

Сегодня *

Физические основы механики

Кузнецов Сергей Иванович
доцент кафедры ОФ ЕНМФ ТПУ

900igr.net

Тема 9. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (ОТО)

- 9.1. Обобщение закона тяготения Ньютона
- 9.2. Принцип эквивалентности сил инерции и сил тяготения
- 9.3. Теория тяготения Эйнштейна. Основные положения ОТО
- 9.4. Следствия из принципа эквивалентности
9.4. Следствия из принципа эквивалентности, 9.4. Следствия из принципа эквивалентности, 9.4.

9.1. Обобщение закона тяготения

Ньютона

Между любыми видами материи существует универсальное взаимодействие, проявляющееся в притяжении тел.

Потенциальная энергия тела массы m в поле тяготения равна:

$$U = m\varphi$$

где φ – потенциал поля тяготения.

Если величина U мала по сравнению с энергией тела mc^2 т.е. **если** $(\varphi / c^2) \ll 1$

и тело движется со скоростью, много меньшей скорости света $(v \ll c)$ то мы имеем дело с **классическим гравитационным полем** для которого справедлив закон всемирного тяготения Ньютона.

В полях тяготения обычных небесных тел это условие выполняется:

на поверхности Солнца $\varphi / c^2 \approx 4 \cdot 10^{-6}$,
на поверхности белых карликов, 10^{-3} .

Теория тяготения Ньютона предполагает мгновенное распространение полей тяготения, что не согласуется с принципами специальной теории относительности, основанной на том экспериментальном факте, что любое взаимодействие распространяется со скоростью, меньшей или равной скорости света. Поэтому теорию тяготения Ньютона нельзя применять к сильным полям тяготения, разгоняющим частицы до скорости, близкой к скорости света:

$$(\varphi / c^2 \approx 1)$$

Теория тяготения Ньютона неприменима для описания движения частиц вблизи массивных тел (в частности, для описания траектории движения света в поле тяготения). Неприменима теория тяготения Ньютона и для описания переменных полей тяготения, создаваемых движущимися телами.

Обобщение теории тяготения на основе специальной теории относительности было сделано А. Эйнштейном в 1908 – 1916 гг. Эта теория была названа им ***общей теорией относительности (ОТО)***.

В ОТО описываются *сильные гравитационные поля* ($\varphi / c^2 \approx 1$) и движение в них с большими скоростями ($v \approx c$)

В ОТО учитывается воздействие материи на свойства пространства и времени, а эти измененные свойства пространства-времени влияют на сам характер физических процессов.

9.2. Принцип эквивалентности сил инерции и сил тяготения

Важнейшей особенностью полей тяготения является то, что тяготение совершенно одинаково действует на разные тела, сообщая им одинаковые ускорения, независимо от свойств тел. Это было известно еще в ньютоновской теории и положено в основу новой, эйнштейновской теории тяготения.

Под действием гравитационной силы

$$F = \gamma \frac{Mm_g}{r^2} = m_g g$$

все тела на поверхности Земли падают с одинаковым ускорением – **ускорением свободного падения.**

Этот факт был установлен Ньютоном и может быть сформулирован как **принцип строгой пропорциональности гравитационной массы m_g** , определяющей взаимодействие тела с полем тяготения, **и инертной массы m_{in}** , определяющей сопротивление тела действующей на него силе и входящей во второй закон Ньютона:

$$F = m_{in} a.$$

Уравнение движения тела в поле тяготения записывается в виде:

$$m_{in} a = m_g g,$$

где a – ускорение, приобретаемое телом под действием поля тяготения, напряженностью $G = g$.

В этом случае, согласно Ньютону

$$m_g = m_{in}$$

и $a = g$ – **ускорение не зависит от массы и равно напряженности поля тяготения.**

Таким образом, все тела в поле тяготения и в поле сил инерции, при $a = g$ движутся совершенно одинаково.

Например, движение тел в космическом корабле, летящим с ускорением $a' = g$ и в корабле стоящем на Земле в поле тяжести с напряженностью $G = g$ будет одинаковым. Силы инерции в ускоренно движущемся корабле будут неотличимы от гравитационных сил, действующих в истинном поле тяготения. Поэтому **силы инерции можно считать эквивалентными гравитационным силам.**

Тождественность инерциальной и гравитационной масс $m_g = m_{in}$ является следствием эквивалентности сил инерции и сил тяготения.

Этот факт называется **принципом эквивалентности Эйнштейна**. Согласно этому принципу, *все физические процессы в истинном поле тяготения и в ускоренной системе отсчета, в отсутствии тяготения, протекают одинаковым образом.*

Это фундаментальный закон природы.

Следствием этого закона является то, что находясь внутри закрытой кабины, невозможно определить, чем вызвана сила mg , тем, что кабина движется с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$ или действием притяжения Земли.

Ярчайшим доказательством равенства сил инерции и гравитации является состояние невесомости космонавтов в космическом корабле (падают под действием гравитационных сил и отлетают под действием центробежных сил инерции).

Принцип эквивалентности – основополагающий в ОТО Эйнштейна.

9.3. Теория тяготения Эйнштейна. Основные положения ОТО

Итак, мы с вами показали, что силы инерции эквивалентны силам тяготения. Эквивалентность, однако, это не тождественность и существуют некоторые различия.

Допустим, $\vec{G} = \vec{a}$ (вагон движется прямолинейно). При уменьшении ускорения \vec{a} напряженность эквивалентного поля должна изменяться во всех точках вагона одновременно, т.е. изменения должны распространяться мгновенно.

Эти рассуждения предполагают так называемое дальнодействие сил инерции, в то время как возмущения гравитационного поля распространяются с конечной скоростью, равной скорости света. То есть, гравитационные взаимодействия являются близкодействующими.

Ускоренно движущийся космический корабль имитирует только однородное поле тяготения, одинаковое по величине и направлению во всем пространстве. Но поля тяготения, создаваемые отдельными телами, не таковы.

Чтобы имитировать, например, сферическое поле тяготения, надо, исходя из принципа эквивалентности, потребовать, чтобы истинное гравитационное поле создавалось локальными, соответствующим образом ускоренными в каждой точке системами отсчета.

В результате, в любой конечной области, пространство-время окажется искривленным – неевклидовым. Сумма углов треугольника в таком пространстве не равна π , отношение длины окружности к радиусу отлично от 2π , время в разных точках течет по-разному.

Согласно Эйнштейну, **истинное гравитационное поле есть проявление искривления четырехмерного пространства времени.**

Кривизна пространства-времени создается источниками гравитационного поля – массами вещества и всеми видами энергии, присутствующими в системе, поскольку

энергия и масса эквивалентны

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Поэтому тяготение зависит не только от распределения масс в пространстве, но и от их движения, давления и напряжений, имеющих в телах от всех физических полей.

Движение тел в искривленном пространстве-времени происходит по кратчайшим траекториям – геодезическим, которые в трехмерном пространстве-времени воспринимаются как движение по искривленным траекториям с переменной скоростью.

Изменение гравитационных полей в вакууме *распространяется со скоростью света.*

В основу ОТО положены два постулата:

ДВА ПОСТУЛАТА ОТО

1. Принцип эквивалентности сил инерции и сил гравитации.

(Этот факт можно считать доказанным. Эффект гравитации и ускорения движения частиц – неразличимы).

2. Гравитационное взаимодействие распространяется с конечной скоростью, равной скорости света c в виде гравитационных волн.

(Пока кванты гравитационного поля – гравитоны, не обнаружены).

Еще одним ключевым моментом в ОТО является понятие **кривизны пространства времени.**

Проведем мысленный эксперимент:

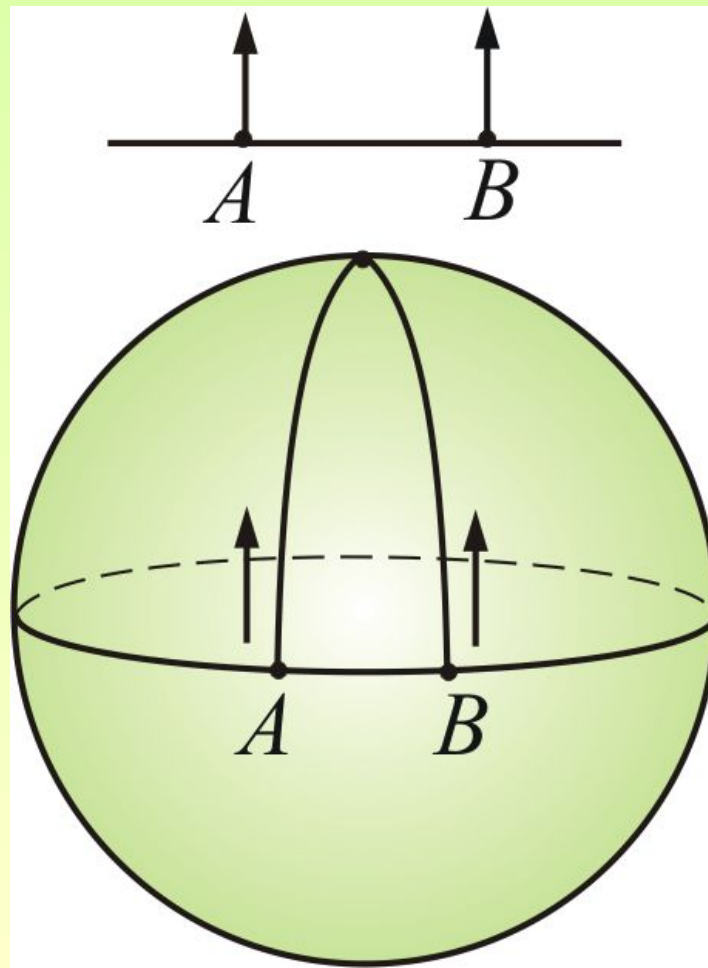


Рисунок 9.1

В ходе путешествия плоские двумерные существа (ПЛОСКАТИКИ) отправившиеся из A и B по параллельным дорогам будут замечать, что они приближаются друг к другу (кривизны сферы, если она достаточно велика, они не замечали и не знали, что живут на сфере). И приближаются они все быстрее и быстрее – с ускорением, как будто под действием некой силы.

Назовем эту силу ***гравитацией***.

Наблюдатель со стороны видит, что сама кривизна выступает в роли силы, т.е. ***геометрические свойства пространства выступают в роли реально действующих сил!***

Анализируя этот мысленный эксперимент и тот факт, что *любые массы притягиваются всегда*, Эйнштейн пришел к мысли, что ***сила тяготения не есть специфическая сила***, то что мы принимаем за силу притяжения, следует рассматривать лишь как ***проявление специфики геометрических свойств пространства-времени.***

СТО оперирует плоским пространством-временем, а ОТО – искривленным.

Любая масса, искривляет пространство-время, другая масса, попадая в область искривления, испытывает силу притяжения.



Минковский, Герман, (1864– 1909), немецкий математик. Предложил идею единого, четырехмерного континуума «пространство-время», в котором время имеет равные права с пространством.

Герман Минковский (1864 – 1909), бывший учитель математики Эйнштейна, ввел четырехмерное пространство-время и дал геометрическое представление теории относительности. Перестройка теории относительности в мировую геометрию вынудила Эйнштейна заявить: *«С тех пор, как за теорию относительности взялись математики, я ее сам больше не понимаю».*

Математики Г. Риман и Н. Лобачевский создали теорию искривленного пространства произвольного числа измерений. Эйнштейн воспользовался математическими формулами Римана (четырехмерного пространства-времени).

Минковский для описания пространственно-временных событий ввел геометрическую терминологию.

Совокупность значений τ , x , y , z для характеристики места и времени события - **мировая точка**.

Множество мировых точек есть четырехмерное пространство, называемое ***пространством Минковского***.

Линия в пространстве Минковского называется **мировой линией**.

Серьезно ОТО начала проверяться лишь с двадцатых годов прошлого века, т.е. недавно, и пока нет ни одного факта, противоречащего ОТО.

9.4. Следствия из принципа эквивалентности, подтверждающие ОТО

1. Замедление времени в гравитационных полях

Общая теория относительности предсказывает замедление хода часов в гравитационных полях.

Пусть часы движутся с ускорением g , тогда их скорость, после того, как они прошли расстояние x , равна

$$v = \sqrt{2gx}.$$

С точки зрения неподвижного наблюдателя промежутки времени dt в неподвижной и dt_0 в подвижной системах отсчета связаны соотношением:

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - \frac{2gx}{c^2}}},$$

где dt – промежуток времени в пространстве без поля.

Поскольку $\varphi = gx$ – гравитационный потенциал, то имеем в слабых гравитационных полях ($\varphi \ll c^2$)

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - 2\varphi/c^2}} \cong dt_0 \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right)$$

– время течет тем медленнее, чем больше абсолютная величина гравитационного потенциала.

$$dt \cong dt_0 \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right)$$

Этот эффект был подтвержден **прямым экспериментом**:

В 1976 г. на высоту 10^4 км на ракете были подняты водородные часы, точность хода которых составляет 10^{-15} с. На Земле оставили точно такие же часы, предварительно синхронизировав с улетевшими часами.

Через два года часы вернули и сравнили показания, разность $4,5 \cdot 10^{-10}$ с совпала с расчетной по ОТО, с точностью 0,02%.

2. Красное гравитационное смещение частоты фотонов

При приближении света к телам, создающим гравитационное поле, частота света убывает с увеличением абсолютной величины потенциала поля.

Для частоты света в гравитационном поле можно записать:

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c^2} \right)$$

где ν – частота света с точки зрения неподвижного наблюдателя, ν_0 – частота света в подвижной системе отсчета.

Так, если свет испускается в точке с потенциалом φ_1 , и приходит в точку с потенциалом φ_2 , то линии спектра смещаются в сторону красного цвета на величину

$$\Delta\nu = \nu(\varphi_1) - \nu(\varphi_2) = (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\nu_0}{c^2}.$$

Если на Земле наблюдать спектр, испускаемый на Солнце и звездах, то $|\varphi_2| < |\varphi_1|$ и $\Delta\nu < 0$, т.е. смещение происходит в сторону меньших частот (красный спектр). Этот факт был доказан в 1960 г. с помощью эффекта Мессбауэра и подтверждает следствие ОТО с точностью до 1%.

1916 г. Эйнштейн, обобщая идеи СТО создал теорию гравитации (ОТО): любой объект, обладающий энергией E , будет подвержен действию гравитационного поля как если бы он имел гравитационную массу m_g .

Связь m_g с энергией определяется: $E = m_g c^2$.

Масса фотона равна нулю, но в любом гравитационном поле он должен вести себя как частица с гравитационной массой

$$m_g = \frac{\hbar \omega}{c^2}.$$

При движении фотона вблизи поверхности Земли вверх по вертикали на расстояние l фотон должен затратить часть своей энергии на совершение работы против сил тяжести:

$$A = m_{\text{ф}} g h = \frac{\hbar \omega l}{c}$$

Соответственно первоначальная энергия фотона должна уменьшится на величину $\hbar \omega$

Значит, частота фотона в конце пути будет меньше на величину

$$\Delta \omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{\hbar \omega l}{c^2}$$

Относительное уменьшение частоты фотона

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{gl}{c^2}$$

при распространении по вертикали было измерено в 1960 г. американскими учеными Паундом и Ребкой. В условиях опыта оно составило малую величину . Следовательно, перепад высот в опыте Паунда-Ребки составлял

$$l = \frac{\delta c^2}{g} \approx 18 \text{ м.}$$

Эффект изменения частоты света при удалении от большой тяготеющей массы называется **гравитационным красным смещением.**

3. Отклонение светового луча массивными телами

ОТО объясняет вдвое большее отклонение светового луча вблизи массивных тел, чем это предсказывала теория Ньютона. Эксперимент был проведен в 1919 г. Световой луч, вблизи одной из планет, отклонился на $1,75''$, тогда как по теории Ньютона искривление должно было произойти на $0,87''$, т.е. вдвое меньше.

4. Объяснение смещения орбиты Меркурия

Известно, что за 100 лет орбита Меркурия сместилась на $1^{\circ} 33' 20''$. Из теории Ньютона следует смещение, за счет влияния планет, на $1^{\circ} 32' 37''$, а где же еще $43''$. Подставив в формулы ОТО параметры Солнца и Меркурия, Эйнштейн получил скорость прецессии орбиты на $43''$ за 100 лет!

5. Черные дыры

ОТО предполагает наличие во Вселенной черных дыр – космических объектов, поглощающих все частицы, в том числе фотоны, подходящие к их поверхности.

Допуская, что фотон обладает гравитационной массой, можно оценить размеры r_g и массу M космического объекта, способность стать черной дырой. Для этого **необходимо, чтобы кинетическая энергия фотона была меньше или равна его потенциальной энергии** на бесконечности:

Уравнение черной дыры

$$\frac{m_\gamma c^2}{2} \leq G \frac{m_\gamma M}{r_g},$$

$$\frac{m_{\gamma}c^2}{2} \leq G \frac{m_{\gamma}M}{r_g}, \quad \text{отсюда}$$

если $r_g \leq G \frac{2M}{c^2}$ то **свет не сможет покинуть** данный космический объект.

Уже есть достаточно веские доказательства существования черных дыр. Основная трудность состоит в том, что они поглощают все и почти ничего не излучают. Поэтому об их существовании можно судить по косвенным данным: поглощению вещества и испусканию в этом процессе излучения.

Подобное явление можно наблюдать в системе двойных звезд, в частности, обычно называют двойную систему СудXI (Лебедь XI). ***Пространство внутри черных дыр сворачивается, время останавливается.***

Предсказанные ОТО гравитационные волны в прямых экспериментах еще не наблюдались, но последствия их излучения системами небесных тел обнаружены. Согласно ОТО, период орбитального движения двойной звездной системы должен уменьшиться из-за излучения гравитационных волн.

Это уменьшение открыто в системе, одним из компонентов которой является пульсар *PSR193 + 16*. По расчетам ОТО относительное уменьшение периода в этой системе за один оборот должно составлять $2,4 \cdot 10^{-12}$, а наблюдения дают значение $(2,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-12}$.

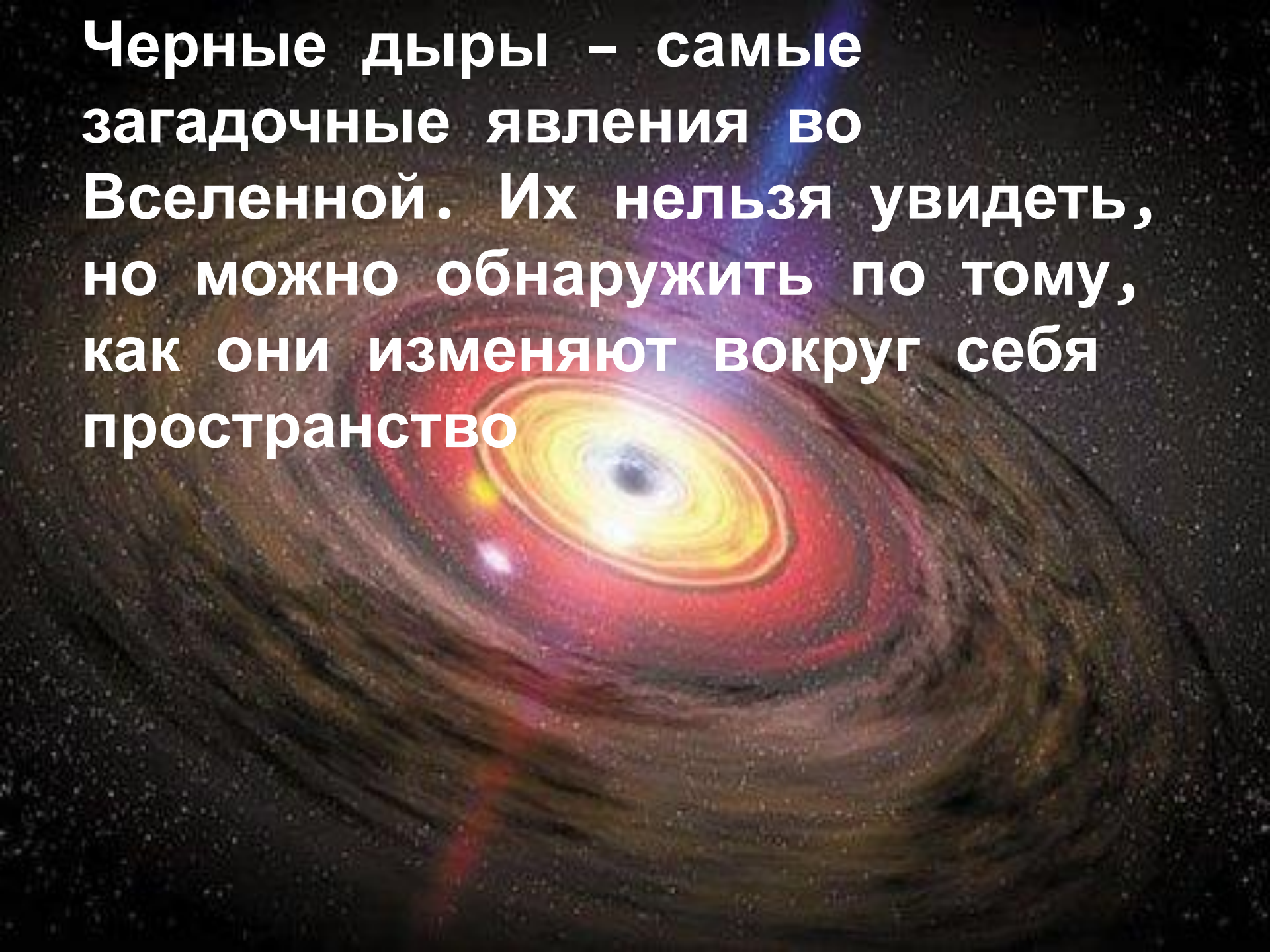
Все вышеизложенное говорит о правильности принципов, положенных в основу ОТО, о непротиворечивости ее выводов и фундаментальности предсказанных ею физических эффектов.




Чандра

Черные дыры

Черные дыры – самые загадочные явления во Вселенной. Их нельзя увидеть, но можно обнаружить по тому, как они изменяют вокруг себя пространство






Чтобы понять как
возникает черная дыра, надо
вспомнить о том, каков
жизненный цикл звезды.

Звезда образуется, когда большое количество газа (в основном водорода) начинает сжиматься силами собственного гравитационного притяжения.

В процессе сжатия атомы газа все чаще и чаще сталкиваются друг с другом, двигаясь со все большими и большими скоростями.



В результате газ разогревается и в конце концов становится таким горячим, что атомы водорода, вместо того чтобы отскакивать друг от друга, будут сливаться, образуя гелий.

В классическом естествознании такие объекты рассматривались как абстрактные модели

Основное уравнение ЧД:

Hubble Space Telescope
strengthened the evidence
for a massive black hole
in the nearby galaxy

M32

M32

Andromeda

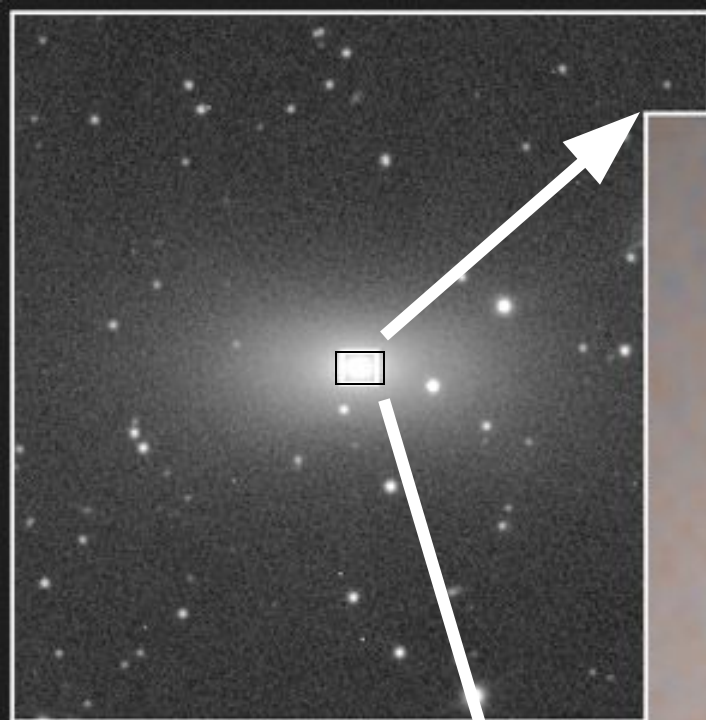


principal investigator, animation: Roeland P. van der Marel [marel@sns.ias.edu]

Компьютерный анализ вращения звезд в M32 (подтверждается присутствие Черной дыры)



Галактика с активным ядром



Ground



1998 z

Disk in Galaxy NGC 7052

HST • WFPC2

PRC98-22 • June 18, 1998 • ST ScI OPO

R. P. van der Marel (ST ScI), F. C. van den Bosch (University of Washington) and NASA

800 св. лет

ОГЕНКУ МАССЫ Ч ПРОИЗВОДИТ ПО СКОРОСТИ ЗВЕЗД В ЗАКРЕЩИОННОМ

$M = 1,2$ млрд Солнц

ДЖЕТ ВЫБРОС ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

$$V_{\text{плазмы}} = 8 \cdot 10^7 \text{ м/с}$$

Плазма - релятивистская!

Джет



Диск аккреции



Излучение



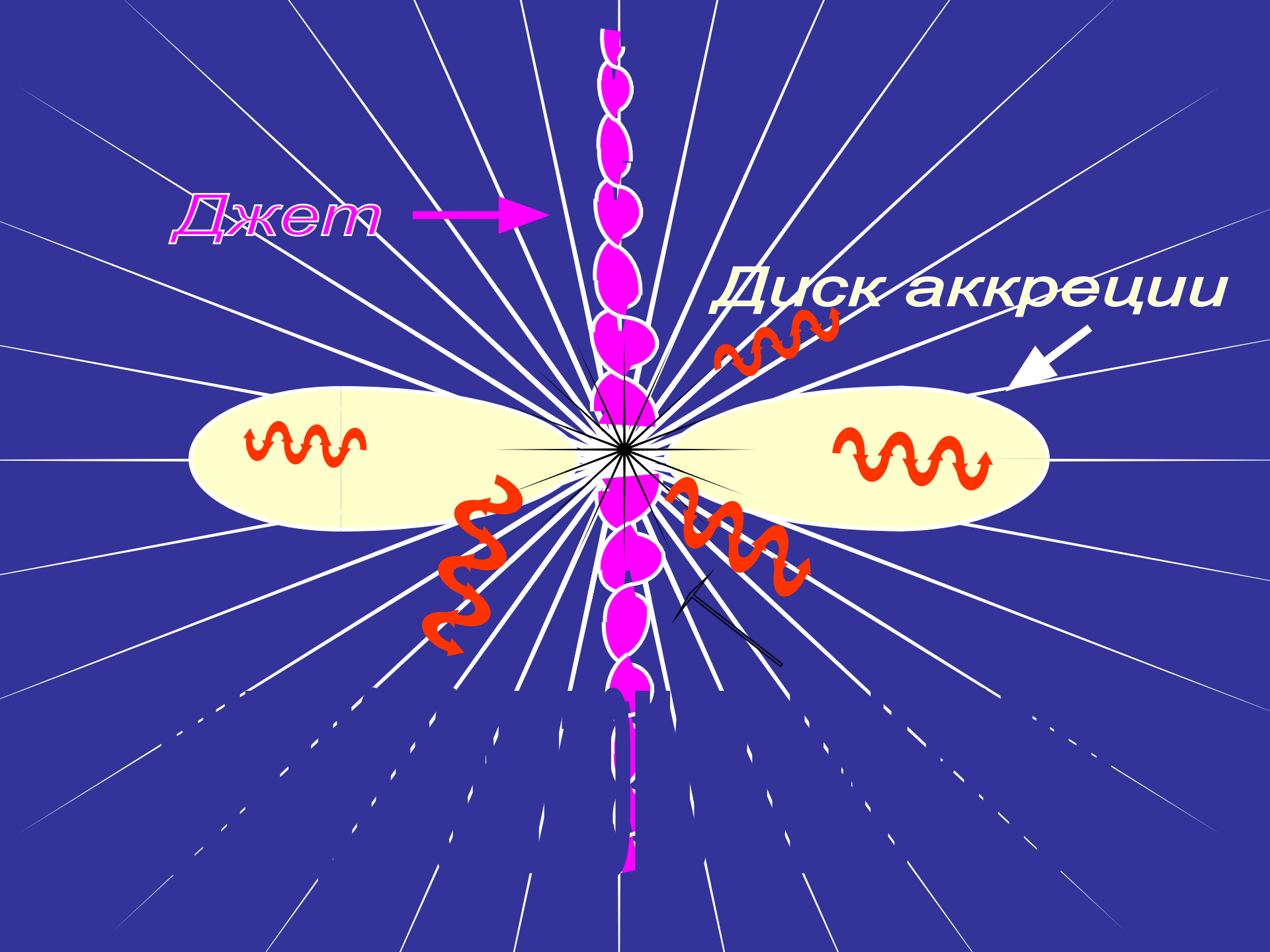
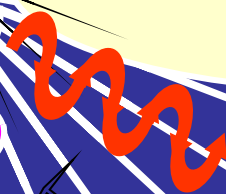
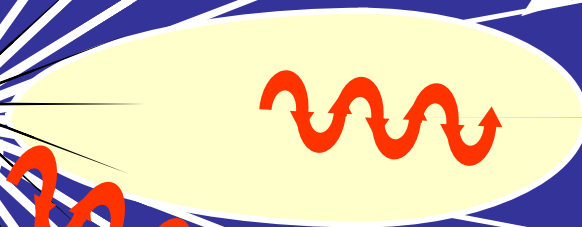
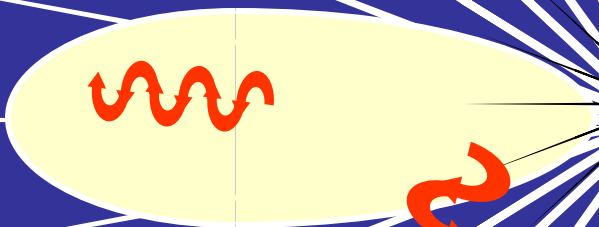
Черная дыра (схема)



Джет



Диск аккреции



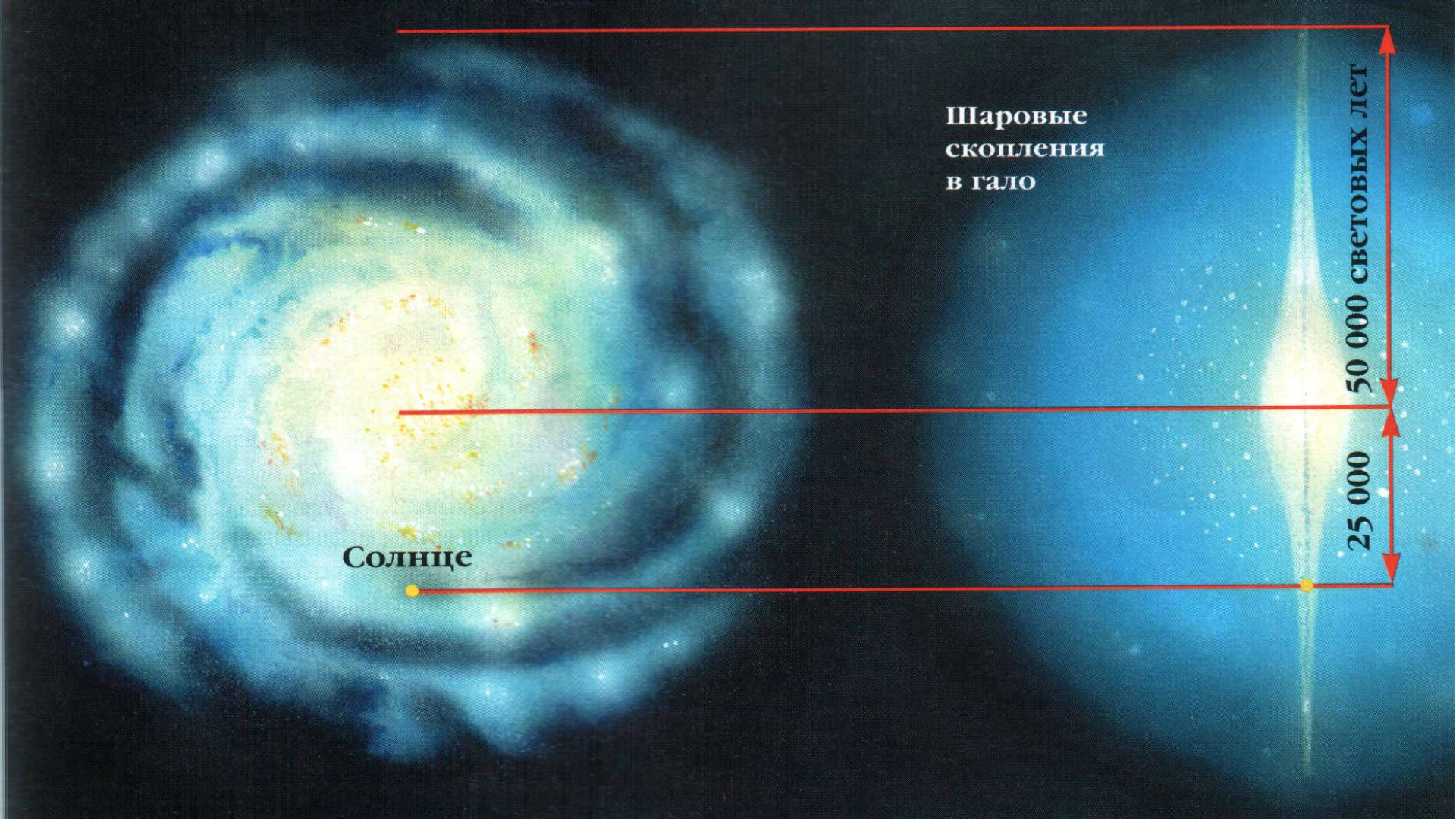


Схема строения нашей галактики

КОРОНА

ГАЛО

Звездный диск

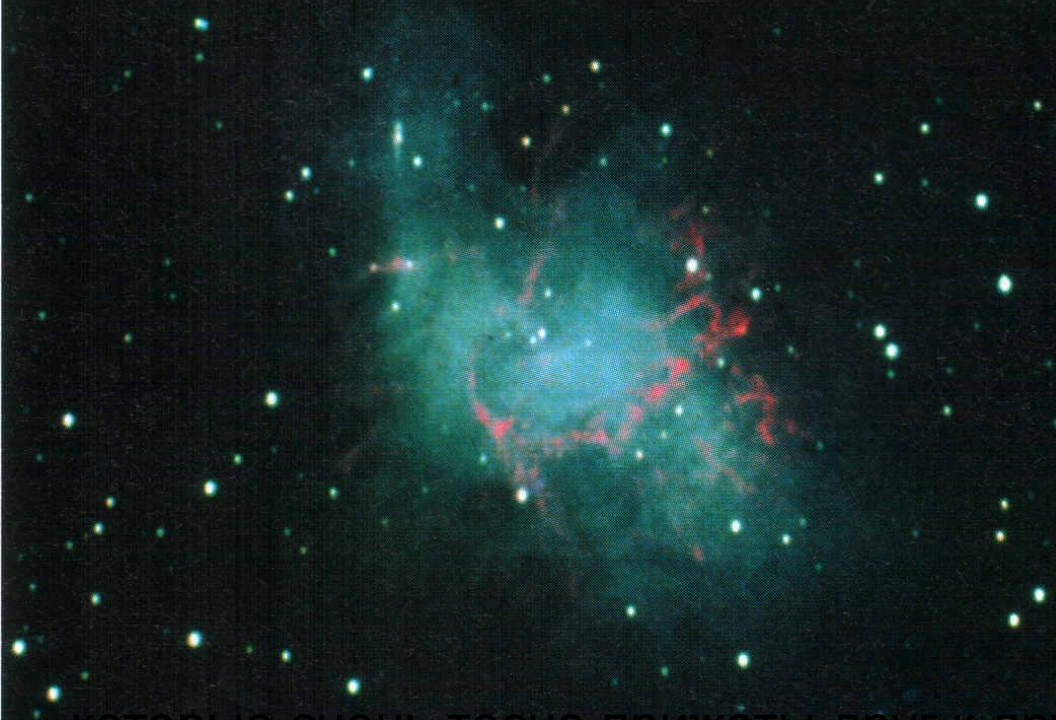
ЯДРО

Солнце

ГАЛО

Шаровые
скопления



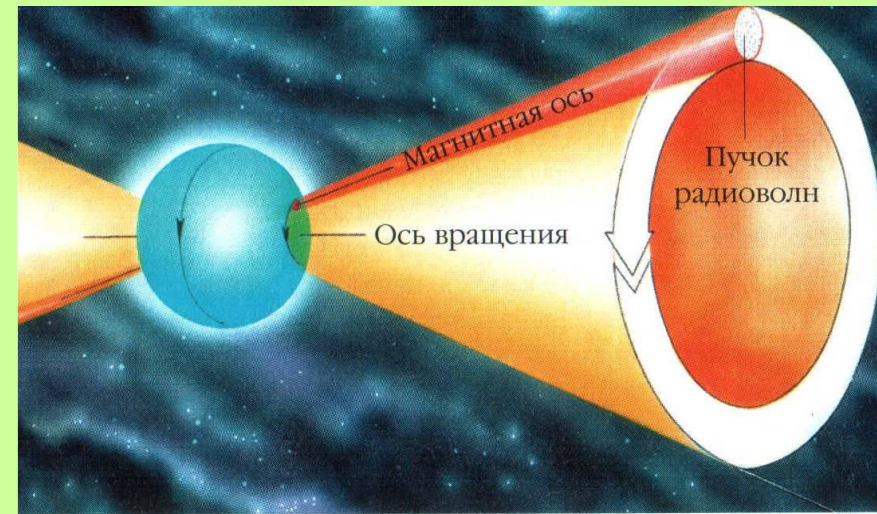


Необычные объекты

Пульсар – источник радиоизлучения, причем быстрого и правильной переменности. Их появление связано со взрывом сверхновых звезд. Вся звезда состоит из нейтронов,

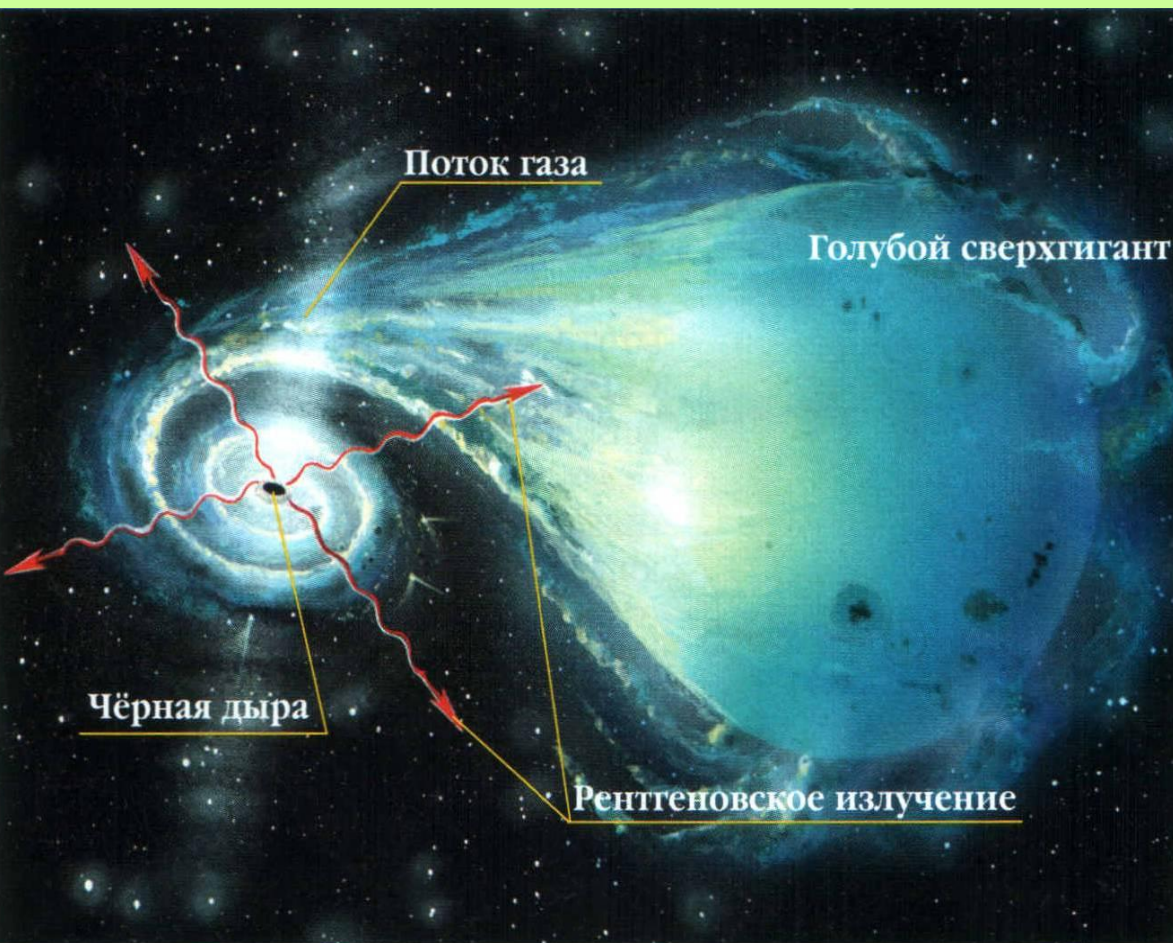
которые очень тесно прижаты друг к другу. Отсюда название – **нейтронная звезда**. Изучение пульсаров позволяет исследовать свойства мощных гравитационных и магнитных полей, недоступных в земных условиях.

Схема пульсара





Высокое постоянство периодов пульсаров дало возможность с большой точностью измерить период вращения Земли. Изменяясь при прохождении через межзвездный газ, излучения пульсаров несет важную информацию о составе и физических свойствах межзвездной среды.



ОТО предполагает наличие во Вселенной **черных дыр** - космических объектов, поглощающих все частицы, в том числе фотоны, подходящие к их поверхности. Они образуются в результате взрыва гигантских звезд массой более 3 масс Солнца.

Вблизи черной дыры газ сильно разогревается и

становится источником высокоэнергичного электромагнитного излучения в рентгеновском и гамма - диапазоне.

Двумерная модель «кротовой норы»

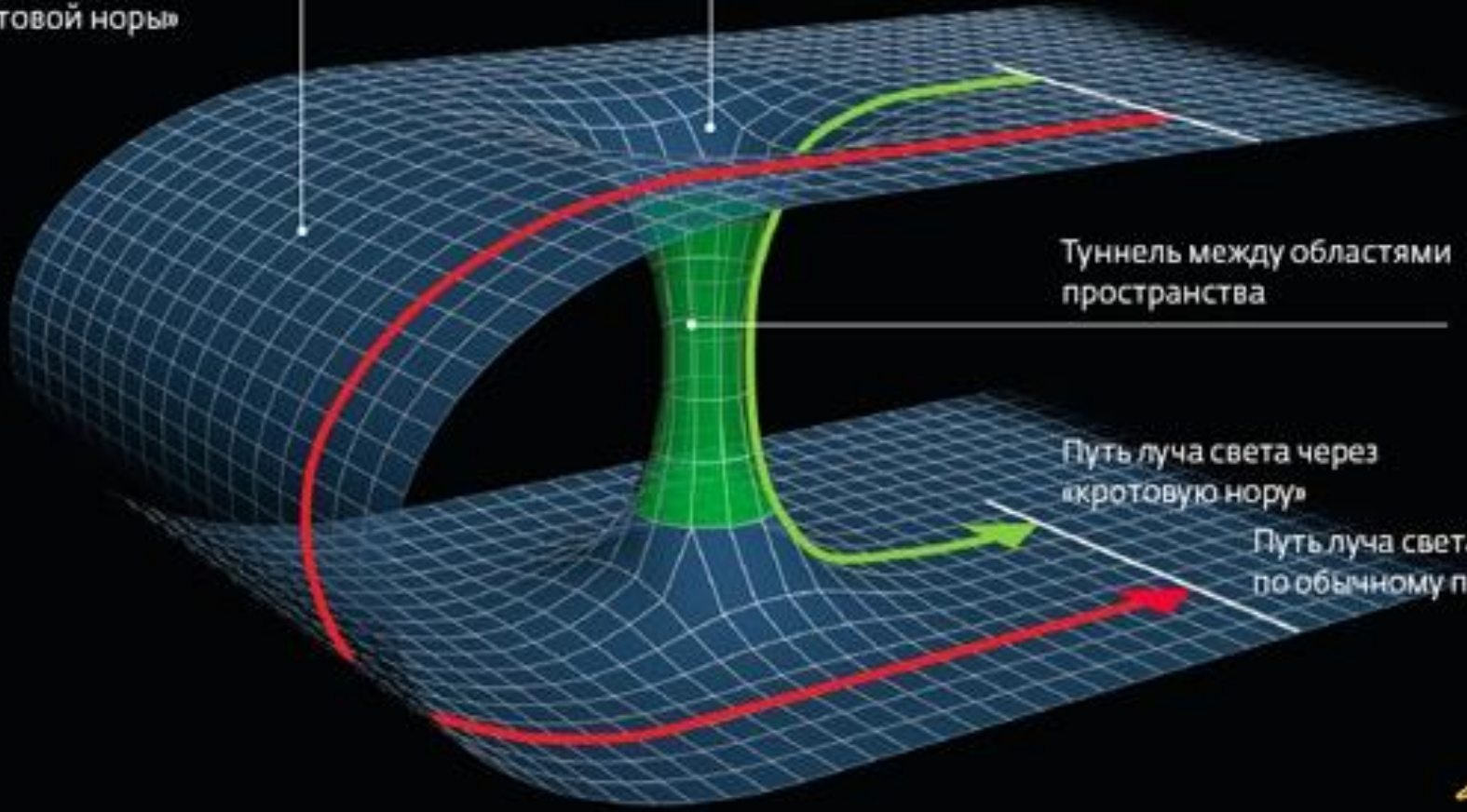
Обычное пространство
снаружи
«кротовой норы»

Вход в «кротовую нору»

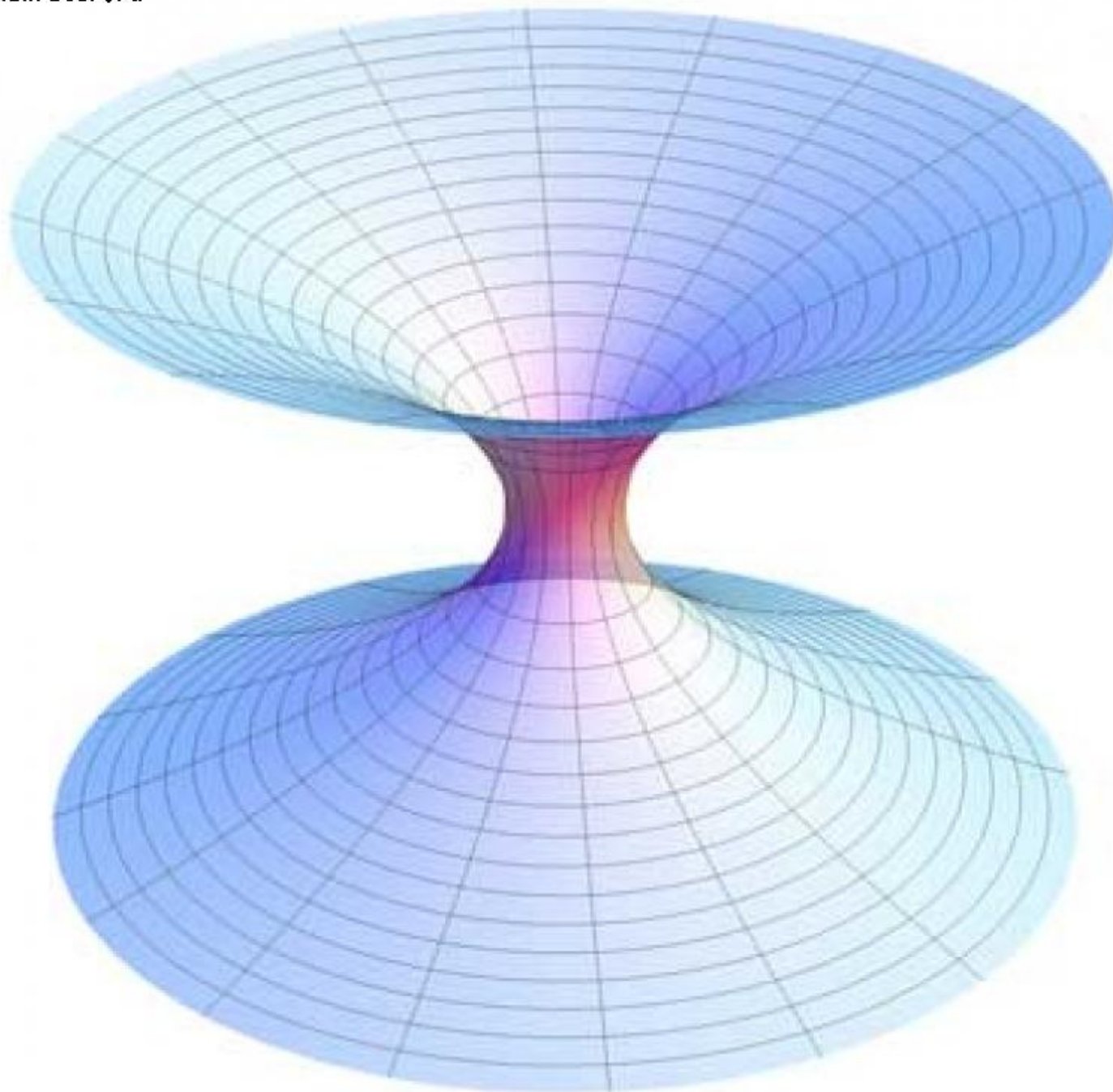
Туннель между областями
пространства

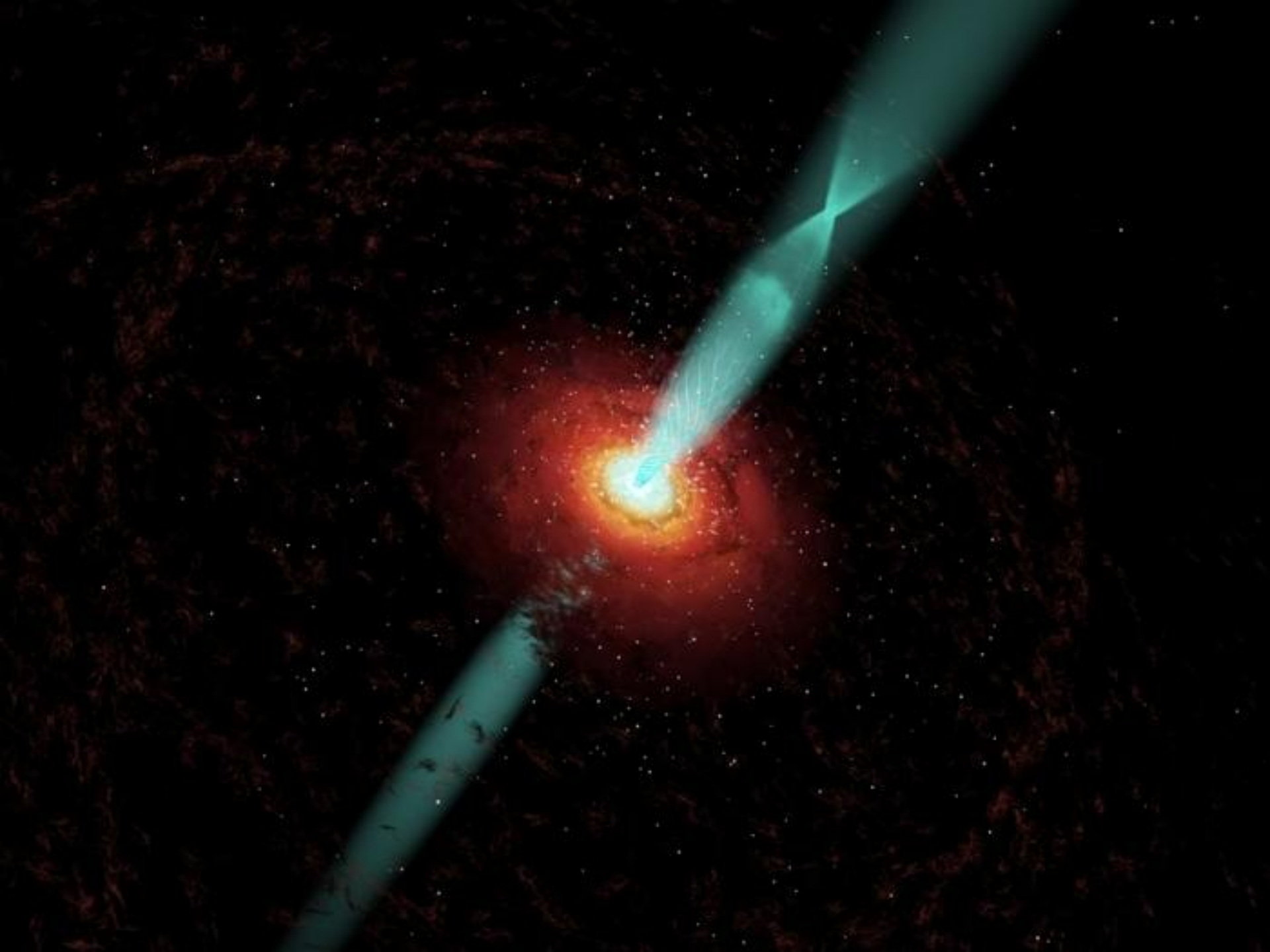
Путь луча света через
«кротовую нору»

Путь луча света
по обычному пространству




Joker



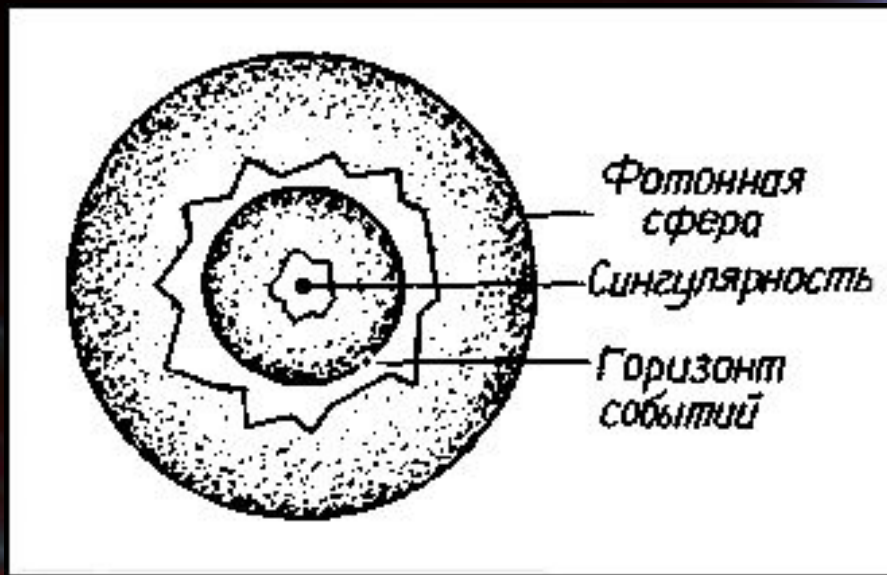




A blue star in the upper right corner emits a stream of glowing blue matter that curves towards a black hole in the lower left. The black hole is surrounded by a bright, glowing accretion disk. The background is a dark space filled with distant stars.

Голубая звезда отдает вещество
черной дыре

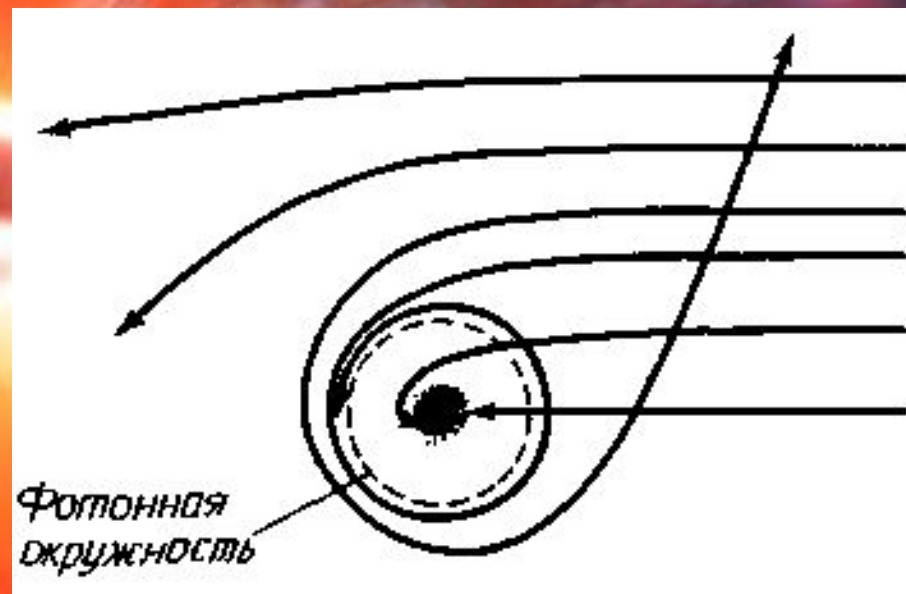
СТРУКТУРА ЧЕРНОЙ ДЫРЫ



Лучи света отклоняются мощным гравитационным полем, окружающим черную дыру. Вдали от дыры лучи искривляются слабо. Если же луч проходит совсем рядом с дырой, она может захватить его на круговую орбиту или засосать в себя совсем.

СИНГУЛЯРНОСТЬ - всё вещество черной дыры собранное в бесконечно малую точку бесконечной плотности в самом ее центре.

горизонт событий
граница черной дыры



Решение Шварцшильда

Решением Шварцшильда точно описывается изолированная невращающаяся, незаряженная и не испаряющаяся чёрная дыра (это сферически симметричное решение уравнений гравитационного поля (уравнений Эйнштейна) в вакууме). Её горизонт событий — это сфера, радиус которой, определённый из её площади по формуле $S = 4\pi r^2$, называется гравитационным радиусом или радиусом Шварцшильда.

Все характеристики решения Шварцшильда однозначно определяются одним параметром — массой. Так, гравитационный радиус чёрной дыры массы M равен

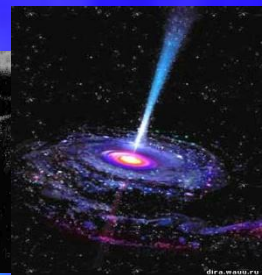
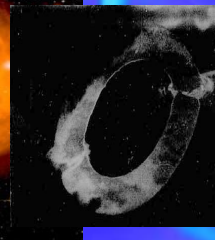
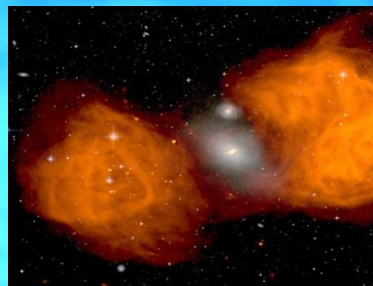
$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

где G — гравитационная постоянная, а c — скорость света



Можно ввести понятие «средней плотности» чёрной дыры, поделив её массу на «объём, заключённый под горизонтом событий»

$$\rho = \frac{3c^6}{32\pi M^2 G^3}$$



Средняя плотность падает с ростом массы чёрной дыры. Так, если чёрная дыра с массой порядка солнечной обладает плотностью, превышающей ядерную плотность, то сверхмассивная чёрная дыра с массой в 10^9 солнечных масс обладает средней плотностью порядка 20 кг/м^3 . Таким образом, чёрную дыру можно получить не только сжатием имеющегося объёма вещества, но и экстенсивным путём, накоплением огромного количества материала.

Масса же определяется по формуле:

$$M = \frac{c^2 r_s}{2G}$$

Карл Шварцшильд,
1873-1916, нем. астроном



В 1915 году К. Шварцшильд выписал решения уравнений Эйнштейна для пустого пространства в сферически симметричном статическом случае. Это решение оказалось пространством-временем \mathcal{M} с топологией $R^2 \times S^2$ и интервалом, приводимым к виду

$$ds^2 = -\left(1 - r_s/r\right)c^2 dt^2 + \left(1 - r_s/r\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

где

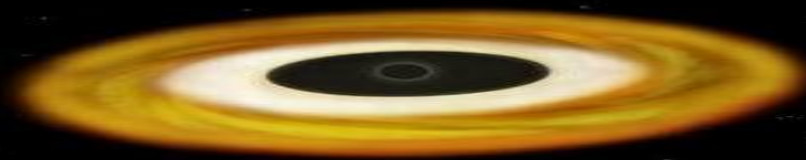
t — временная координата, в секундах,

r — радиальная координата, в метрах,

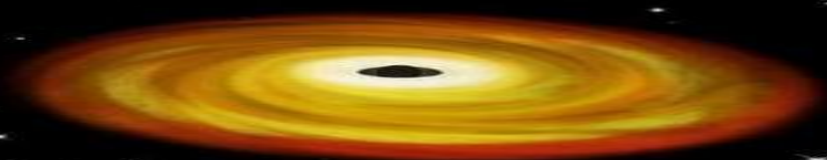
θ — географическая широта (угол от севера), в радианах,

φ — долгота, в радианах,

r_s — радиус Шварцшильда тела с массой M , в метрах.



NON-SPINNING BLACK HOLE



SPINNING BLACK HOLE

ДВА ТИПА ЧЁРНЫХ ДЫР

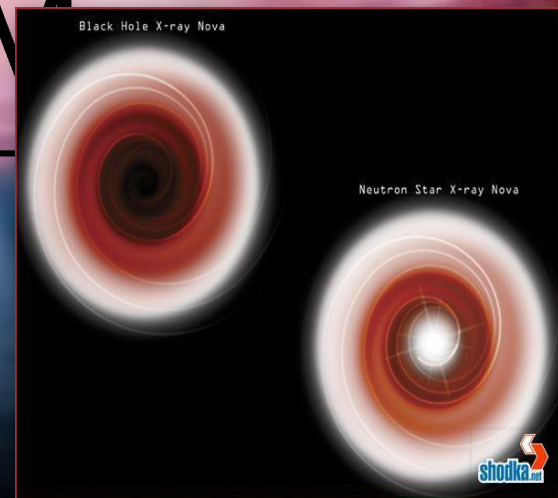
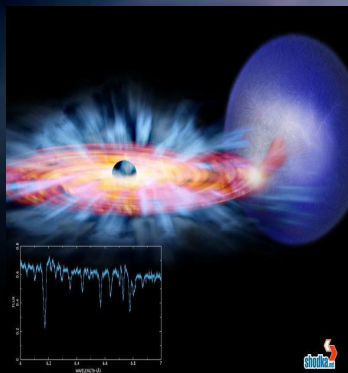


- **Астрофизические чёрные дыры.** Считается, что это остатки массивных звёзд, которые коллапсировали под воздействием собственных сил тяготения. Когда на такую чёрную дыру падает вещество, она начинает работать как космическая гидростанция, высвобождая гравитационную потенциальную энергию – единственный мощный источник, который может отвечать за испускание интенсивных рентгеновских лучей и газовых струй – джетов, – наблюдаемых астрономами в таких системах, как показанный на рисунке двойной рентгеновский источник.

Микроскопические чёрные дыры (мини-дыры). Их масса – не больше массы большого астероида. Эти дыры могли рождаться при коллапсе материи на ранних стадиях Большого Взрыва. Если пространство имеет дополнительные невидимые измерения, то такие чёрные дыры могут рождаться и в современной Вселенной при соударениях частиц большой энергии. Вместо того, чтобы превратиться в материю, эти чёрные дыры могут породить излучение и быстро испариться (испаряться, коллапсировать, коллапсировать).

Классическое уравнение для Черных Дыр

$$\frac{mV^2}{2} = \gamma \frac{mM}{R}$$





Лекция окончена!!!