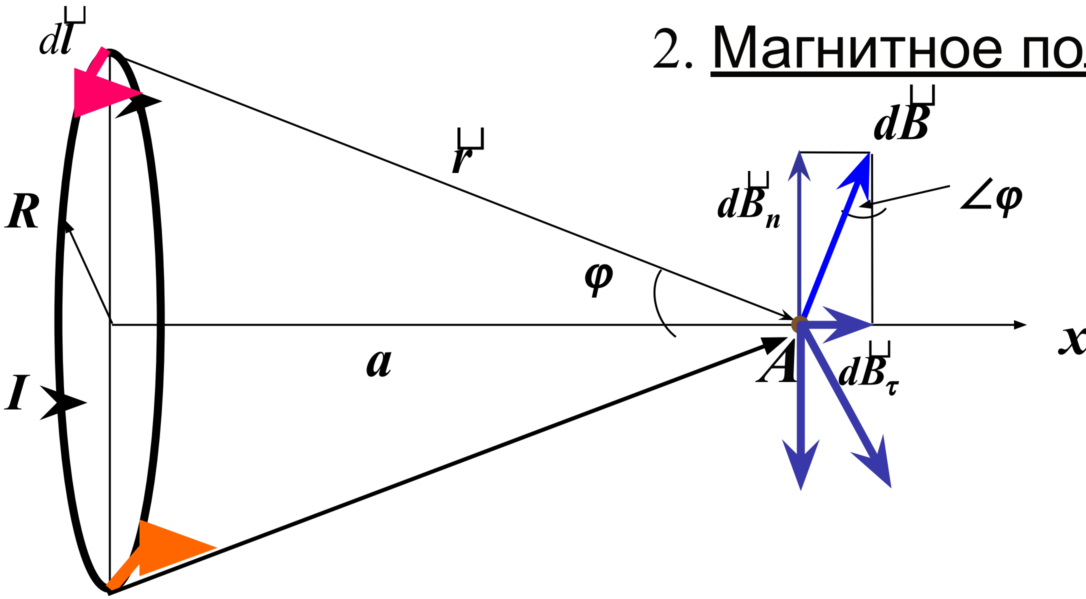
Поскольку все элементы тока перпендикулярны и удалены от A на одинаковое расстояние, то модуль вектора магнитной индукции в этой точке определяется выражением

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\,\sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2} \qquad \left(\alpha = 90^0,\ \sin 90^0 = 1\right)$$

Разложим вектор $d\vec{B}$ на две составляющие: $d\vec{B}_\tau$ и $d\vec{B}_n$

Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей

2. Магнитное поле на оси кругового тока



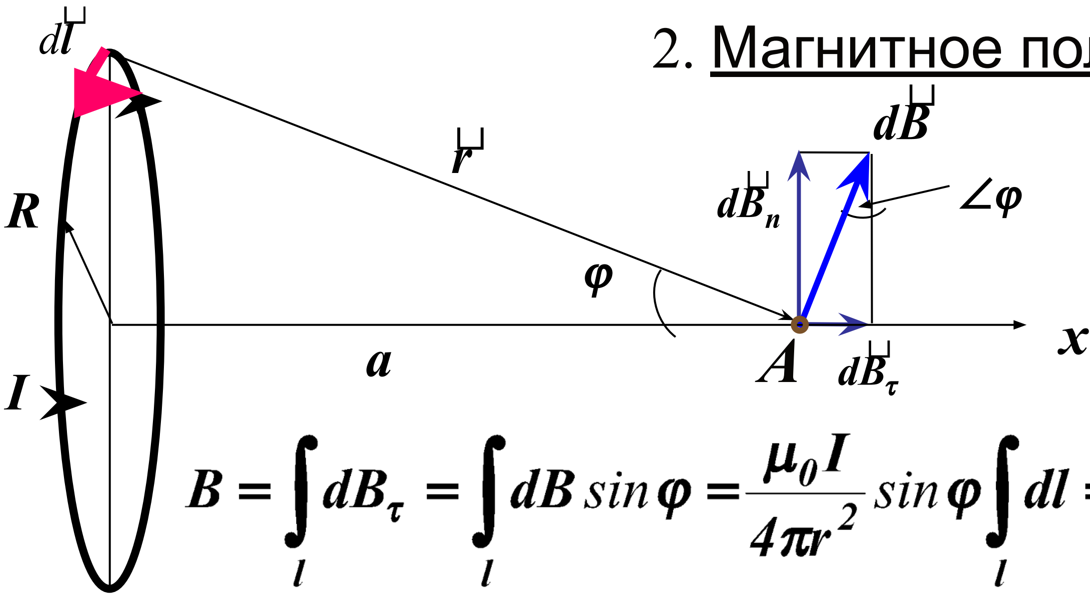
Любые два противоположных элемента тока создают поле, составляющие $d\vec{B}_n$ которых равны по величине и противоположно направлены.

Следовательно, эти составляющие уничтожают друг друга

Поэтому вектор магнитной индукции можно определить, просуммировав составляющие модулей вектора $d\vec{B}_\tau$(этот вектор направлен вдоль положительной нормали к контуру с током)

Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей

2. Магнитное поле на оси кругового тока



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}$$

$$B = \int_l dB_\tau = \int_l dB\sin\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\varphi\int_l dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\varphi\, 2\pi R = \frac{\mu_0 IR}{2\pi r^2}\sin\varphi$$

Преобразуем полученное выражение, учитывая, что $\sin\varphi = \dfrac{R}{r}$, $r^2 = R^2 + a^2$. После подстановки получим

$$B = \frac{\mu_0 IR}{2r^2}\sin\varphi = \frac{\mu_0 IR}{2\left(R^2+a^2\right)}\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+a^2\right)^{3/2}}$$

Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

2. Магнитное поле на оси кругового тока

В центре кругового тока $a = 0$, индукция магнитного поля равна

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Вдали от контура на оси x ($a >> R$):

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2a^3}$$

Если умножить числитель и знаменатель этого выражения на π, получим:

$$B = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{2\pi a^3} = \frac{\mu_0 I S}{2\pi a^3}$$

где $S = \pi R^2$ - площадь, охватываемая круговым током.

Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей

2. Магнитное поле на оси кругового тока

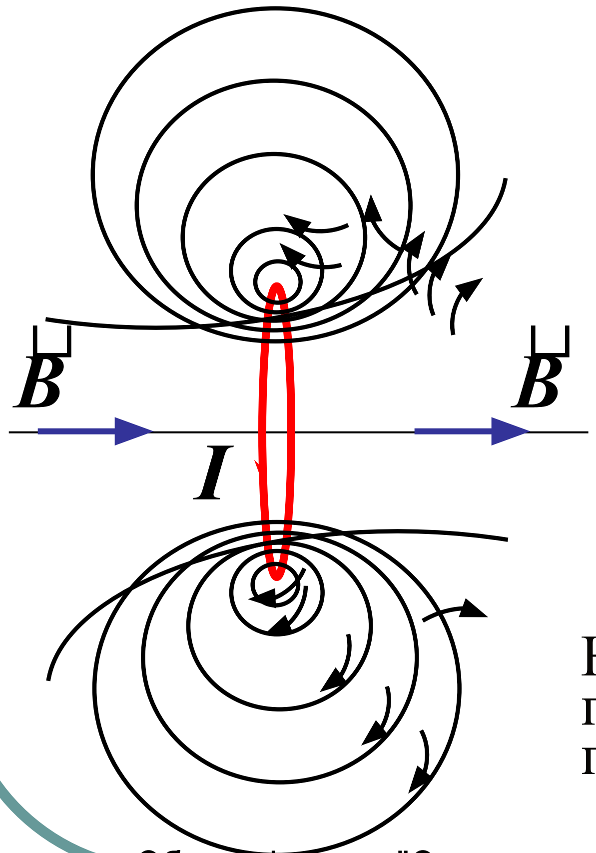
Учитывая, что произведение **IS** для контура с током есть *магнитный момент контура*, введенный нами ранее, выражение для индукции магнитного поля, созданного замкнутым круговым током вдали от тока, можно записать в виде:

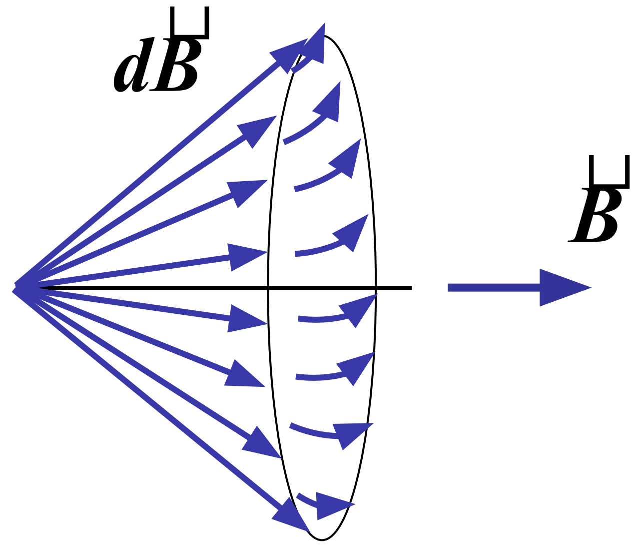
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi r^3}$$

Записывая это соотношение приняли, что вдали от кругового тока $a \approx r$.

Графическое изображение магнитного поля кругового тока

Покажем линии магнитной индукции поля кругового тока, лежащие в одной из плоскостей, проходящей через ось тока





Направления векторов индукции магнитного поля, в точке, лежащей на оси, которая проходит через центр кругового тока.

Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\vec{B}$

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку S называется величина

$$\Phi_B = BS\cos\alpha = B_n S,$$

где α- угол между нормалью к площадке и вектором магнитной индукции, B_n- проекция вектора $\vec{B}$ на нормаль к площадке.

Магнитный поток через площадку, в зависимости от ориентации вектора $\vec{B}$ по отношению к нормали, может быть как положительным, так и отрицательным, что определяется знаком проекции B_n.

Единицей магнитного потока в системе СИ является *вебер* (**Вб**).

Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\vec{B}$

Магнитный поток через элемент dS поверхности S соответственно, выражается формулой

$$d\Phi_B = \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = BdS\cos\alpha$$

В этой формуле $d\vec{S} = dS\vec{n}$, $\vec{n}$ - орт вектора нормали.

Полный поток через поверхность S равен сумме потоков через все элементы поверхности, т.е. равен интегралу:

$$\Phi_B = \int_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \int_S B_n dS$$

Если поверхность замкнутая, то $\Phi_B = \oint_S B_n dS = \oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$

Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\vec{B}$

Поскольку силовые линии магнитного поля замкнуты, то любая силовая линия пересекает замкнутую поверхность дважды (четное число раз), причем один раз в положительном по отношению к нормали направлении, а другой раз – в отрицательном. Поэтому суммарный магнитный поток, пронизывающий замкнутую поверхность S, всегда оказывается равным нулю:

$$\Phi_B = \oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

теорема Гаусса-Остроградского для магнитного поля.

Поток вектора напряженности магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0$$

Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\vec{B}$

Важное следствие из теоремы Гаусса:

*поток вектора $\vec{B}$ через замкнутую поверхность **S** не зависит от формы этой поверхности.*

В дифференциальной форме уравнение Гаусса имеет вид

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

Сведения из векторного анализа: … *дивергенция характеризует интенсивность (обильность) истоков и стоков векторного поля.*

Если $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$, это означает, что магнитное поле не имеет стоков и истоков, линии $\vec{B}$ замкнутые. Магнитное поле имеет *соленоидальный* или *вихревой* характер.

Физическая причина соленоидальности магнитного поля - отсутствие свободных магнитных зарядов, аналогичных электрическим зарядам.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

Циркуляцией вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру L называется интеграл вида

$$\oint_L \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \oint_L B_l dl$$

где $d\vec{l}$ - вектор элемента длины контура, $B_l = B\cos\alpha$, α - угол между векторами $\vec{B}$ и $d\vec{l}$

Циркуляция вектора $\vec{B}$ *по произвольному замкнутому контуру* L *равна произведению* μ_0 *на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром:*

$$\oint_L \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \mu_0 I$$

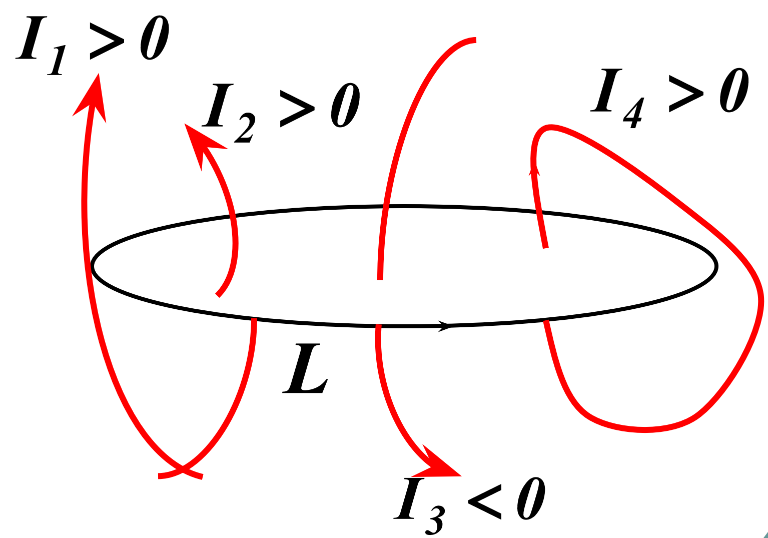
Это закон (теорема) о циркуляции вектора $\vec{B}$. Иначе эта теорема называется законом полного тока для магнитного поля в вакууме.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

$$\oint_L \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \mu_0 I$$

Ток I в теореме есть алгебраическая сумма токов I_k, охватываемых контуром L: $I = \sum I_k$

Ток положительный, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Ток противоположного направления - отрицательный.



<u>Пример</u>

токи I_1, I_2 и I_4 - положительные, ток I_3 - отрицательный. Сумма токов:

$$I_k = 0 \cdot I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = I_2 - I_3 + I_4$$

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

Если ток I распределен по объему, где расположен контур L, то этот ток можно представить как

$$I = \int \vec{j}\, d\vec{S}$$

Интеграл берется по произвольной поверхности S, «натянутой» на контур L.

Плотность тока $\vec{j}$ под интегралом – это плотность в точке, где расположена площадка $d\vec{S}$.

Вектор $d\vec{S}$ образует с направлением обхода по контуру правовинтовую систему.

Таким образом, теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ в общем случае будет выглядеть так:

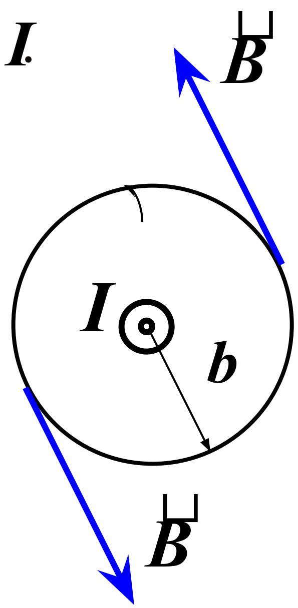
$$\oint_L \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \mu_0 \int \vec{j}\, d\vec{S}$$

Циркуляция вектора $\vec{B}$ не равна нулю. Это означает, что магнитное поле в отличие от электростатического поля <u>*не потенциально*</u>.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

Применение теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$ в ряде случаев упрощает расчет поля, особенно если вычисление циркуляции $\vec{B}$ можно свести к произведению $\vec{B}$ (или проекции $\vec{B}$) на длину контура или его часть.

<u>Пример.</u> Вычислим магнитное поле прямого тока I.

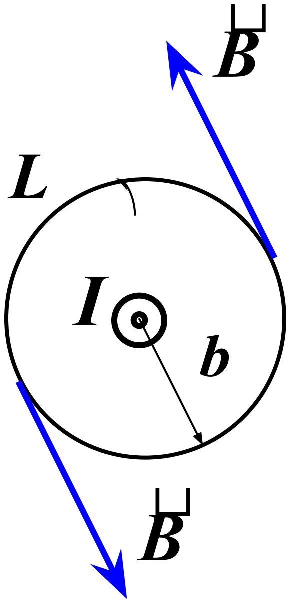


Пусть ток направлен перпендикулярно плоскости рисунка, к нам.

Линии вектора $\vec{B}$ имеют вид окружностей с центром на оси тока.

Во всех точках на расстоянии b от центра модуль вектора $\vec{B}$ одинаков.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$



Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ для выбранного круглого контура L:

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L B_l dl = \oint_L B dl = B \oint_L dl = B\,2\pi b = \mu_0 I$$

В итоге получили выражение $B\,2\pi b = \mu_0 I$, или

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}}$$

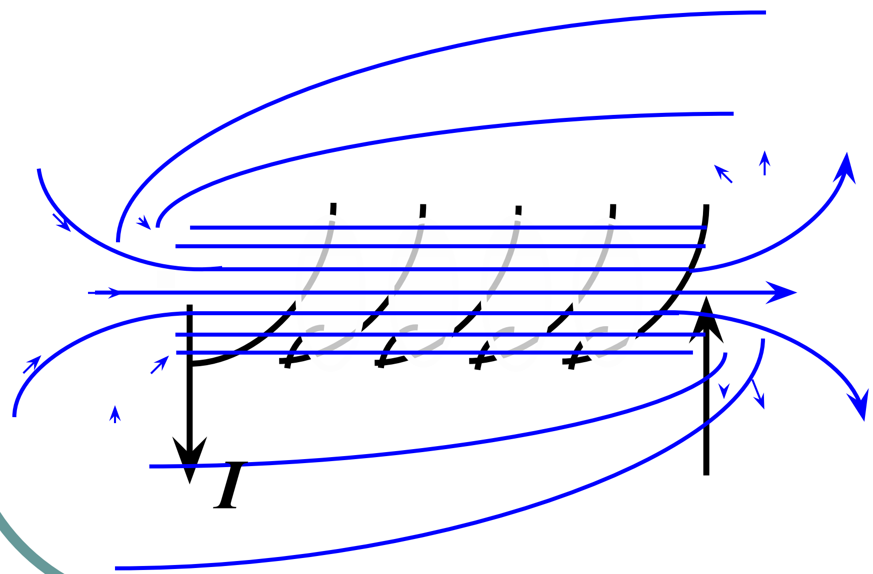
Эта формула совпадает с выражением, полученным в лекции 1.

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле соленоида

Используем теорему о циркуляции для расчета магнитного поля соленоида

Соленоид – это проводник, намотанный по винтовой линии на поверхность цилиндрического каркаса

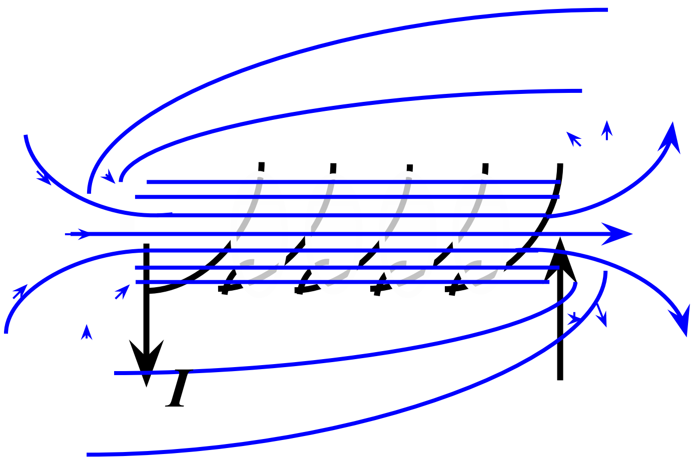


Линии магнитной индукции вне и внутри соленоида выглядят следующим образом:

Линии вектора $\vec{B}$ внутри соленоида направлены по оси так, что образуют с направлением тока в соленоиде правовинтовую систему

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле соленоида



Опыт показывает, что чем длиннее соленоид, тем меньше поле вне его. Поэтому можно считать, что поле бесконечно длинного соленоида сосредоточено внутри его, а поле снаружи отсутствует

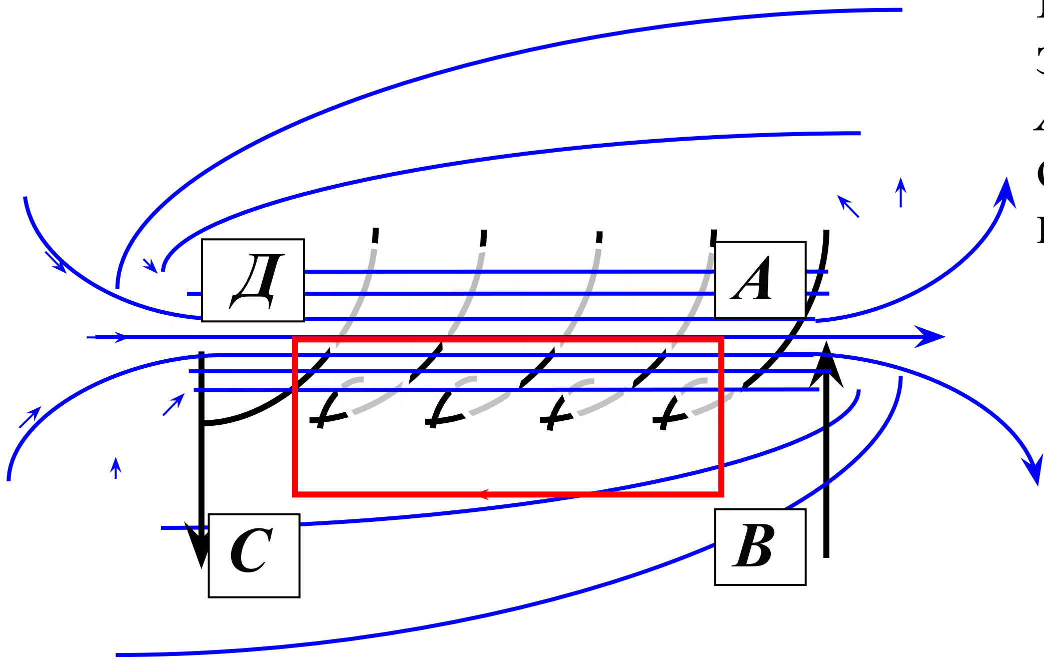
Пусть длинный соленоид с током I имеет n витков на единицу длины.

Если шаг винтовой линии мал, то каждый виток соленоида можно заменить замкнутым витком.

Для расчета поля внутри соленоида выберем прямоугольный контур и вычислим циркуляцию магнитного поля по этому контуру.

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле соленоида



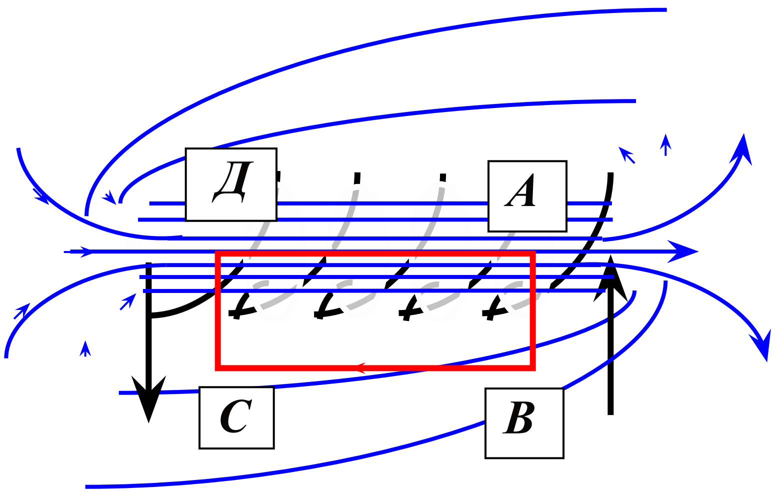
Циркуляцию вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру *АВСДА*, который охватывает N витков, вычислим по формуле:

$$\oint\limits_{ABCДA} B_l dl = \mu_0 NI$$

Интеграл по *АВСДА* можно представить в виде четырех интегралов: по *АВ*, *ВС*, *СД* и *ДА*.

Примеры расчета магнитных полей

<u>Магнитное поле соленоида</u>



На участках *АВ* и *СД* контур перпендикулярен линиям магнитной индукции и $B_l = 0$.

На участке *ДА* контур совпадает с линией магнитной индукции и циркуляция вектора $\vec{B}$ равна Bl.

На участке *ВС* вне соленоида $B = 0$

В итоге получаем:

$$\oint_{АВСДА} B_l dl = \oint_{ДА} B_l dl = Bl = \mu_0 NI$$

Или:

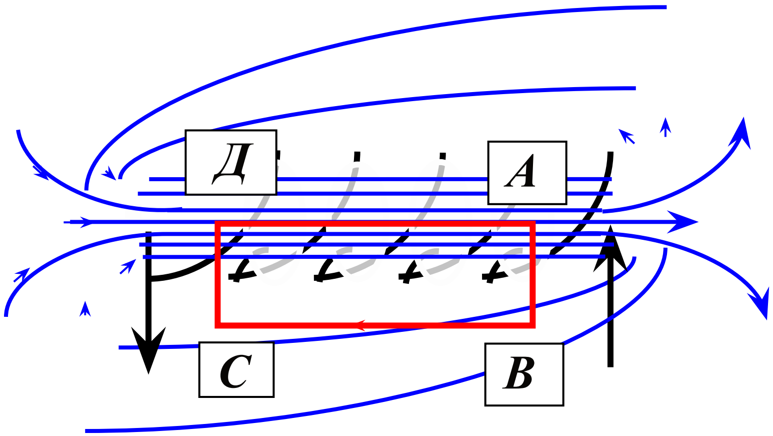
$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

Примеры расчета магнитных полей

<u>Магнитное поле соленоида</u>

Поскольку $N/l = n$, то окончательно получим $\boxed{B = \mu_0 nI}$

Таким образом, поле внутри соленоида *однородно* (краевыми эффектами пренебрегаем). Произведение nI называется числом *ампервитков* соленоида и относится к его характеристикам.



Некорректность при выводе формулы: интеграл по *CB* принят равным нулю. Строгий подход: линии магнитного поля замкнуты и внешнее поле не равно нулю. Однако, это некорректность принципиально на результате не отражается.

Самостоятельно: ***расчет магнитного поля тороида.***