3. Основы оптимального приёма сигналов

3.1. Оптимальная оценка параметра сигнала

3.2. Оптимальное обнаружение сигнала

3.3. Оптимальное различение известных сигналов

3.4. Оптимальная обработка сигналов с использованием согласованных фильтров

Основные понятия

Оптимальный приёмник *– устройство обработки, обеспечивающее наилучшее выделение полезной информации из сигнала, принимаемого в смеси с аддитивной шумовой помехой*

Шумовая помеха *– нормальный белый шум*

Синтез оптимального приёмника *– нахождение структуры и параметров устройства обработки, обеспечивающее наилучшее выделение полезной информации из определённого типа сигнала*

Критерий оптимальности приёмника *– правило, которое определяет, какой способ выделения полезной информации считается наилучшим*

Примеры:

- критерий минимума СКО
- критерий максимума отношения сигнал-шум
- критерий максимума апостериорной вероятности

Задачи, решаемые в теории оптимального приёма сигналов

Будут рассмотрены

1. *Оценка параметров сигнала, принимаемого в смеси с помехами*
2. *Обнаружение сигнала на фоне помех*
3. *Различение двух или нескольких сигналов на фоне помех*
4. *Фильтрация (выделение) сигнала из смеси с помехами*

(Задачи 2 и 3 – частный случай задачи 1)

3.1. Оптимальная оценка параметра сигнала

Априорная и апостериорная вероятности

a priori – *«из предыдущего» (до «опыта»)*

a posteriori – *«из последующего» (после «опыта»)*

Принимаемая смесь сигнала и шума: $y(t) = s_\lambda(t) + n(t)$

До начала обработки известно (априорная информация):

- *вид сигнала*
- *распределение вероятностей шума*
- *априорное распределение вероятностей параметра λ*

Обрабатываются:

N отсчётов (вектор) принятого колебания: $\vec{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \ldots, y_N) = \vec{\mathbf{s}}_\lambda + \vec{\mathbf{n}}$

или

непрерывное колебание: $y(t) = s_\lambda(t) + n(t)$

Формула полной вероятности

Совместная плотность вероятности отсчётов $\vec{\mathbf{y}} = \left(y_1, y_2, \ldots, y_N\right)$ *и параметра* λ

$$w(\lambda, \vec{\mathbf{y}}) = w(\lambda \mid \vec{\mathbf{y}}) \cdot w(\vec{\mathbf{y}}) = w(\vec{\mathbf{y}} \mid \lambda) \cdot w(\lambda) \Rightarrow w(\lambda \mid \vec{\mathbf{y}}) \cdot w(\vec{\mathbf{y}}) = w(\vec{\mathbf{y}} \mid \lambda) \cdot w(\lambda)$$

$w(\vec{\mathbf{y}} \mid \lambda) = L(\lambda)$ – *условная плотность вероятности отсчётов* $\vec{\mathbf{y}}$ *при условии, что параметр равен* λ (*функция правдоподобия*)

$w(\lambda) = w_{pr}(\lambda)$ – *априорная плотность вероятности параметра* λ

$w(\lambda \mid \vec{\mathbf{y}}) = w_{ps}(\lambda)$ – *апостериорная плотность вероятности параметра* λ *при условии, что приняты отсчёты* $\vec{\mathbf{y}}$

$w(\vec{\mathbf{y}})$ – *плотность вероятности отсчётов* $\vec{\mathbf{y}}$

Формула Байеса. Функция правдоподобия

$$w_{ps}(\lambda) = \frac{1}{w(\vec{\mathbf{y}})} L(\lambda) w_{pr}(\lambda) = c_1 L(\lambda) w_{pr}(\lambda)$$

Функция правдоподобия $L(\lambda) = w(\vec{\mathbf{y}} \mid \lambda) = w(y_1, y_2, \ldots, y_N \mid \lambda)$ – *условная плотность вероятности отсчётов принятой смеси сигнала и шума, рассматриваемая как функция параметра* λ

Функция правдоподобия параметра сигнала, принимаемого на фоне нормального белого шума

1-й шаг: находим функцию правдоподобия в случае шума с ограниченным спектром

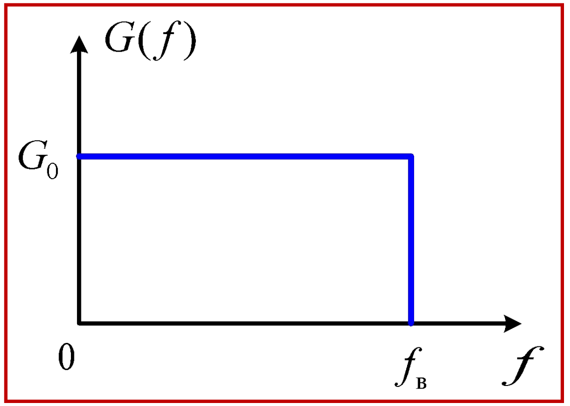
Условия:

а) спектр шума ограничен частотой $f_в$,

дисперсия шума $\sigma^2 = G_0 f_в$

б) отсчёты $\vec{\mathbf{y}} = \left(y_1, y_2, \dots, y_N\right)$ берутся с частотой

$f_д = 2 f_в$ (по теореме Котельникова)

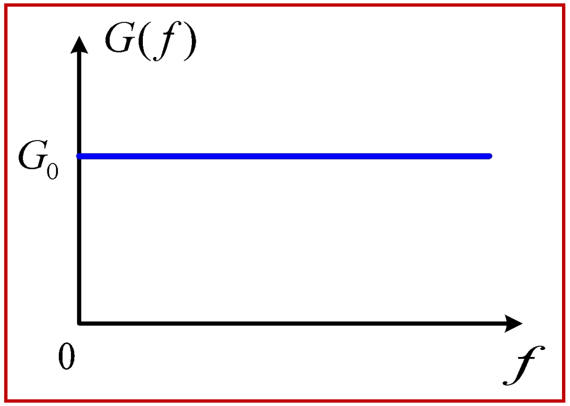


$$\text{Получаем } L(\lambda) = w(y_1, y_2, \dots, y_N \mid \lambda)$$

2-й шаг: увеличивая $f_в$, переходим к пределу:

$f_в \to \infty \Rightarrow G(f)$ — белый шум, дисперсия шума $\sigma^2 \to \infty$

$f_д \to \infty, N \to \infty \Rightarrow \vec{y} \to y(t)$ — непрерывное колебание



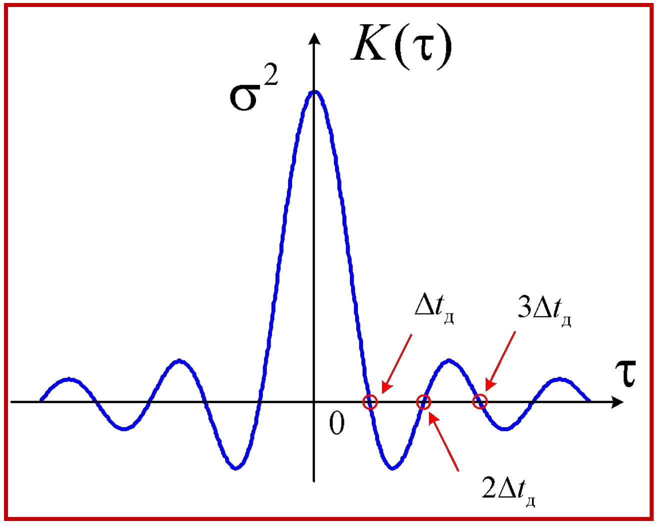
$$\text{Получаем } L(\lambda) = w(y(t) \mid \lambda)$$

Функция правдоподобия при конечной частоте $f_{\text{в}}$

АКФ шума с граничной частотой $f_{\text{в}}$

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} G(f)\cos 2\pi f\tau\, df = G_0 \int_0^{f_{\text{в}}} \cos 2\pi f\tau\, df =$$

$$= G_0 f_{\text{в}} \frac{\sin 2\pi f_{\text{в}}\tau}{2\pi f_{\text{в}}\tau} = \sigma^2 \frac{\sin 2\pi f_{\text{в}}\tau}{2\pi f_{\text{в}}\tau}$$



Отсчёты шума, взятые с интервалом дискретизации $\Delta t_{\text{д}} = 1/f_{\text{д}} = \frac{1}{2f_{\text{в}}}$, *− некоррелированы и статистически независимы (т.к. имеют нормальное распределение) . Следовательно,*

$$L(\lambda) = w(y_1, y_2, \dots, y_N \mid \lambda) = w(y_1 \mid \lambda)\cdot w(y_2 \mid \lambda)\cdot \ldots \cdot w(y_N \mid \lambda) = \prod_{i=1}^{N} w(y_i \mid \lambda)$$

Функция правдоподобия при конечной частоте $f_{\text{в}}$

Нормальное распределение вероятностей

$$w(y_i \mid \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i - s_{\lambda i})^2}{2\sigma^2}}, \text{ где } s_{\lambda i} = s_\lambda\left((i-1)\Delta t_{\text{д}}\right) - \text{ отсчёт сигнала}$$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{N} w(y_i \mid \lambda) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i - s_{\lambda i})^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - s_{\lambda i})^2\right)$$

Дисперсия шума $\sigma^2 = G_0 f_{\text{в}}$, следовательно

$$L(\lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_{\text{в}}}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{2G_0 f_{\text{в}}}\sum_{i=1}^{N}(y_i - s_{\lambda i})^2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_{\text{в}}}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{G_0}\sum_{i=1}^{N}(y_i - s_{\lambda i})^2 \Delta t_{\text{д}}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2f_{\text{В}}} = \Delta t_{\text{Д}}}$$

Функция правдоподобия при $f_{\text{в}} \to \infty$

$$L(\lambda) = \lim_{f_{\text{в}}\to\infty} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_{\text{в}}}} \right)^N \exp\left(-\frac{1}{G_0} \sum_{i=1}^{N} (y_i - s_{\lambda.i})^2 \Delta t_{\text{д}} \right) \right\} = \lim_{\substack{f_{\text{в}}\to\infty \\ N\to\infty}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_{\text{в}}}} \right)^N \cdot \lim_{\Delta t_{\text{д}}\to 0} \exp\left(-\frac{1}{G_0} \sum_{i=1}^{N} (y_i - s_{\lambda.i})^2 \Delta t_{\text{д}} \right) =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{неопре-} \\ \text{делённость}}}{0^{\infty}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{G_0} \int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2 \, dt \right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{от } \lambda \text{ не} \\ \text{зависит}}}{c_2} \exp\left(-\frac{1}{G_0} \int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2 \, dt \right) = c_2 \exp(k(\lambda))$$

Аргумент экспоненты : $k(\lambda) = -\frac{1}{G_0} \int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2 \, dt = -\frac{1}{G_0} \int_0^T \left[y^2(t) - 2y(t)s_\lambda(t) + s_\lambda(t)^2 \right] dt =$

$$= \underbrace{-\frac{1}{G_0} \int_0^T y^2(t)dt}_{\text{от } \lambda \text{ не зависит}} + \underbrace{\frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s_\lambda(t)dt}_{\text{корреляционный интеграл}} - \frac{1}{G_0} \underbrace{\int_0^T s_\lambda(t)^2 \, dt}_{\text{энергия сигнала}} = c_3 + q(\lambda) - \frac{E_{\text{c}}(\lambda)}{G_0}$$

$$\boxed{L(\lambda) = c_2 e^{c_3} \cdot e^{q(\lambda)} \cdot e^{-\frac{E_{\text{c}}(\lambda)}{G_0}}}$$

Апостериорная плотность вероятности параметра и её логарифм

$$w_{ps}(\lambda)=c_1\cdot L(\lambda)\cdot w_{pr}(\lambda)=c_1c_2e^{c_3}\cdot e^{q(\lambda)}\cdot e^{-\frac{E_{\text{c}}(\lambda)}{G_0}}\cdot w_{pr}(\lambda)=C\,e^{q(\lambda)}e^{-\frac{E_{\text{c}}(\lambda)}{G_0}}\,w_{pr}(\lambda)$$

Логарифм апостериорной плотности вероятности параметра:

$$\boxed{\ln w_{ps}(\lambda)=\ln\left(Ce^{q(\lambda)}e^{-\frac{E_{\text{c}}(\lambda)}{G_0}}\,w_{pr}(\lambda)\right)=\ln C+q(\lambda)-\frac{E_{\text{c}}(\lambda)}{G_0}+\ln w_{pr}(\lambda)}$$

$q(\lambda)=\frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)\,s_\lambda(t)\,dt$ – корреляционный интеграл

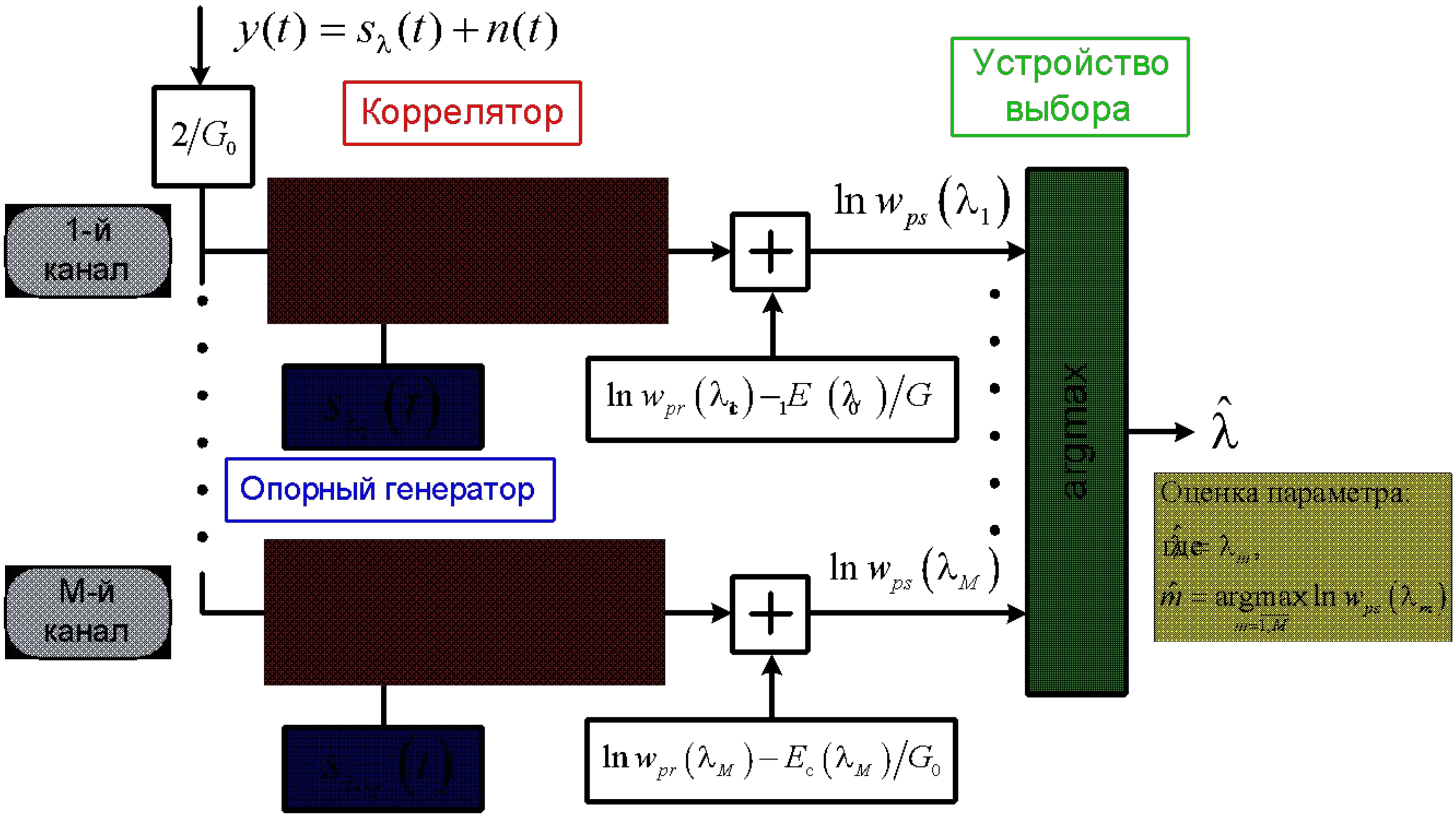
$E_{\text{c}}(\lambda)=\int_0^T s_\lambda^2(t)\,dt$ – энергия сигнала

Оценка параметра по критерию максимума апостериорной вероятности:

$$\boxed{\hat{\lambda}=\operatorname{argmax}\,w_{ps}(\lambda)=\operatorname{argmax}\,\ln w_{ps}(\lambda)}$$

Оценка параметра полностью известного сигнала

(корреляционный приёмник)

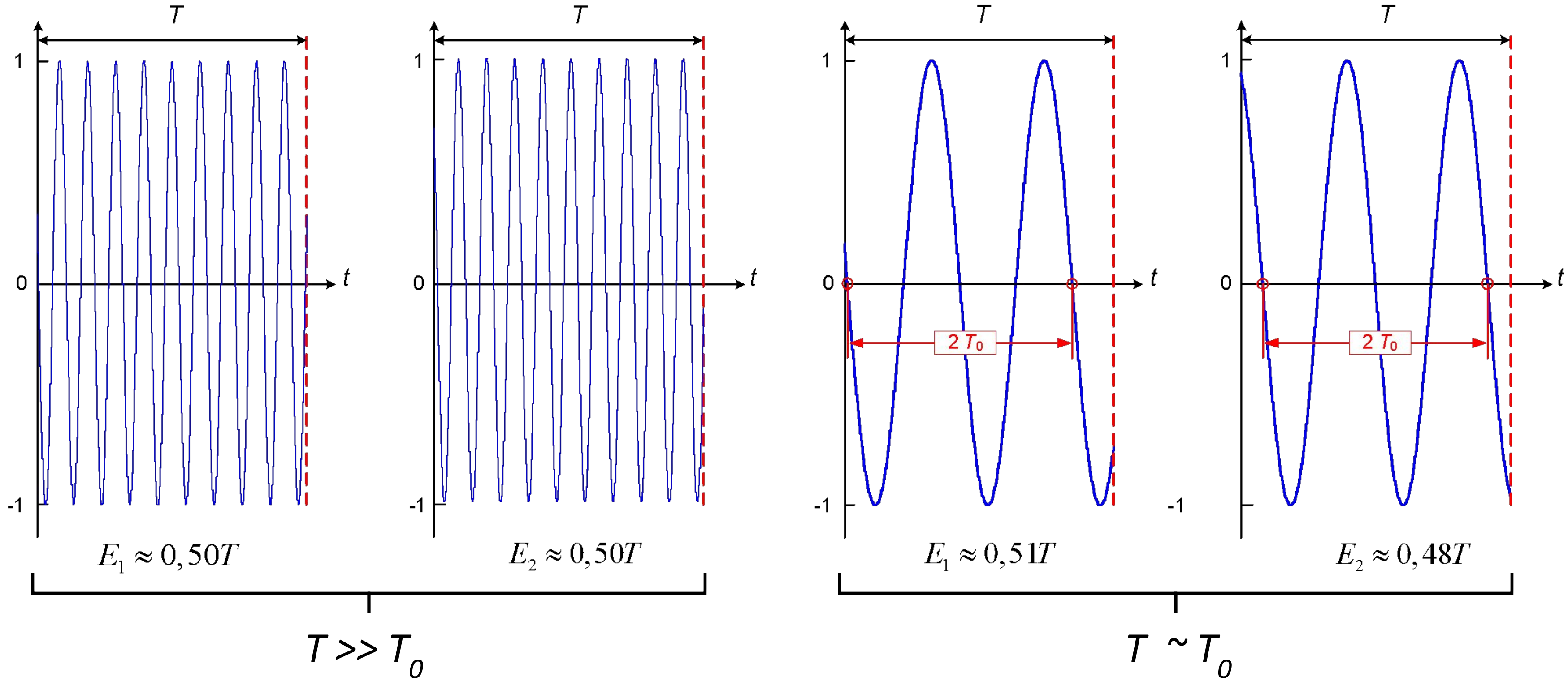


Оценка неэнергетического параметра

Неэнергетические параметры:

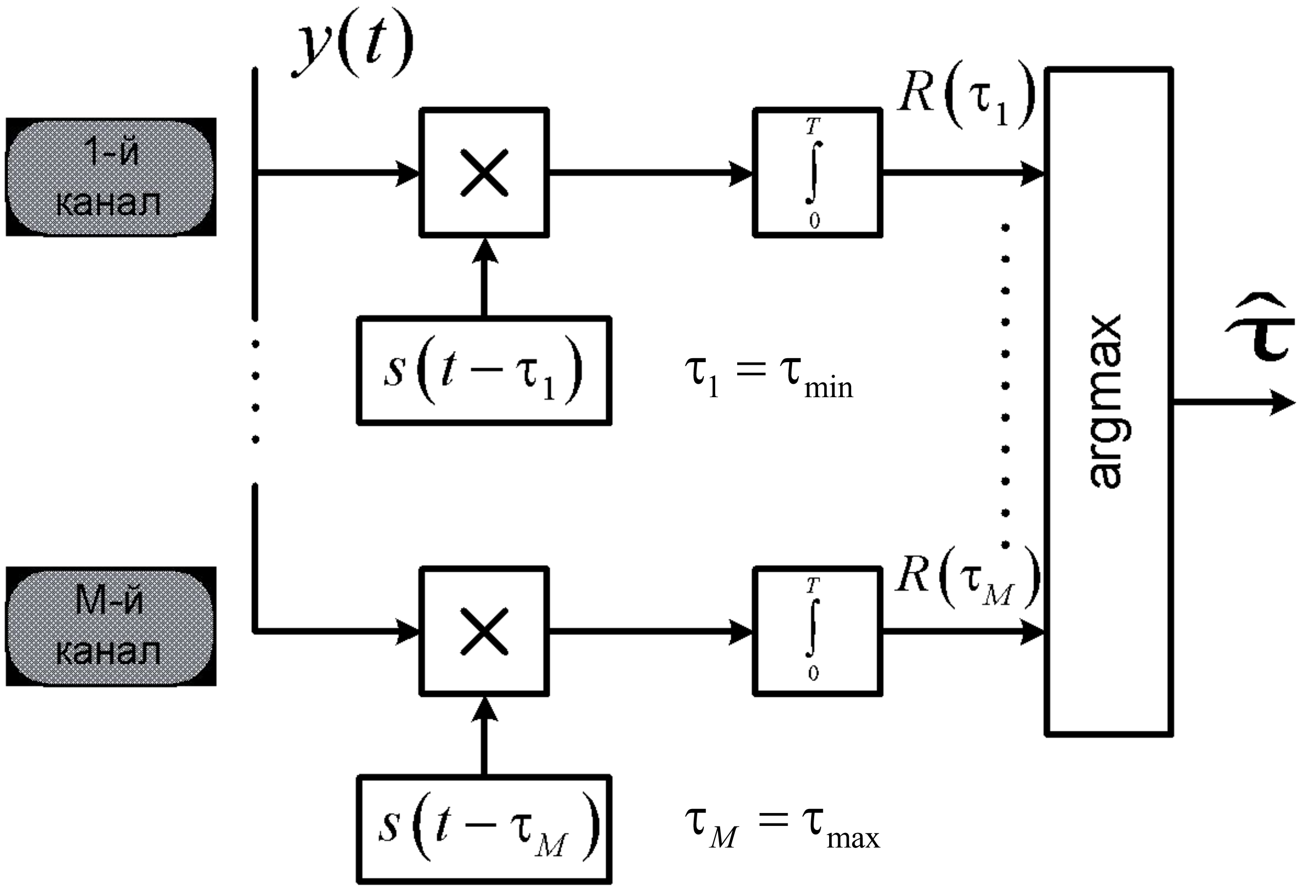
- *задержка*
- *фаза*
- *частота*

при $T >> T_0$

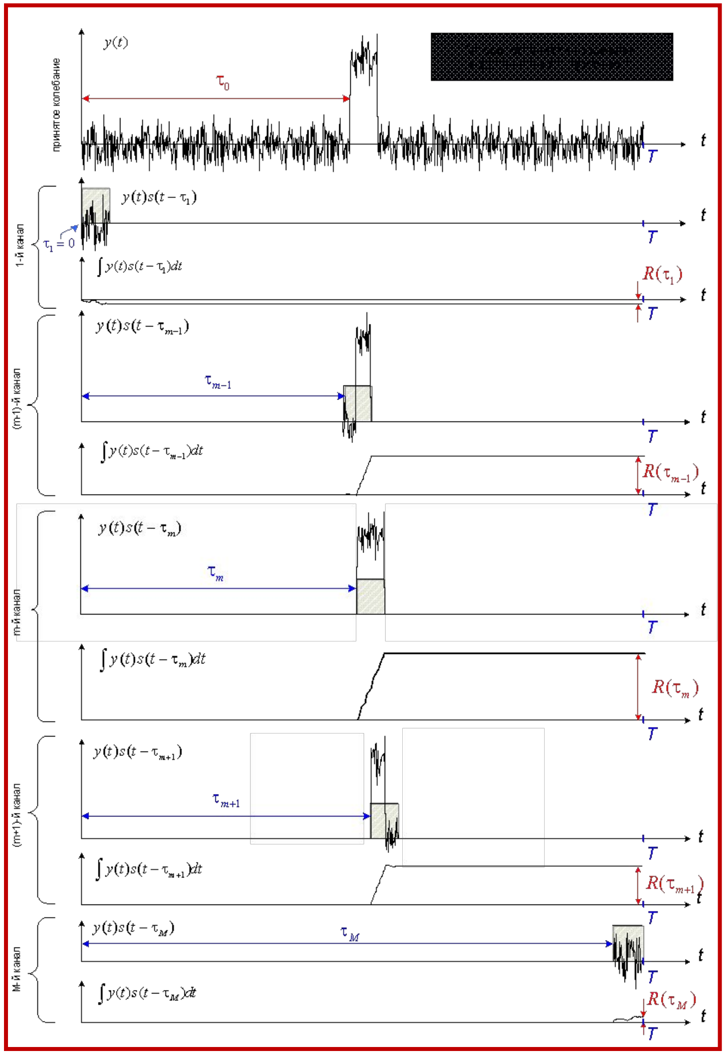


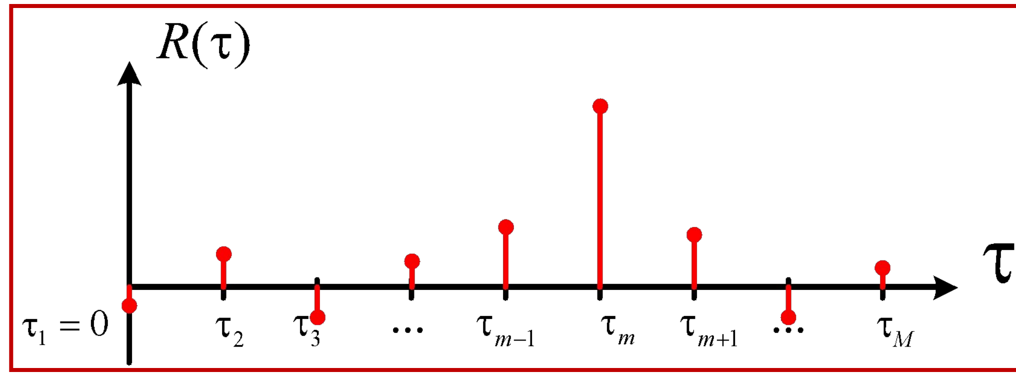
Корреляционный приёмник
для оценки задержки известного сигнала

Априорное распределение задержки – равномерное на интервале $[\tau_{min}, \tau_{max}]$



Эпюры напряжений в корреляционном приёмнике прямоугольного видеоимпульса

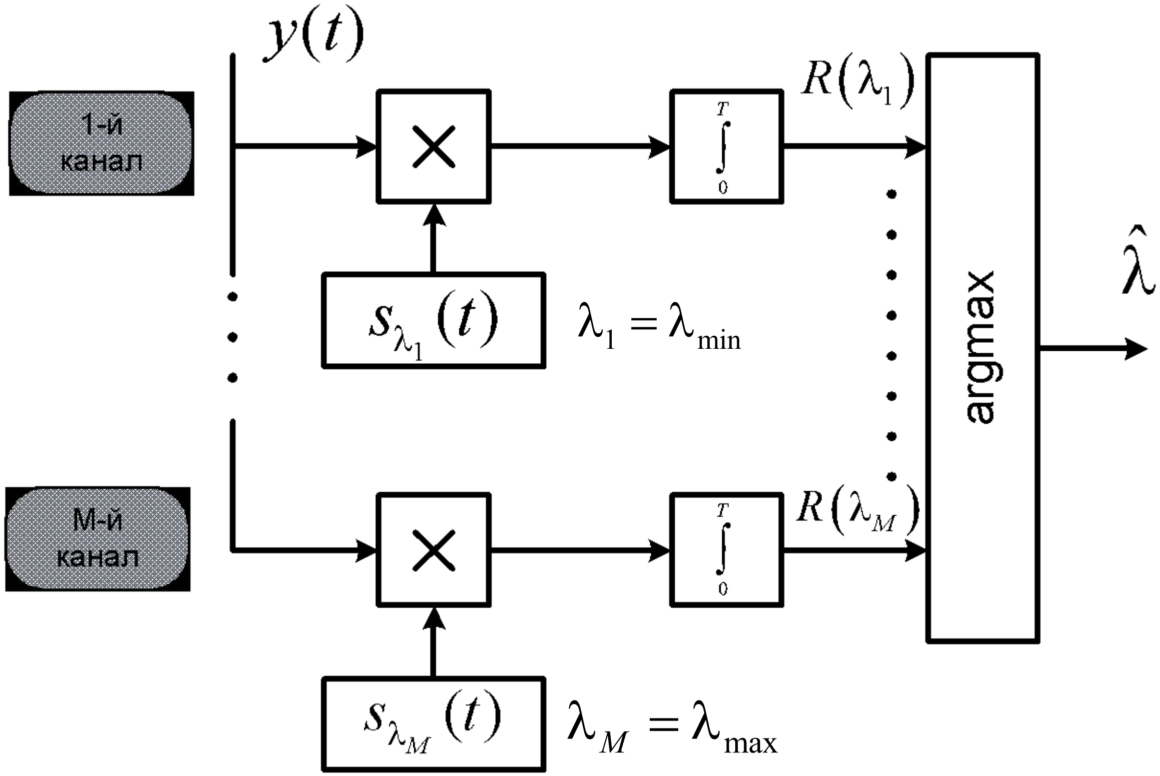




$$\hat{m} = \underset{m=\overline{1,M}}{\operatorname{argmax}}\, R(\tau_m)$$

$$\hat{\tau} = \tau_{\hat{m}}$$

Корреляционный приёмник для оценки неэнергетического параметра



$$\hat{m} = \underset{m=\overline{1,M}}{\operatorname{argmax}}\, R(\lambda_m)$$

$$\hat{\lambda} = \lambda_{\hat{m}}$$

Априорное распределение параметра – равномерное на интервале $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$