

# ЛЕКЦИЯ 2.

13 февраля 2004г.

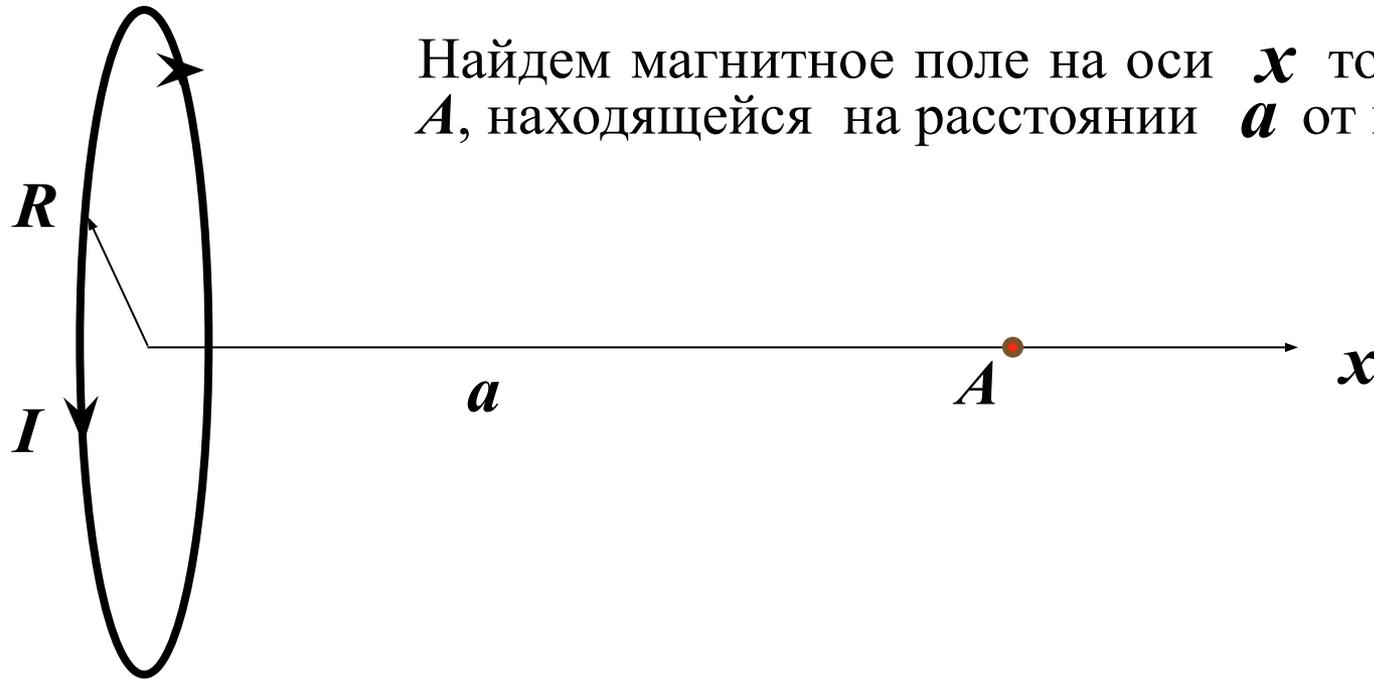
## ПЛАН ЛЕКЦИИ

- 1. Примеры расчета магнитных полей:  
- магнитное поле на оси кругового тока.*
- 2. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора  $\mathbf{B}$*
- 3. Теорема о циркуляции вектора  $\mathbf{B}$*
- 4. Примеры расчета магнитных полей:  
- магнитное поле соленоида.  
- магнитное поле тороида (самостоятельно).*

## Закон Био – Савара – Лапласа. Примеры расчета магнитных полей

### Магнитное поле на оси кругового тока

Пусть электрический ток силой  $I$  течет по проводнику радиусом  $R$ .

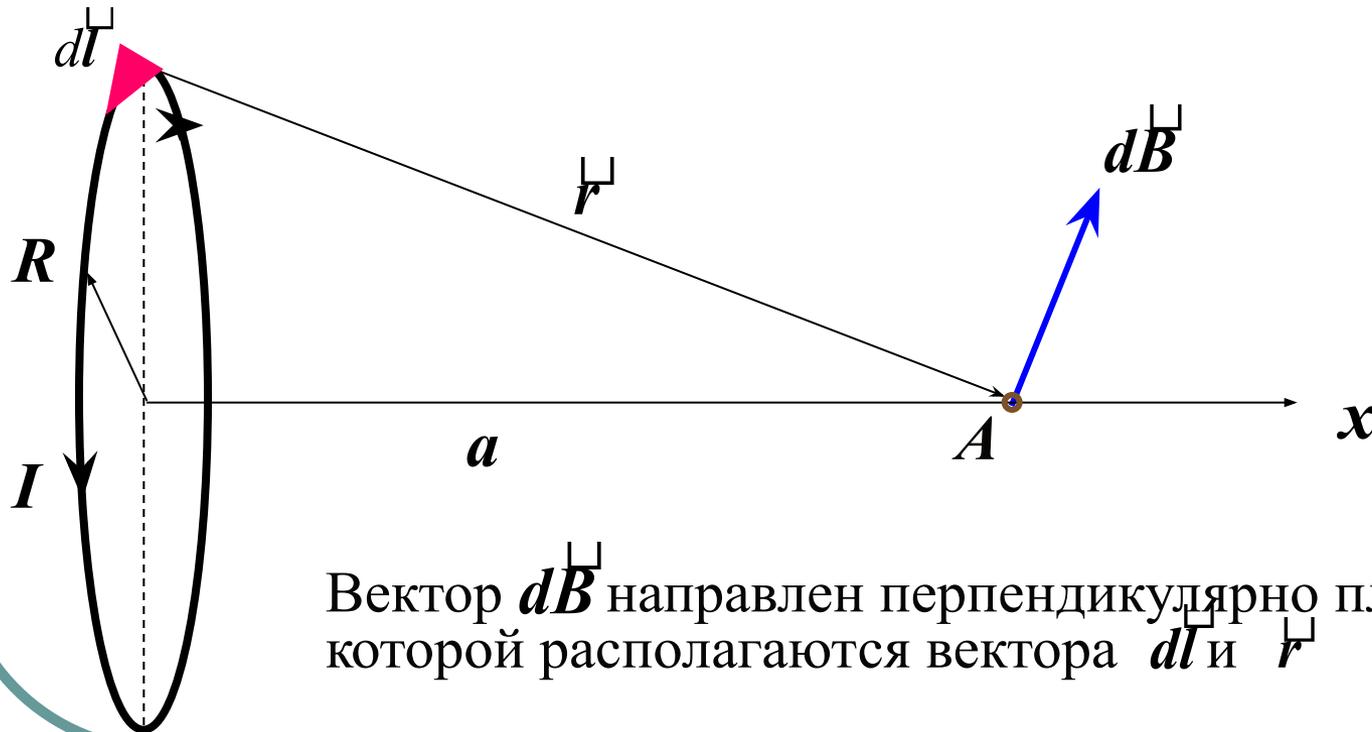


Найдем магнитное поле на оси  $x$  тока в точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $a$  от центра

## Закон Био – Савара – Лапласа. Примеры расчета магнитных полей

### 2. Магнитное поле на оси кругового тока

Разобьем круговой ток на элементы тока длиной  $d\vec{l}$  и проведем от произвольного элемента тока радиус-вектор  $\vec{r}$  в точку  $A$ .



Вектор  $d\vec{B}$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой располагаются вектора  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$

## Закон Био – Савара – Лапласа. Примеры расчета магнитных полей

### 2. Магнитное поле на оси кругового тока



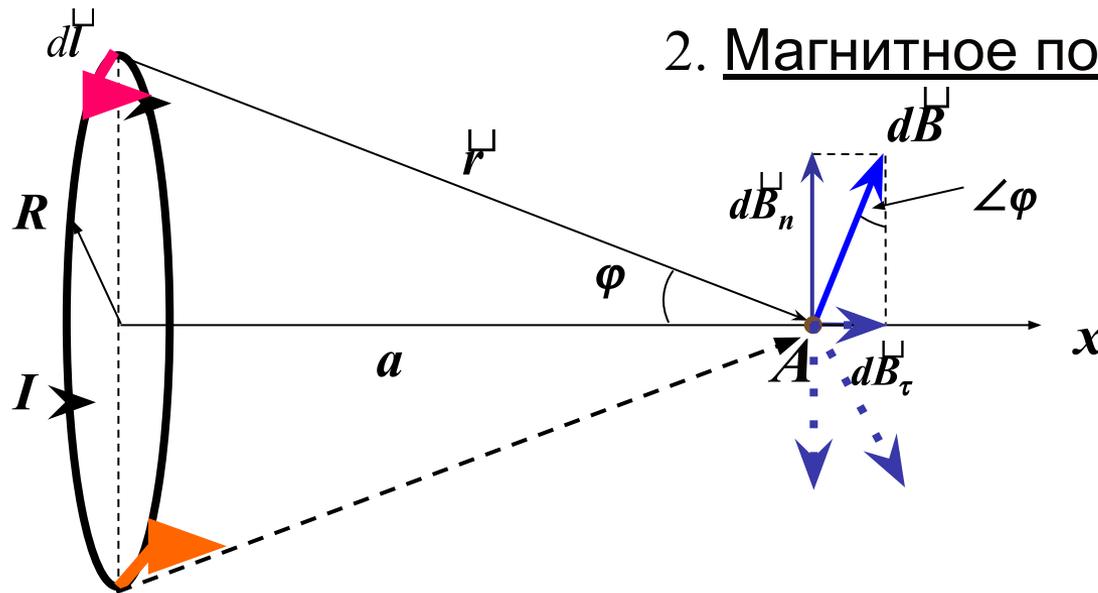
Поскольку все элементы тока перпендикулярны и удалены от  $A$  на одинаковое расстояние, то модуль вектора магнитной индукции в этой точке определяется выражением

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \quad (\alpha = 90^\circ, \sin 90^\circ = 1)$$

Разложим вектор  $d\vec{B}$  на две составляющие:  $d\vec{B}_\tau$  и  $d\vec{B}_n$

## Закон Био – Савара – Лапласа. Примеры расчета магнитных полей

### 2. Магнитное поле на оси кругового тока



Любые два противоположных элемента тока создают поле, составляющие  $d\mathbf{B}_n$  которых равны по величине и противоположно направлены.

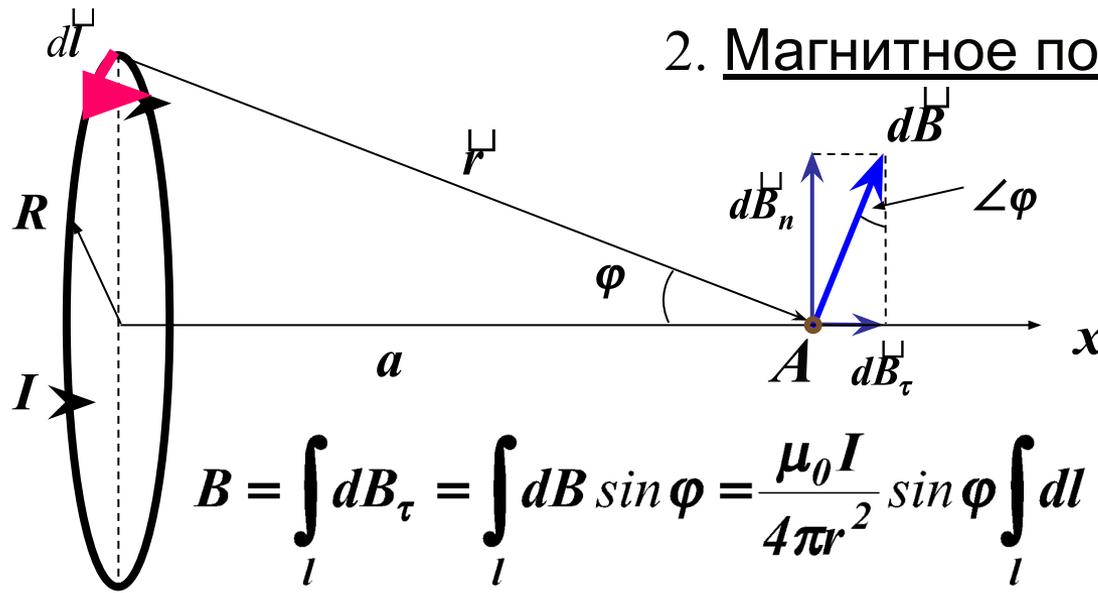
Следовательно, эти составляющие уничтожают друг друга

Поэтому вектор магнитной индукции можно определить, просуммировав составляющие модулей вектора  $d\mathbf{B}_\tau$  (этот вектор направлен вдоль положительной нормали к контуру с током)

## Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

### 2. Магнитное поле на оси кругового тока



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$$

$$B = \int_l d\mathbf{B}_\tau = \int_l dB \sin \varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \varphi \int_l dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \varphi 2\pi R = \frac{\mu_0 IR}{2\pi r^2} \sin \varphi$$

Преобразуем полученное выражение, учитывая, что  $r^2 = R^2 + a^2$ . После подстановки получим

$$\sin \varphi = \frac{R}{r},$$

$$B = \frac{\mu_0 IR}{2r^2} \sin \varphi = \frac{\mu_0 IR}{2(R^2 + a^2)} \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

## Закон Био – Савара – Лапласа. Примеры расчета магнитных полей

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

### 2. Магнитное поле на оси кругового тока

В центре кругового тока  $a = 0$ ,  
индукция магнитного поля равна

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Вдали от контура на оси  $x$  ( $a \gg R$ ):  $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2a^3}$

Если умножить числитель и знаменатель  
этого выражения на  $\pi$ , получим:

$$B = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{2\pi a^3} = \frac{\mu_0 I S}{2\pi a^3}$$

где  $S = \pi R^2$  - площадь, охватываемая круговым током.

## Закон Био – Савара – Лапласа. Примеры расчета магнитных полей

### 2. Магнитное поле на оси кругового тока

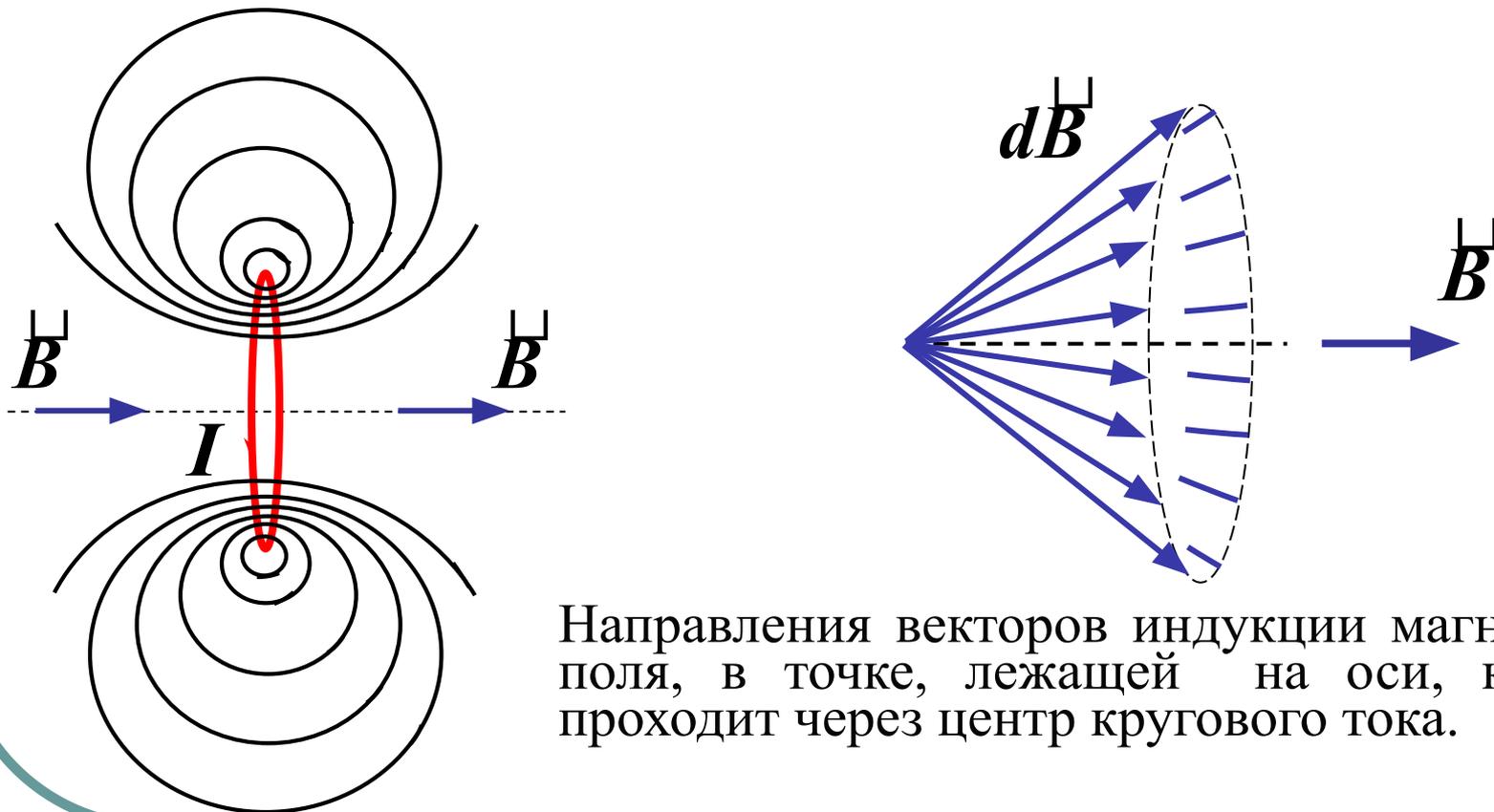
Учитывая, что произведение  $IS$  для контура с током есть *магнитный момент контура*, введенный нами ранее, выражение для индукции магнитного поля, созданного замкнутым круговым током вдали от тока, можно записать в виде:

$$B = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi r^3}$$

Записывая это соотношение приняли, что вдали от кругового тока  $a \approx r$ .

## Графическое изображение магнитного поля кругового тока

Покажем линии магнитной индукции поля кругового тока, лежащие в одной из плоскостей, проходящей через ось тока



Направления векторов индукции магнитного поля, в точке, лежащей на оси, которая проходит через центр кругового тока.

## Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\mathbf{B}$

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку  $S$  называется величина

$$\Phi_B = BS \cos\alpha = B_n S,$$

где  $\alpha$ - угол между нормалью к площадке и вектором магнитной индукции,  $B_n$ - проекция вектора  $\mathbf{B}$  на нормаль к площадке.

Магнитный поток через площадку, в зависимости от ориентации вектора  $\mathbf{B}$  по отношению к нормали, может быть как положительным, так и отрицательным, что определяется знаком проекции  $B_n$ .

Единицей магнитного потока в системе СИ является вебер ( $\text{Вб}$ ).

## Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\vec{B}$

Магнитный поток через элемент  $dS$  поверхности  $S$  соответственно, выражается формулой

$$d\Phi_B = (\vec{B}, d\vec{S}) = B dS \cos \alpha$$

В этой формуле  $d\vec{S} = dS \vec{n}^b$ ,  $\vec{n}^b$  - орт вектора нормали.

Полный поток через поверхность  $S$  равен сумме потоков через все элементы поверхности, т.е. равен интегралу:

$$\Phi_B = \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_S B_n dS$$

Если поверхность замкнутая, то  $\Phi_B = \oint_S B_n dS = \oint_S (\vec{B}, d\vec{S})$

## Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\mathbf{B}$

Поскольку силовые линии магнитного поля замкнуты, то любая силовая линия пересекает замкнутую поверхность дважды (четное число раз), причем один раз в положительном по отношению к нормали направлении, а другой раз – в отрицательном. Поэтому суммарный магнитный поток, пронизывающий замкнутую поверхность  $S$ , всегда оказывается равным нулю:

$$\Phi_B = \oint_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0$$



теорема Гаусса-Остроградского для магнитного поля.

*Поток вектора напряженности магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю:*

$$\oint_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0$$

## Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\mathbf{B}$

Важное следствие из теоремы Гаусса:

поток вектора  $\mathbf{B}$  через замкнутую поверхность  $S$  не зависит от формы этой поверхности.

В дифференциальной форме уравнение Гаусса имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

Сведения из векторного анализа: ... дивергенция характеризует интенсивность (обильность) истоков и стоков векторного поля.

Если  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , это означает, что магнитное поле не имеет стоков и истоков, линии  $\mathbf{B}$  замкнутые. Магнитное поле имеет соленоидальный или вихревой характер.

Физическая причина соленоидальности магнитного поля - отсутствие свободных магнитных зарядов, аналогичных электрическим зарядам.

## Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

Циркуляцией вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру  $L$  называется интеграл вида

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L B_l dl$$

где  $d\vec{l}$  - вектор элемента длины контура,  $B_l = B \cos \alpha$ ,  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$

Циркуляция вектора  $\vec{B}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна произведению  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром:

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 I$$

Это закон (теорема) о циркуляции вектора  $\vec{B}$ . Иначе эта теорема называется законом полного тока для магнитного поля в вакууме.

## Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 I$$

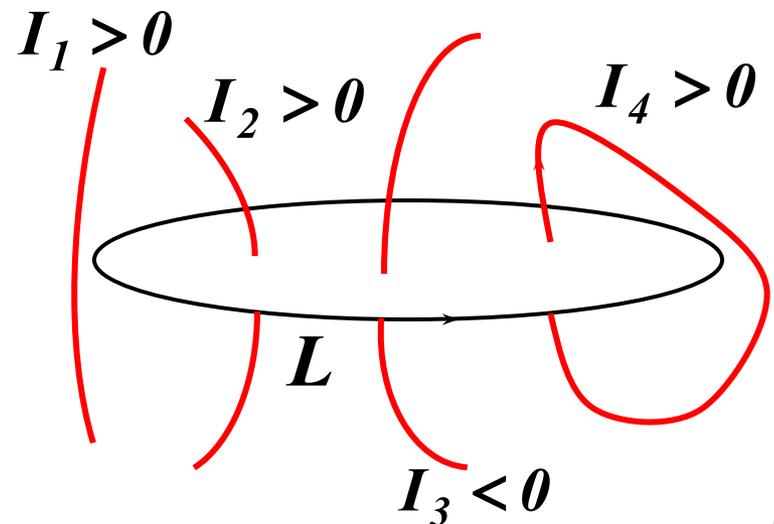
Ток  $I$  в теореме есть алгебраическая сумма токов  $I_k$  охватываемых контуром  $L$ :  $I = \sum I_k$

Ток положительный, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Ток противоположного направления - отрицательный.

### Пример

токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_4$  - положительные, ток  $I_3$  - отрицательный. Сумма токов:

$$I_k = 0 \cdot I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = I_2 - I_3 + I_4$$



## Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

Если ток  $I$  распределен по объему, где расположен контур  $L$ , то этот ток можно представить как

$$I = \int \vec{j} dS$$

Интеграл берется по произвольной поверхности  $S$ , «натянутой» на контур  $L$

Плотность тока  $\vec{j}$  под интегралом – это плотность в точке, где расположена площадка  $dS$ .

Вектор  $d\vec{S}$  образует с направлением обхода по контуру правовинтовую систему.

Таким образом, теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  в общем случае будет выглядеть так:

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \int \vec{j} dS$$

Циркуляция вектора  $\vec{B}$  не равна нулю. Это означает, что магнитное поле в отличие от электростатического поля не потенциально.

## Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

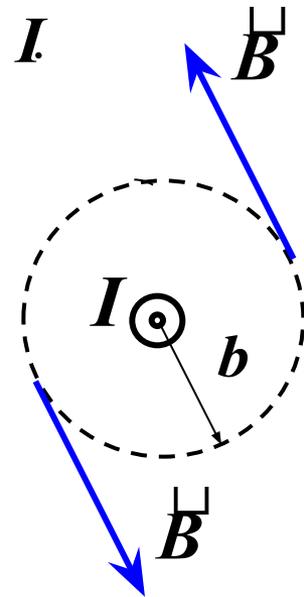
Применение теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$  в ряде случаев упрощает расчет поля, особенно если вычисление циркуляции  $\vec{B}$  можно свести к произведению  $\vec{B}$  (или проекции  $\vec{B}$ ) на длину контура или его часть.

Пример. Вычислим магнитное поле прямого тока  $I$

Пусть ток направлен перпендикулярно плоскости рисунка, к нам.

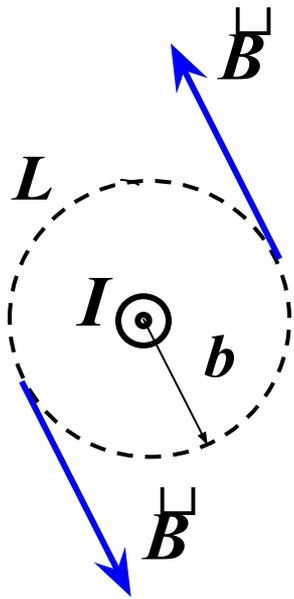
Линии вектора  $\vec{B}$  имеют вид окружностей с центром на оси тока.

Во всех точках на расстоянии  $b$  от центра модуль вектора  $\vec{B}$  одинаков.



## Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

Применим теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  для выбранного круглого контура  $L$ :



$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L B_{\tau} dl = \oint_L B dl = B \oint_L dl = B 2\pi b = \mu_0 I$$

В итоге получили выражение  $B 2\pi b = \mu_0 I$ , или

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

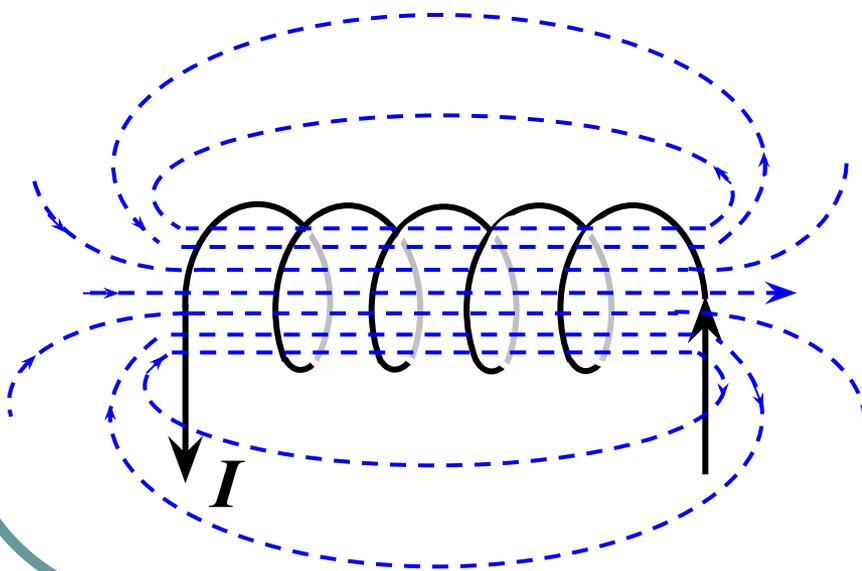
Эта формула совпадает с выражением, полученным в лекции 1.

## Примеры расчета магнитных полей

### Магнитное поле соленоида

Используем теорему о циркуляции для расчета магнитного поля соленоида

Соленоид – это проводник, намотанный по винтовой линии на поверхность цилиндрического каркаса

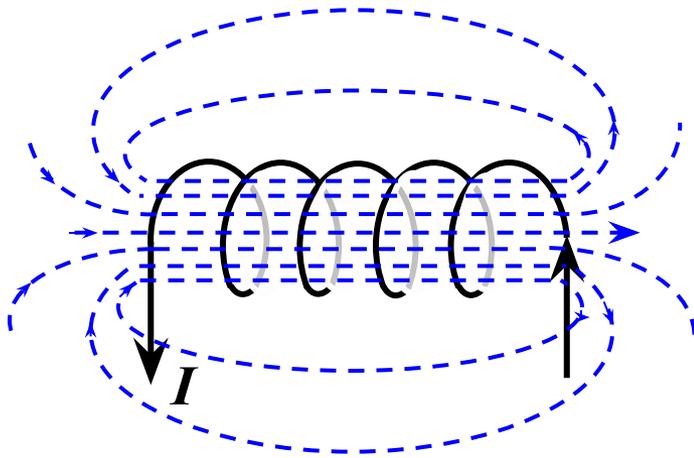


Линии магнитной индукции вне и внутри соленоида выглядят следующим образом:

Линии вектора  $\mathbf{B}$  внутри соленоида направлены по оси так, что образуют с направлением тока в соленоиде правовинтовую систему

## Примеры расчета магнитных полей

### Магнитное поле соленоида



Опыт показывает, что чем длиннее соленоид, тем меньше поле вне его. Поэтому можно считать, что поле бесконечно длинного соленоида сосредоточено внутри его, а поле снаружи отсутствует

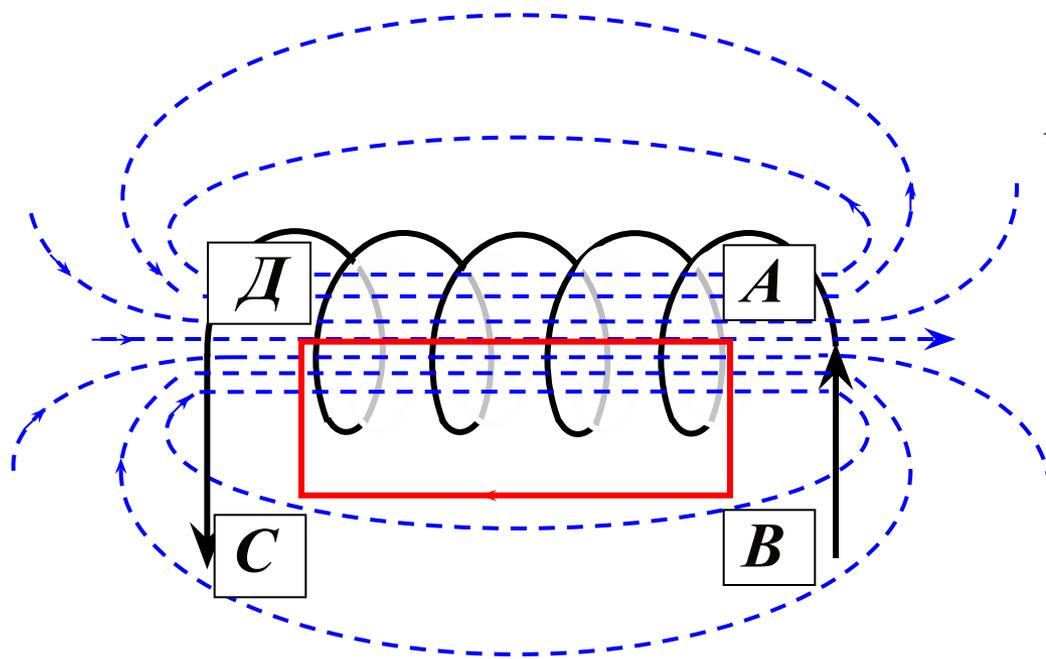
Пусть длинный соленоид с током  $I$  имеет  $n$  витков на единицу длины.

Если шаг винтовой линии мал, то каждый виток соленоида можно заменить замкнутым витком.

Для расчета поля внутри соленоида выберем прямоугольный контур и вычислим циркуляцию магнитного поля по этому контуру.

## Примеры расчета магнитных полей

### Магнитное поле соленоида



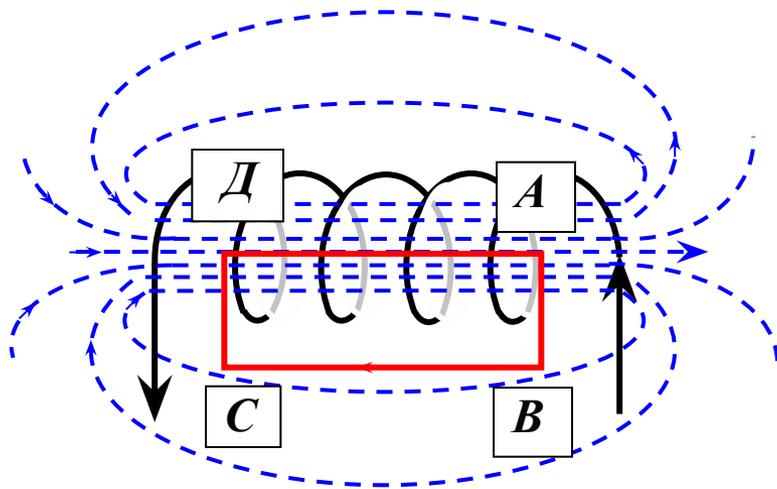
Циркуляцию вектора  $\mathbf{B}$  по замкнутому контуру  $ABCD$ , который охватывает  $N$  витков, вычислим по формуле:

$$\oint_{ABCD} \mathbf{B}_l d\mathbf{l} = \mu_0 N I$$

Интеграл по  $ABCD$  можно представить в виде четырех интегралов: по  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ .

## Примеры расчета магнитных полей

### Магнитное поле соленоида



На участках  $AB$  и  $CD$  контур перпендикулярен линиям магнитной индукции и  $B_l = 0$ .

На участке  $DA$  контур совпадает с линией магнитной индукции и циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  равна  $B_l$ .

На участке  $BC$  вне соленоида  $B = 0$

В итоге получаем:

$$\oint_{ABCD} \mathbf{B}_l d\mathbf{l} = \oint_{DA} \mathbf{B}_l d\mathbf{l} = B_l l = \mu_0 N I$$

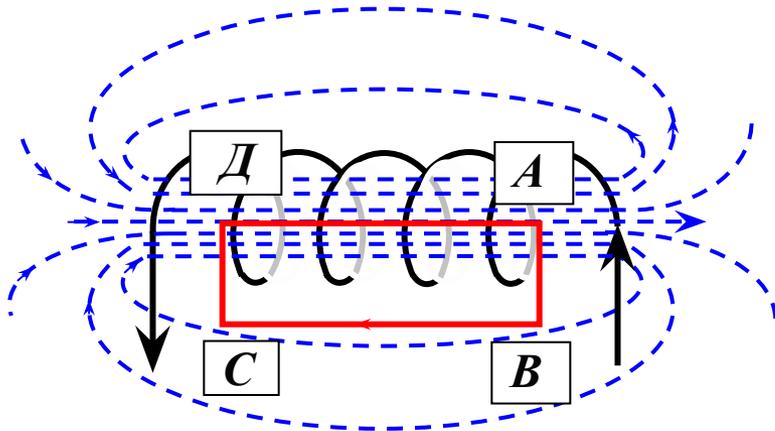
Или: 
$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

## Примеры расчета магнитных полей

### Магнитное поле соленоида

Поскольку  $N/l = n$ , то окончательно получим  $B = \mu_0 n I$

Таким образом, поле внутри соленоида *однородно* (краевыми эффектами пренебрегаем). Произведение  $nI$  называется числом *ампервитков* соленоида и относится к его характеристикам.



Некорректность при выводе формулы: интеграл по  $CB$  принят равным нулю. Строгий подход: линии магнитного поля замкнуты и внешнее поле не равно нулю. Однако, это некорректность принципиально на результате не отражается.

Самостоятельно: **расчет магнитного поля тороида.**