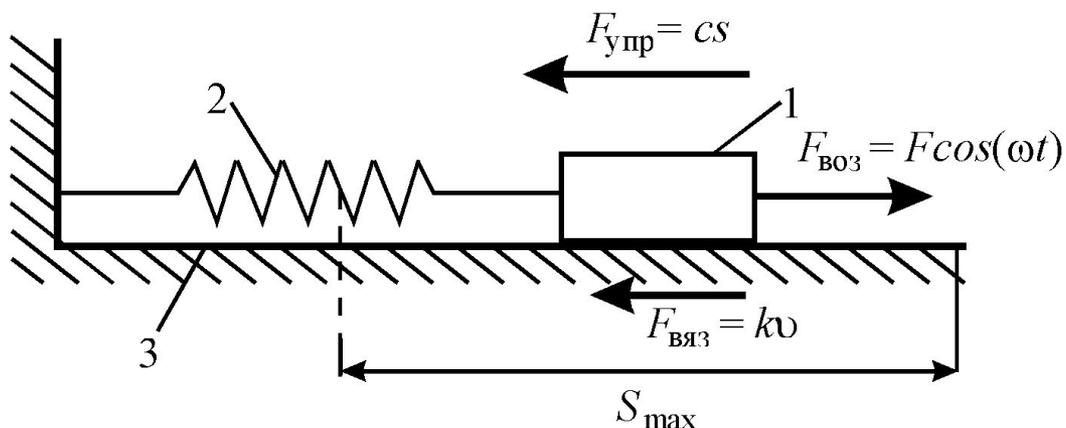


**Пример** Определить критерии физического подобия для механической системы, находящейся под воздействием возмущающей силы  $F_{\text{воз}} = F \sin(\omega t)$ . Система представляет груз массы  $M$ , который колеблется на пружине с жесткостью  $c$ , при перемещении массы на расстояние  $S$  появится упругая сила  $F_{\text{упр}} = -cS$ , вязкое сопротивление  $F_{\text{вяз}} = k\nu$ , ( $k$  – коэффициент пропорциональности).



Триботехническая система в виде гасителя колебаний транспортных средств: 1 – масса; 2 – пружина; 3 – опора;  $F_{\text{воз}}$  – возмущающая сила;  $F_{\text{упр}}$  – упругая сила;  $F_{\text{вяз}}$  – сила вязкого сопротивления

**Решение.** Рассматриваемая схема может быть реализована в виде гасителя вертикальных колебаний.

**1.** Выявляем параметры, которые определяют процесс колебания механической системы:

- 1)  $P_1 - M$  (кг), 2)  $P_2 - \omega$  ( $\text{с}^{-1}$ ), 3)  $P_3 - F$  ( $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$ ),  
4)  $P_4 - S$  (м), 5)  $P_5 - \mu$  (кг/с), 6)  $P_6 - c$  ( $\text{кг}/\text{с}^2$ ),  
7)  $P_7 - t$  (с).

Участвующих величин будет семь ( $m = 7$ ). Функциональная зависимость, подлежащая исследованию, получит вид:

$\Phi(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7) = 0$  или  $\Phi(M, \omega, F, S, \mu, c, t) = 0$ , где  $P_1, P_2, \dots, P_7$  – параметры системы.

**2.** Выберем три ( $k = 3$ ) независимые единицы применительно к системе измерений  $LMT$  (здесь  $L$  – линейный размер, м;  $M$  – масса, кг;  $T$  – время, с). В качестве основных (базисных) параметров примем:  $P_1 = M$ , кг;  $P_2 = \omega$ ,  $\text{с}^{-1}$ ,  $P_3 = F$ ,  $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$ .

3. Определяем размерность каждого основного (базисного) параметра:

$$\begin{aligned} P_1 = [M] &= [L]^0 [M]^1 [T]^0, \\ P_2 = [\omega] &= [L]^0 [M]^0 [T]^{-1}, \\ P_3 = [F] &= [L]^1 [M]^1 [T]^{-2}. \end{aligned}$$

Остальные четыре параметра ( $N_i - k = 7 - 4 = 3$ ) уравнения примут вид

$$\begin{aligned} P_4 = [S] &= [L]^1 [M]^0 [T]^0, \\ P_5 = [\mu] &= [L]^0 [M]^1 [T]^{-1}, \\ P_6 = [c] &= [L]^0 [M]^1 [T]^{-2}, \\ P_7 = [t] &= [L]^0 [M]^0 [T]^1. \end{aligned}$$

4. Проверяем правильность сделанного выбора по числу независимых (базисных) параметров ( $k = 3$ ), составив матрицу размерностей

Используя формулы Крамера

$$\begin{aligned} D_{1-3} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \end{aligned}$$

$$D_{1-3} = \begin{array}{l} \rho_1 = M \\ \rho_1 = M \\ \rho_1 = M \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right| = +1.$$

т. е.  $D_{1-3} \neq 0$ . Следовательно, значение базисных параметров  $p_1, p_2, p_3$  и их количество ( $k = 3$ ) выбрано правильно и величины  $M, \omega, F$  действительно независимы.

Определитель  $D = 0$  принимается в частных случаях, например, при использовании в опытах одинаковых материалов как для модели, так и образца, т. е.  $C_\lambda = C_\mu = C_T = C_{HB} = 1$  или  $\lambda_m = \lambda_0, \mu_m = \mu_0, E_m = E_0, HB_m = HB_0$  и т.д. (здесь  $\lambda$  – теплопроводность;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль упругости;  $HB$  – твердость материала)

**5.** Составляются выражения для оставшихся  $n = m - k$  критериев подобия. В общем виде их можно записать в виде дробей:

$$\pi_4 = \frac{[S]}{[M]^{\alpha_s} [\omega]^{\beta_s} [F]^{\varepsilon_s}} \quad \pi_5 = \frac{[\mu]}{[M]^{\alpha_k} [\omega]^{\beta_k} [F]^{\varepsilon_k}}$$
$$\pi_6 = \frac{[c]}{[M]^{\alpha_c} [\omega]^{\beta_c} [F]^{\varepsilon_c}} \quad \pi_7 = \frac{[t]}{[M]^{\alpha_t} [\omega]^{\beta_t} [F]^{\varepsilon_t}}.$$

Нахождение критериев подобия заключается в отыскании значений показателей степени.

6. Определяются значения показателей степени  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ .

Находят определители  $D_{is}$  для параметров  $P_{4-7}$ , т. е.

$$\alpha_4^\alpha = D_4^\alpha / D_{1-3} \quad , \dots \quad \alpha_7^\varepsilon = D_7^\varepsilon / D_{1-3}$$

Значения  $D_{4-7}^\alpha$ ,  $D_{4-7}^\beta$ ,  $D_{4-7}^\varepsilon$

могут быть найдены из определителя  $D_{1-3}$  после замены в нем  $i$ -строки на строку, составленную из показателей степени  $\alpha_{S,\mu,c,t}$ ,  $\beta_{S,\mu,c,t}$ ,  $\varepsilon_{S,\mu,c,t}$  величин  $p_4, p_5, p_6, p_7$  взятых из формулы:

$$\begin{array}{ccc}
M & L & T \\
\rho_4 & 0 & 1 & 0 \\
D_4^\alpha = \rho_2 & 0 & 0 & -1 \\
\rho_3 & 1 & 1 & -2
\end{array} = -1; \quad
\begin{array}{ccc}
M & L & T \\
\rho_1 & 1 & 0 & 0 \\
D_4^\beta = \rho_4 & 0 & 1 & 0 \\
\rho_3 & 1 & 1 & -2
\end{array} = -2; \quad
\begin{array}{ccc}
M & L & T \\
\rho_1 & 1 & 0 & 0 \\
D_4^\varepsilon = \rho_2 & 0 & 0 & -1 \\
\rho_4 & 0 & 1 & 0
\end{array} = +1;$$

$$\begin{array}{ccc}
M & L & T \\
\rho_5 & 1 & 0 & -1 \\
D_5^\alpha = \rho_2 & 0 & 0 & -1 \\
\rho_3 & 1 & 1 & -2
\end{array} = +1; \quad
\begin{array}{ccc}
M & L & T \\
\rho_1 & 1 & 0 & 0 \\
D_5^\beta = \rho_5 & 1 & 0 & -1 \\
\rho_3 & 1 & 1 & -2
\end{array} = -2; \quad
\begin{array}{ccc}
M & L & T \\
\rho_1 & 1 & 0 & 0 \\
D_5^\varepsilon = \rho_2 & 0 & 0 & -1 \\
\rho_5 & 1 & 0 & -1
\end{array} = 0;$$

$$D_6^\alpha = \begin{array}{c} M \quad L \quad T \\ p_6 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right| = +1;$$

$$D_6^\beta = \begin{array}{c} M \quad L \quad T \\ p_1 \\ p_6 \\ p_3 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right| = +2;$$

$$D_6^\varepsilon = \begin{array}{c} M \quad L \quad T \\ p_1 \\ p_2 \\ p_6 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{array} \right| = 0;$$

$$D_7^\alpha = \begin{array}{c} M \quad L \quad T \\ p_7 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right| = 0;$$

$$D_7^\beta = \begin{array}{c} M \quad L \quad T \\ p_1 \\ p_7 \\ p_3 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right| = -1;$$

$$D_7^\varepsilon = \begin{array}{c} M \quad L \quad T \\ p_1 \\ p_2 \\ p_7 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = 0;$$

Численные значения показателей будут:

$$\alpha_l = \frac{D_4^\alpha}{D_{1-3}} = \frac{-1}{+1} = -1;$$

$$\beta_l = \frac{D_4^\beta}{D_{1-3}} = \frac{-2}{+1} = -2;$$

$$\varepsilon_l = \frac{D_4^\varepsilon}{D_{1-3}} = \frac{+1}{+1} = +1;$$

$$\alpha_k = \frac{D_5^\alpha}{D_{1-3}} = \frac{+1}{+1} = +1;$$

$$\beta_k = \frac{D_5^\beta}{D_{1-3}} = \frac{+1}{+1} = +1;$$

$$\varepsilon_k = \frac{D_5^\varepsilon}{D_{1-3}} = \frac{0}{+1} = 0;$$

$$\alpha_c = \frac{D_6^\alpha}{D_{1-3}} = \frac{+1}{+1} = +1;$$

$$\beta_c = \frac{D_6^\beta}{D_{1-3}} = \frac{+2}{+1} = +2;$$

$$\varepsilon_c = \frac{D_6^\varepsilon}{D_{1-3}} = \frac{0}{+1} = 0;$$

$$\alpha_t = \frac{D_7^\alpha}{D_{1-3}} = \frac{0}{+1} = 0;$$

$$\beta_t = \frac{D_7^\beta}{D_{1-3}} = \frac{-1}{+1} = -1;$$

$$\varepsilon_t = \frac{D_7^\varepsilon}{D_{1-3}} = \frac{0}{+1} = 0.$$

Используя значения показателей и уравнения, окончательные значения критериев запишем в следующем виде:

$$\pi_4 = \frac{[S]}{p_1^{-1} p_2^{-2} p_3^{+1}} = \frac{[L]}{[M]^{-1} [\omega]^{-2} [F]^{+1}} = \frac{LM\omega^2}{F} = \frac{M\nu}{FT}.$$

Так как  $\omega = 1/T$ , то 
$$\pi_4 = \frac{M\nu}{FT^2}.$$

$$\pi_5 = \frac{[\mu]}{p_1^1 p_2^1 p_3^0} = \frac{[\mu]}{[M]^{+1} [\omega]^{+1}} = \frac{\mu}{M^{+1} T^{-1}} = \frac{\mu T}{M};$$

$$\pi_6 = \frac{[c]}{p_1^1 p_2^{-2} p_3^0} = \frac{[c]}{[M]^1 [\omega]^{-2}} = \frac{cT^2}{M};$$

$$\pi_7 = \frac{[t]}{p_1^0 p_2^{-1} p_3^0} = \frac{[T]}{[M]^0 [\omega]^{-1} [F]^0} = \omega T.$$

Согласно второй теореме подобия, уравнение движения груза под действием сил представляется функциональной зависимостью из критериев подобия

$$\Phi(\pi_4; \pi_5; \pi_6; \pi_7) = 0$$

или

$$\Phi\left(\frac{ML}{FT^2}; \frac{\mu T}{M}; \frac{cT^2}{M}; \omega T\right) = 0.$$



$$a = \sigma^\alpha t^\beta l^\gamma \vartheta^\delta$$

За основные единицы приняты масса  $M$ , длина  $L$ , время  $T$ , температура  $\theta$ , а за независимые параметры –  $\sigma$  – напряжение;  $t$  – время;  $l$  – длина;  $\vartheta$  – температура.

Составим систему уравнений размерностей всех величин

$$\ln [a] = 0 \ln M + 2 \ln L - \ln T + 0 \ln \theta,$$

$$\ln [\sigma] = \ln M - \ln L - 2 \ln T + 0 \ln \theta,$$

$$\ln [t] = 0 \ln M + 0 \ln L + \ln T + 0 \ln \theta,$$

$$\ln [l] = 0 \ln M + \ln L + 0 \ln T + 0 \ln \theta,$$

$$\ln [\vartheta] = 0 \ln M + 0 \ln L + 0 \ln T + \ln \theta.$$

Эта система определяется матрицей

$$\begin{array}{ccccc} & M & L & T & \theta \\ a & 0 & 2 & -1 & 0 \\ \sigma & 1 & -1 & -2 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vartheta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Из нее для размерностей независимых единиц может быть выделен определитель четвертого порядка

$$D_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$