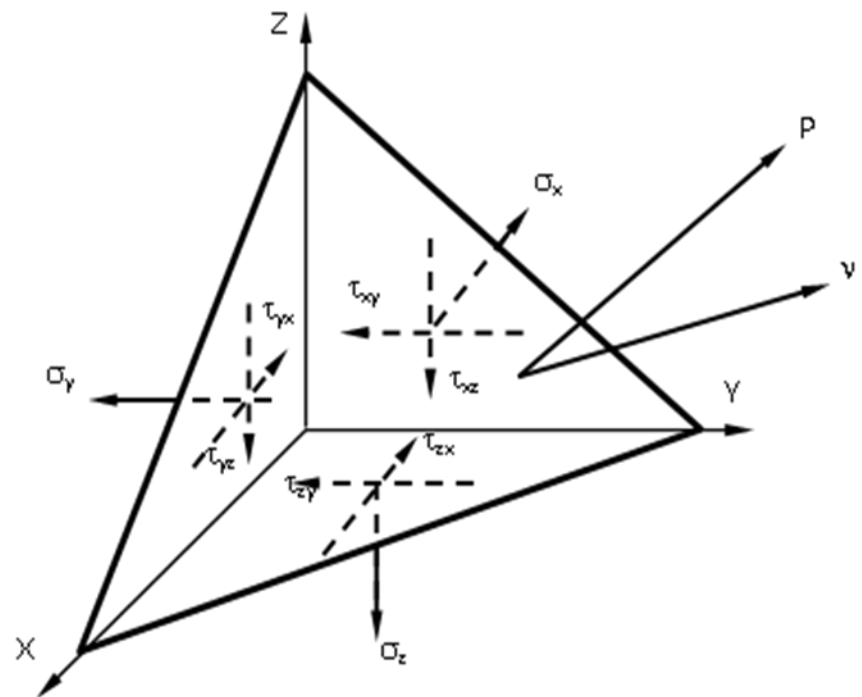
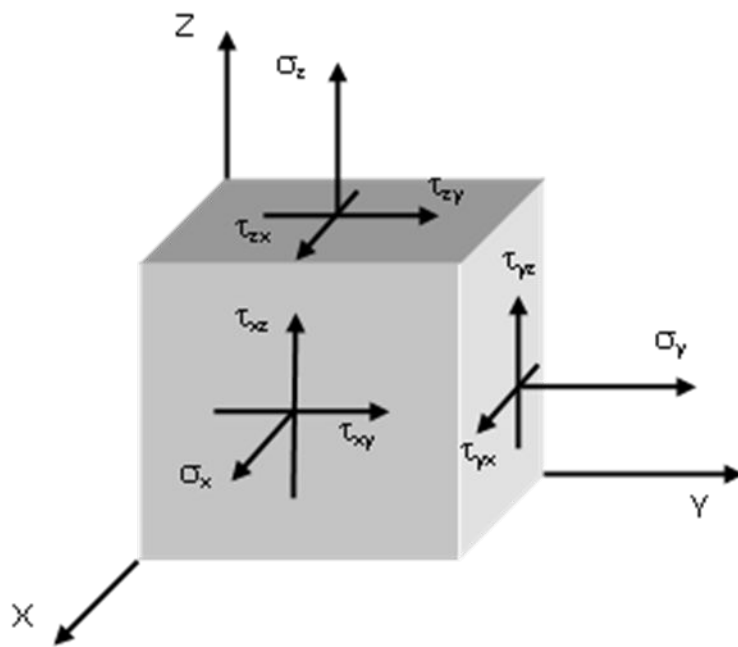


**Определение
напряжений на
различных
площадках**

Напряжения на наклонных площадках

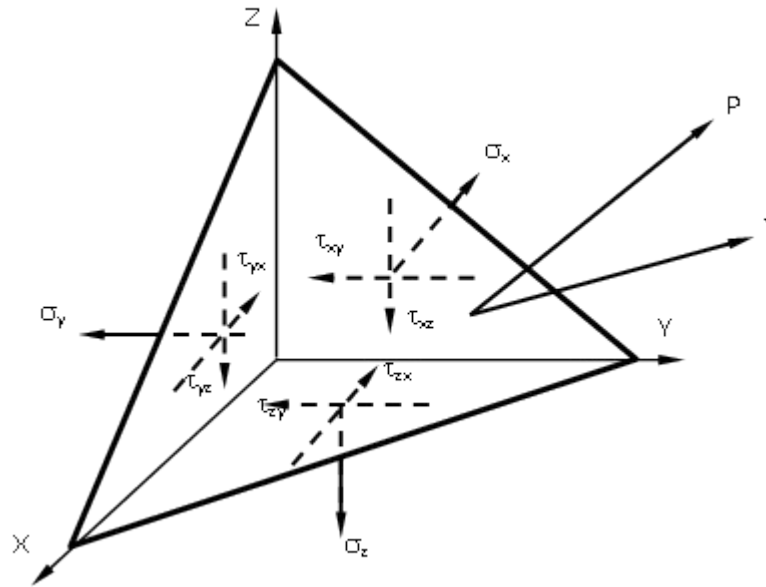
Элементарный объём в форме параллелепипеда, связанный с системой координат таким образом, чтобы его грани совпадали с координатными плоскостями, разрежем наклонной плоскостью



Положение наклонной площадки характеризуется вектором нормали ν с направляющими косинусами l, m, n . На наклонной площадке площадью dF действует полное напряжение P с проекциями по осям P_x, P_y, P_z . Пусть нормальные и касательные напряжения на гранях, совпадающих с координатными плоскостями, известны. Необходимо найти нормальное и касательное напряжение на наклонной площадке - σ_ν и τ_ν . Площадки, отсекаемые на координатных плоскостях, будут иметь площади:

$$dF_x = dF \cdot l, \quad dF_y = dF \cdot m, \quad dF_z = dF \cdot n.$$

Составим уравнение равновесия сил в проекции на ось X:



$$\Sigma X = 0,$$

$$P_x \cdot dF - \sigma_x \cdot dF_x - \tau_{yx} \cdot dF_y - \tau_{zx} \cdot dF_z = 0,$$

$$P_x \cdot dF - \sigma_x \cdot dF \cdot l - \tau_{yx} \cdot dF \cdot m - \tau_{zx} \cdot dF \cdot n = 0,$$

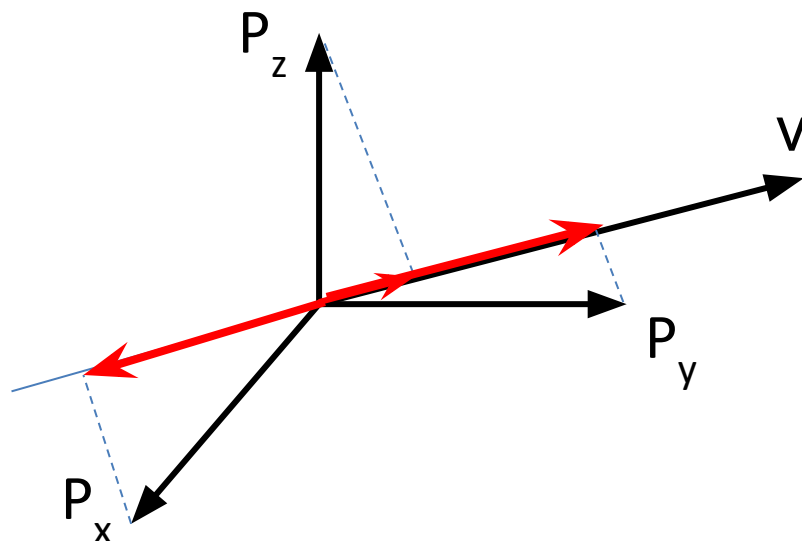
$$P_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n.$$

Аналогично, составляя уравнения равновесия сил на оси Y и Z

$$P_y = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n,$$

$$P_z = \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n.$$

Чтобы определить нормальное напряжение на наклонной площадке, спроецируем проекции полного напряжения на нормаль.



$$\begin{aligned}
 \sigma_v &= P_x \cdot l + P_y \cdot m + P_z \cdot n = \\
 &= (\sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n) \cdot l + (\tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n) \cdot m + \\
 &+ (\tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n) \cdot n = \\
 &= \sigma_x \cdot l^2 + \tau_{yx} \cdot m \cdot l + \tau_{zx} \cdot n \cdot l + \tau_{xy} \cdot l \cdot m + \sigma_y \cdot m^2 + \tau_{zy} \cdot n \cdot m + \tau_{xz} \cdot l \cdot n + \\
 &\tau_{yz} \cdot m \cdot n + \sigma_z \cdot n^2
 \end{aligned}$$

С учетом закона парности касательных напряжений ($\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$), получаем основную квадратичную форму нормальных напряжений:

$$\sigma_v = \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot n^2 + 2\tau_{yx} \cdot m \cdot l + 2\tau_{zx} \cdot n \cdot l + 2\tau_{zy} \cdot n \cdot m$$

Полученное выражение позволяет определить нормальное напряжение на любой наклонной площадке, поскольку при выводе этого выражения никаких ограничений на положение площадки не накладывалось. Теперь найдем величину касательного напряжения на наклонной площадке:

$$R^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2,$$

$$\tau_v^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - \sigma_v^2.$$

Главные площадки и главные напряжения

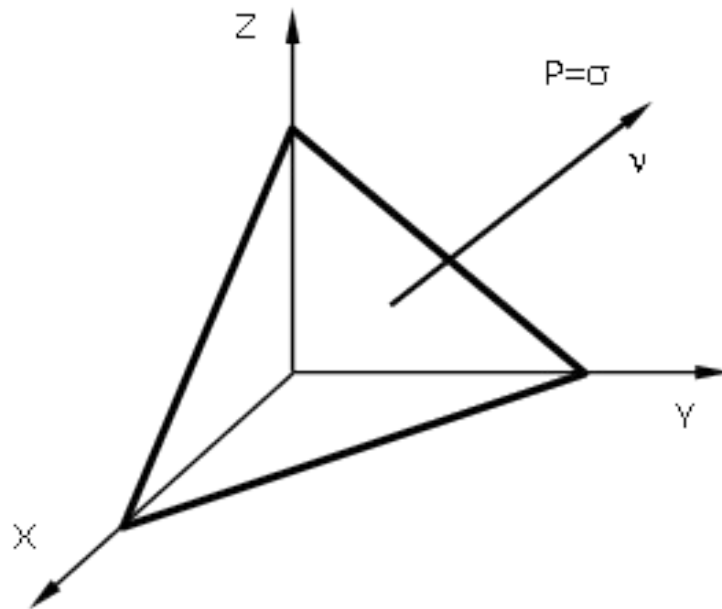
Нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке зависят от ее положения, то есть от направляющих косинусов l , m , n .

Площадки, на которых касательные напряжения равны нулю и действуют только нормальные напряжения, называются **главными**.

Нормальные напряжения на этих площадках называются **главными напряжениями**.

Предположим, что наклонная площадка с направляющими косинусами l , m , n является главной, то есть вектор нормали к наклонной площадке совпадает с вектором полного напряжения. Тогда нормальное напряжение на этой площадке равно полному напряжению, а касательное напряжение равно нулю.

Предположим, что наклонная площадка с направляющими косинусами l, m, n является главной, то есть вектор нормали к наклонной площадке совпадает с вектором полного напряжения ($\tau=0$).



$$P_x = \sigma \cdot l, \quad P_y = \sigma \cdot m, \quad P_z = \sigma \cdot n.$$

Проекции по координатным осям:

$$P_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n = \sigma \cdot l,$$

$$P_y = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n = \sigma \cdot m,$$

$$P_z = \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n = \sigma \cdot n.$$

В данных уравнениях четыре неизвестных (направляющие косинусы l , m , n и главное напряжение σ), поэтому необходимо четвертое уравнение:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n = 0 \\ \tau_{xy} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{zy} \cdot n = 0 \\ \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + (\sigma_z - \sigma) \cdot n = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases}$$

Система уравнений имеет ненулевое решение (нулевое не устраивает из-за четвертого уравнения системы), когда равен нулю главный определитель системы:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & T_{yx} & T_{zx} \\ T_{xy} & \sigma_y - \sigma & T_{zy} \\ T_{xz} & T_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Раскроем определитель

$$\begin{aligned} & (\sigma_x - \sigma) \cdot (\sigma_y - \sigma) \cdot (\sigma_z - \sigma) + T_{yx} \cdot T_{zy} \cdot T_{xz} + T_{xy} \cdot T_{yz} \cdot T_{zx} \\ & - T_{xz} \cdot (\sigma_y - \sigma) \cdot T_{zx} - T_{xy} \cdot T_{yx} \cdot (\sigma_z - \sigma) - T_{yz} \cdot T_{zy} \cdot (\sigma_x - \sigma) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые по степеням главного напряжения

$$\begin{aligned}
 & -\sigma^3 + \sigma^2 \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \sigma \cdot (\sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_y - \\
 & T_{xz}^2 - T_{xy}^2 - T_{yz}^2) + (\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot T_{xy} \cdot T_{yz} \cdot T_{zx} - \sigma_y \cdot T_{xz}^2 - \\
 & \sigma_z \cdot T_{xy}^2 - \sigma_x \cdot T_{yz}^2) = 0.
 \end{aligned}$$

Запишем это уравнение в более компактной форме

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0$$

где $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$

$$I_2 = \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_y - T_{xz}^2 - T_{xy}^2 - T_{yz}^2,$$

$$I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot T_{xy} \cdot T_{yz} \cdot T_{zx} - \sigma_y \cdot T_{xz}^2 - \sigma_z \cdot T_{xy}^2 - \sigma_x \cdot T_{yz}^2$$

Введенные обозначения называются **инвариантами напряженного состояния**. Так как главные напряжения в точке являются физической характеристикой, то они не зависят от выбора системы координат, а, следовательно, и значения инвариантов также не зависят от выбора системы координат.

Решая кубическое уравнение, получим три вещественных корня – три главных напряжения, которые нумеруются в порядке убывания: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Подставляя величину главного напряжения в систему, можно определить положение главной площадки, т. е. определить ее направляющие косинусы. Три главных площадки в точке взаимно перпендикулярны.

**Виды
напряженных
состояний в точке**

- Объемное (трехосное) напряженное состояние $I_1 \neq 0, I_2 \neq 0, I_3 \neq 0$, следовательно три главных напряжения отлично от нуля.
- Плоское (двухосное) напряженное состояние $I_1 \neq 0, I_2 \neq 0, I_3 = 0$, следовательно два главных напряжения отлично от нуля.
- Чистый сдвиг (частный случай плоского) $I_1 = 0, I_2 \neq 0, I_3 = 0$, следовательно два главных напряжения отлично от нуля (причем $\sigma_1 = -\sigma_3$).
- Линейное (одноосное) напряженное состояние $I_1 \neq 0, I_2 = 0, I_3 = 0$, следовательно одно главное напряжение отлично от нуля.

Примеры различных видов напряженных состояний

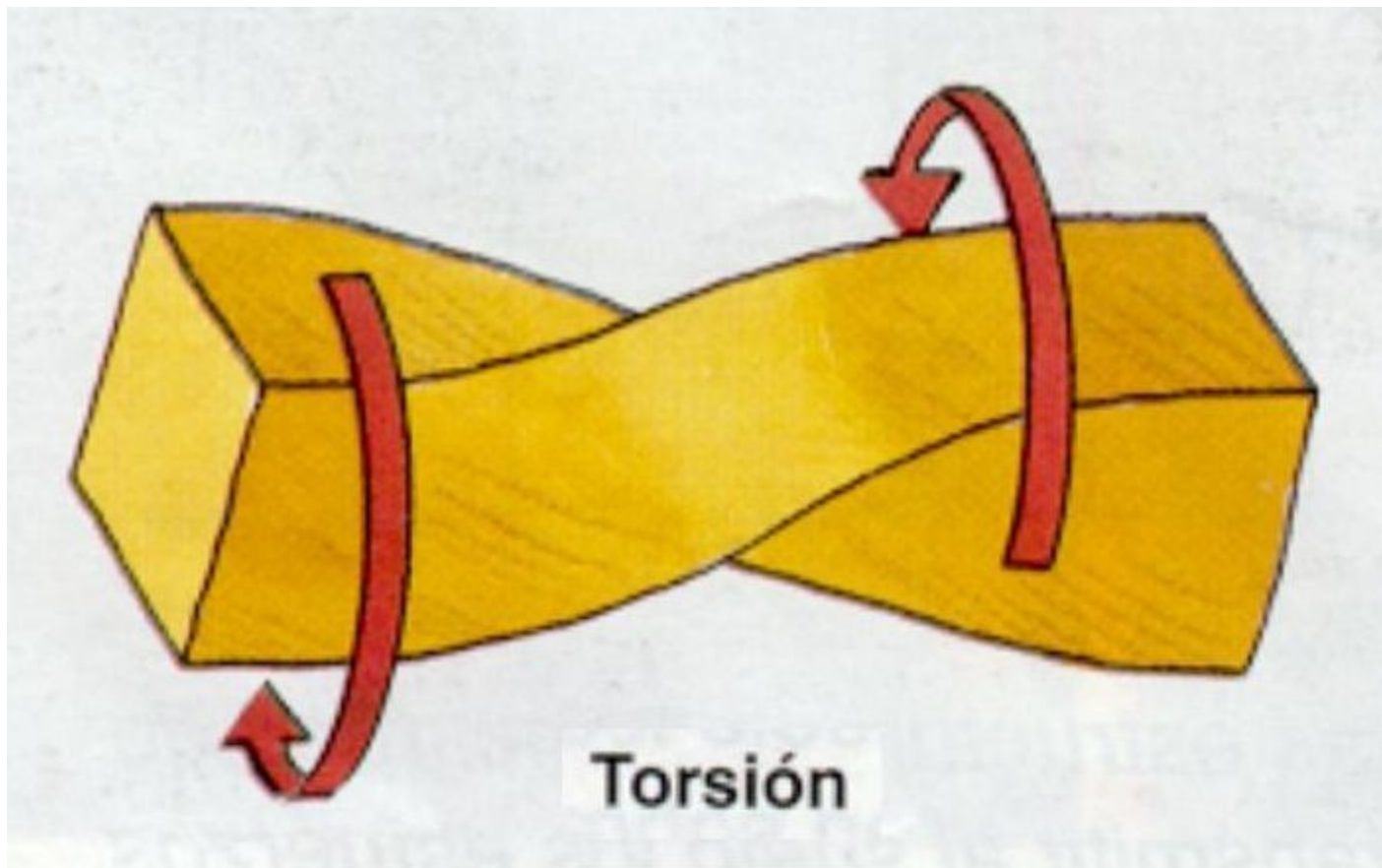
Объемное- возникает во время объемной
штамповки



Плоское-возникает при изгибе или изгибе с кручением



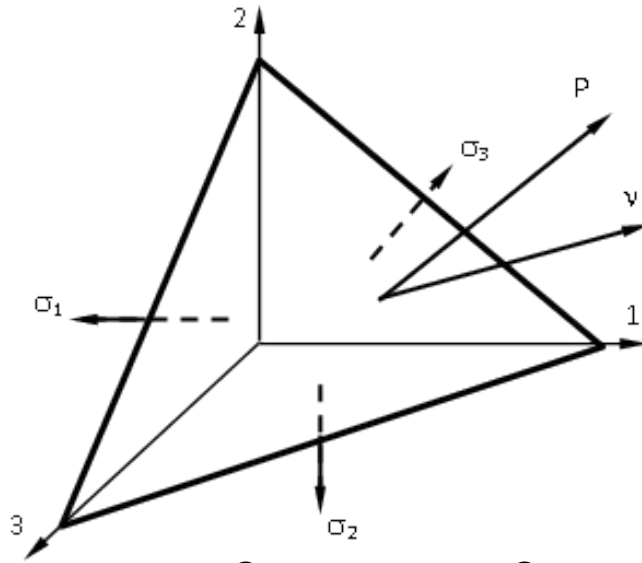
Чистый сдвиг - возникает при кручении



Линейное - возникает при растяжении-сжатии



**Экстремальные свойства
главных напряжений.
Круговая диаграмма Мора**



$$\sigma_v = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2$$

$$P_x = \sigma_1 \cdot l$$

$$P_y = \sigma_2 \cdot m$$

$$P_z = \sigma_3 \cdot n$$

$$P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = \sigma_1^2 \cdot l^2 + \sigma_2^2 \cdot m^2 + \sigma_3^2 \cdot n^2$$

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2 \\ \sigma^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 \cdot l^2 + \sigma_2^2 \cdot m^2 + \sigma_3^2 \cdot n^2 \\ 1 = l^2 + m^2 + n^2 \end{cases}$$

Умножим каждое уравнение на произвольные множители a , b , c и сложим, сгруппировав при этом слагаемые по направляющим косинусам

$$\begin{aligned} & a \cdot \sigma + b \cdot (\sigma^2 + \tau^2) + c = \\ & = l^2 \cdot (a \cdot \sigma_1 + b \cdot \sigma_1^2 + c) + m^2 \cdot (a \cdot \sigma_2 + b \cdot \sigma_2^2 + c) + \\ & + n^2 \cdot (a \cdot \sigma_3 + b \cdot \sigma_3^2 + c) \end{aligned}$$

Для определения величины I^2 подберем коэффициенты a, b, c таким образом, чтобы вторая и третья скобки в правой части уравнения обнулились:

$$a \cdot \sigma_2 + b \cdot \sigma_2^2 + c = 0,$$

$$a \cdot \sigma_3 + b \cdot \sigma_3^2 + c = 0,$$

получаем

$$b = 1, a = -(\sigma_2 + \sigma_3), c = \sigma_2 \cdot \sigma_3.$$

Подставляя полученные коэффициенты в уравнение, находим величину I^2 :

$$I^2 = \frac{a \cdot \sigma + (\sigma^2 + \tau^2) + c}{a \cdot \sigma_1 + b \cdot \sigma_1^2 + c} = \frac{-(\sigma_2 + \sigma_3) \cdot \sigma + \sigma^2 + \tau^2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3}{-(\sigma_2 + \sigma_3) \cdot \sigma_1 + \sigma_1^2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3}$$

Упрощая получим:

$$l^2 = \frac{(\sigma - \sigma_2) \cdot (\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}$$

аналогично находим квадраты двух других направляющих косинусов:

$$m^2 = \frac{(\sigma - \sigma_3) \cdot (\sigma - \sigma_1) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_3) \cdot (\sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$n^2 = \frac{(\sigma - \sigma_1) \cdot (\sigma - \sigma_2) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_1) \cdot (\sigma_3 - \sigma_2)}$$

В уравнениях дроби должны быть больше нуля, так как в левых частях стоят квадраты величин. Проанализируем знаменатели дробей на основе неравенства $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) \geq 0,$$

$$(\sigma_2 - \sigma_3) \cdot (\sigma_2 - \sigma_1) \leq 0,$$

$$(\sigma_3 - \sigma_1) \cdot (\sigma_3 - \sigma_2) \geq 0.$$

На основе неравенств можно сделать вывод о знаке числителя:

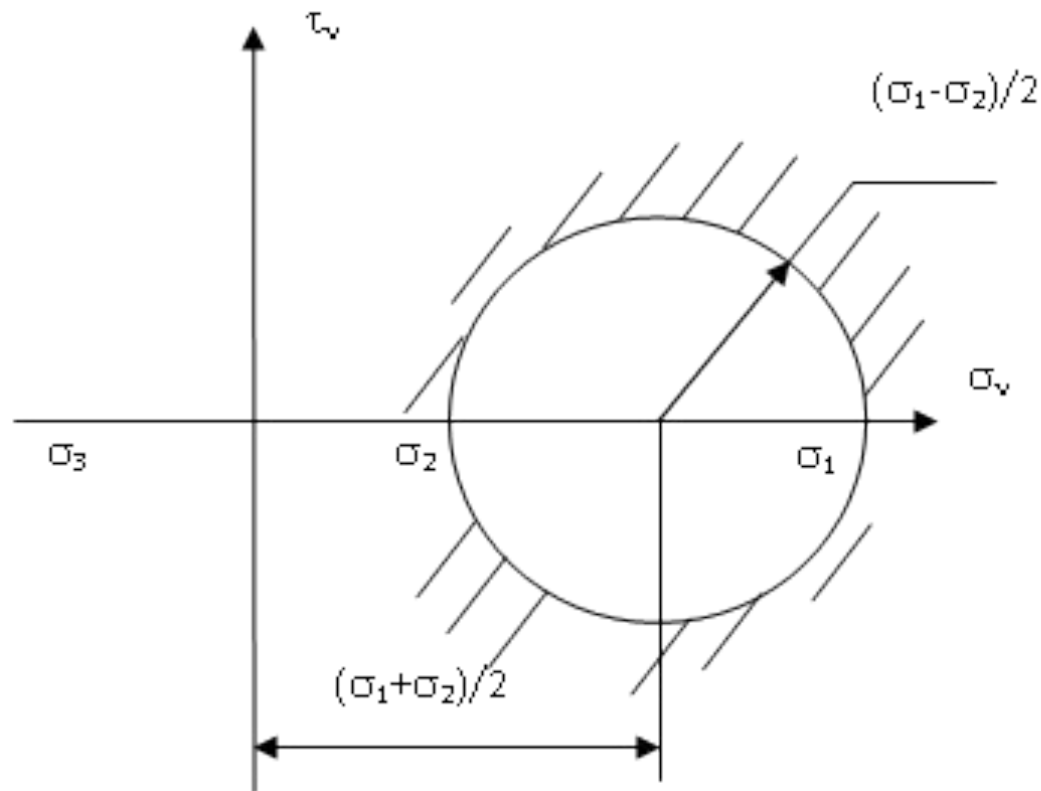
$$(\sigma - \sigma_2) \cdot (\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \geq 0,$$

$$(\sigma - \sigma_3) \cdot (\sigma - \sigma_1) + \tau^2 \leq 0,$$

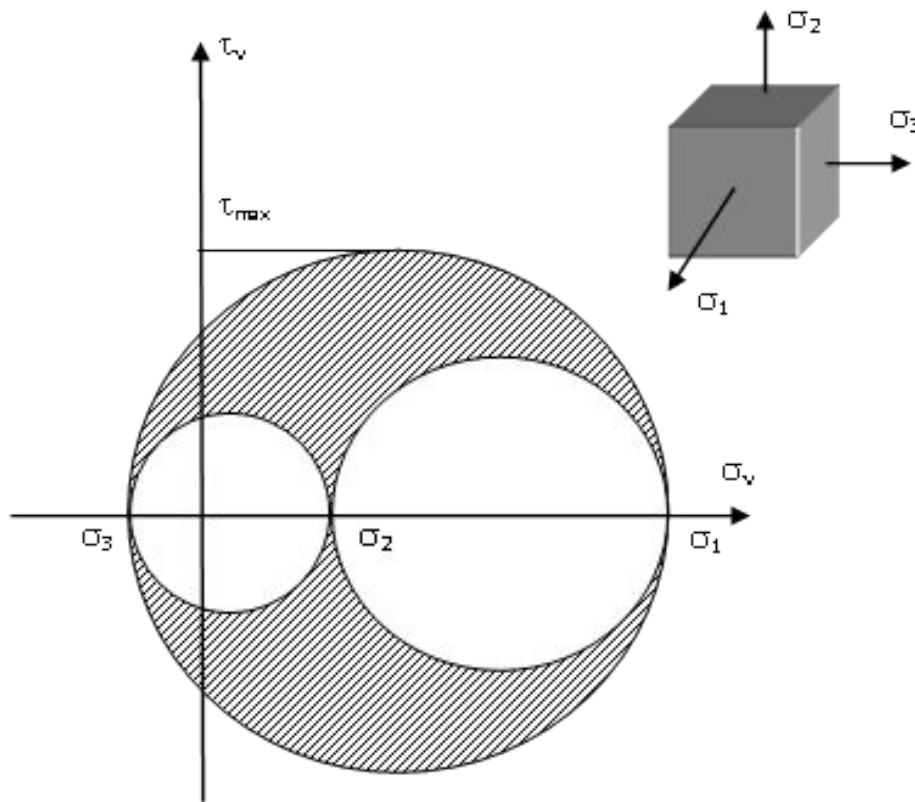
$$(\sigma - \sigma_1) \cdot (\sigma - \sigma_2) + \tau^2 \geq 0.$$

Рассмотрим третье неравенство и представим его решение графически:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$



Представим решение системы графически. Эта диаграмма называется **круговой диаграммой Мора**. Круговая диаграмма позволяет установить экстремальные свойства нормальных и касательных напряжений.



$$\left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

- σ_1 - максимальное нормальное напряжение, которое может возникнуть в точке на любой наклонной площадке;
- σ_3 - минимальное нормальное напряжение, которое может возникнуть в точке на любой наклонной площадке;
- $\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$ - максимальное касательное напряжение, которое может возникнуть в точке на любой наклонной площадке, действует на площадках наклоненных к главным на угол 45° .