3. Основы оптимального приёма сигналов

3.1. Оптимальная оценка параметра сигнала

3.2. Оптимальное обнаружение сигнала

3.3. Оптимальное различение известных сигналов

3.4. Оптимальная обработка сигналов с использованием согласованных фильтров

Основные понятия

Оптимальный приёмник *– устройство обработки, обеспечивающее наилучшее выделение полезной информации из сигнала, принимаемого в смеси с аддитивной шумовой помехой*

Шумовая помеха *– нормальный белый шум*

Синтез оптимального приёмника *– нахождение структуры и параметров устройства обработки, обеспечивающее наилучшее выделение полезной информации из определённого типа сигнала*

Критерий оптимальности приёмника *– правило, которое определяет, какой способ выделения полезной информации считается наилучшим*

Примеры:

- критерий минимума СКО
- критерий максимума отношения сигнал-шум
- критерий максимума апостериорной вероятности

Задачи, решаемые в теории оптимального приёма сигналов

Будут рассмотрены

1. *Оценка параметров сигнала, принимаемого в смеси с помехами*
2. *Обнаружение сигнала на фоне помех*
3. *Различение двух или нескольких сигналов на фоне помех*
4. *Фильтрация (выделение) сигнала из смеси с помехами*

(Задачи 2 и 3 – частный случай задачи 1)

3.1. Оптимальная оценка параметра сигнала

Априорная и апостериорная вероятности

a priori – *«из предыдущего» (до «опыта»)*

a posteriori – *«из последующего» (после «опыта»)*

Принимаемая смесь сигнала и шума: $y(t) = s_\lambda(t) + n(t)$

До начала обработки известно (априорная информация):

- *вид сигнала*
- *распределение вероятностей шума*
- *априорное распределение вероятностей параметра λ*

Обрабатываются:

N отсчётов (вектор) принятого колебания: $\vec{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \ldots, y_N) = \vec{\mathbf{s}}_\lambda + \vec{\mathbf{n}}$

или

непрерывное колебание: $y(t) = s_\lambda(t) + n(t)$

Формула полной вероятности

Совместная плотность вероятности отсчётов $\vec{\mathbf{y}} = \left(y_1, y_2, \ldots, y_N\right)$ *и параметра* λ

$$w(\lambda, \vec{\mathbf{y}}) \begin{cases} = w(\lambda \mid \vec{\mathbf{y}}) \cdot w(\vec{\mathbf{y}}) \\ = w(\vec{\mathbf{y}} \mid \lambda) \cdot w(\lambda) \end{cases} \Rightarrow w(\lambda \mid \vec{\mathbf{y}}) \cdot w(\vec{\mathbf{y}}) = w(\vec{\mathbf{y}} \mid \lambda) \cdot w(\lambda)$$

$w(\vec{\mathbf{y}} \mid \lambda) = L(\lambda)$ – *условная плотность вероятности отсчётов* $\vec{\mathbf{y}}$ *при условии, что параметр равен* λ (*функция правдоподобия*)

$w(\lambda) = w_{pr}(\lambda)$ – *априорная плотность вероятности параметра* λ

$w(\lambda \mid \vec{\mathbf{y}}) = w_{ps}(\lambda)$ – *апостериорная плотность вероятности параметра* λ *при условии, что приняты отсчёты* $\vec{\mathbf{y}}$

$w(\vec{\mathbf{y}})$ – *плотность вероятности отсчётов* $\vec{\mathbf{y}}$

Формула Байеса. Функция правдоподобия

$$w_{ps}(\lambda) = \frac{1}{w(\vec{\mathbf{y}})} L(\lambda) w_{pr}(\lambda) = c_1 L(\lambda) w_{pr}(\lambda)$$

Функция правдоподобия $L(\lambda) = w(\vec{\mathbf{y}} \mid \lambda) = w(y_1, y_2, \ldots, y_N \mid \lambda)$ – *условная плотность вероятности отсчётов принятой смеси сигнала и шума, рассматриваемая как функция параметра* λ

Функция правдоподобия параметра сигнала, принимаемого на фоне нормального белого шума

1-й шаг: находим функцию правдоподобия в случае шума с ограниченным спектром

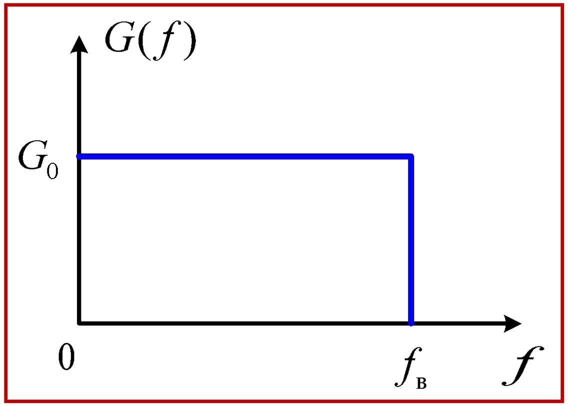
Условия:

а) спектр шума ограничен частотой $f_в$,

дисперсия шума $\sigma^2 = G_0 f_в$

б) отсчёты $\vec{\mathbf{y}} = \left(y_1, y_2, \ldots, y_N\right)$ берутся с частотой

$f_д = 2f_в$ (по теореме Котельникова)

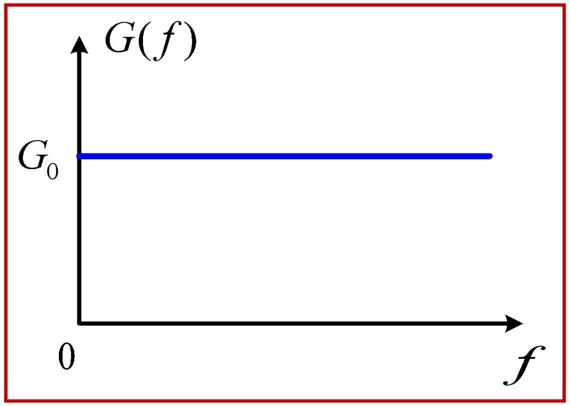


Получаем $L(\lambda) = w(y_1, y_2, \ldots, y_N \mid \lambda)$

2-й шаг: увеличивая $f_в$, переходим к пределу:

$f_в \to \infty \;\Rightarrow\; G(f)$ – белый шум, дисперсия шума $\sigma^2 \to \infty$

$f_д \to \infty,\; N \to \infty \;\Rightarrow\; \vec{\mathbf{y}} \to y(t)$ – непрерывное колебание



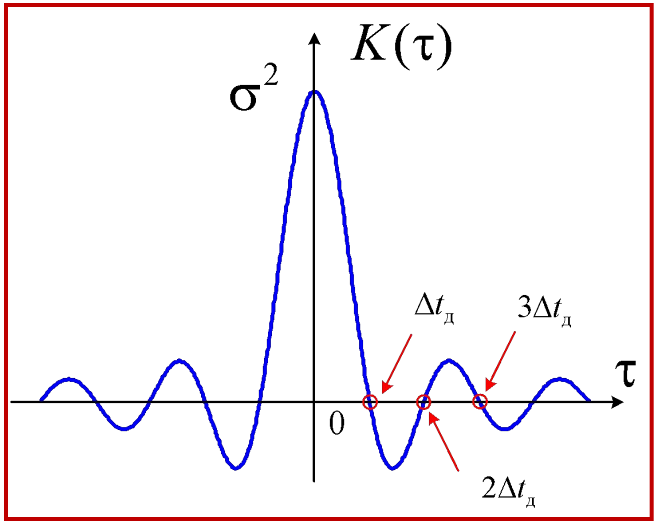
Получаем $L(\lambda) = w(y(t) \mid \lambda)$

Функция правдоподобия при конечной частоте $f_в$

АКФ шума с граничной частотой $f_в$

$$K(\tau) = \int_0^\infty G(f)\cos 2\pi f\tau\, df = G_0 \int_0^{f_в} \cos 2\pi f\tau\, df =$$

$$= G_0 f_в \frac{\sin 2\pi f_в \tau}{2\pi f_в \tau} = \sigma^2 \frac{\sin 2\pi f_в \tau}{2\pi f_в \tau}$$



Отсчёты шума, взятые с интервалом дискретизации $\Delta t_д = 1/f_д = \frac{1}{2f_в}$, *− некоррелированы и статистически независимы (т.к. имеют нормальное распределение) . Следовательно,*

$$\boxed{L(\lambda) = w(y_1, y_2, \dots, y_N \mid \lambda) = w(y_1 \mid \lambda)\cdot w(y_2 \mid \lambda)\cdot \ldots \cdot w(y_N \mid \lambda) = \prod_{i=1}^{N} w(y_i \mid \lambda)}$$

Функция правдоподобия при конечной частоте $f_\text{в}$

Нормальное распределение вероятностей

$$w(y_i \mid \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i - s_{\lambda i})^2}{2\sigma^2}}, \text{ где } s_{\lambda i} = s_\lambda\left((i-1)\Delta t_\text{д}\right) - \text{ отсчёт сигнала}$$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{N} w(y_i \mid \lambda) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i - s_{\lambda i})^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - s_{\lambda i})^2\right)$$

Дисперсия шума $\sigma^2 = G_0 f_\text{в}$, следовательно

$$L(\lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_\text{в}}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{2G_0 f_\text{в}}\sum_{i=1}^{N}(y_i - s_{\lambda i})^2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_\text{в}}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{G_0}\sum_{i=1}^{N}(y_i - s_{\lambda i})^2 \Delta t_\text{д}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2f_\text{В}} = \Delta t_\text{Д}}$$

Функция правдоподобия при $f_\text{в} \to \infty$

$$L(\lambda) = \lim_{f_\text{в}\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_\text{в}}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{G_0}\sum_{i=1}^{N}(y_i - s_{\lambda,i})^2\,\Delta t_\text{д}\right)\right\} = \lim_{\substack{f_\text{в}\to\infty\\ N\to\infty}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_\text{в}}}\right)^N \cdot \lim_{\Delta t_\text{д}\to 0}\exp\left(-\frac{1}{G_0}\sum_{i=1}^{N}(y_i - s_{\lambda,i})^2\,\Delta t_\text{д}\right) =$$

$$= \underset{\substack{\text{неопре-}\\\text{делённость}}}{\underset{\uparrow}{0^\infty}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{G_0}\int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2\,dt\right) = \underset{\substack{\text{от } \lambda \text{ не}\\\text{зависит}}}{\underset{\uparrow}{c_2}} \exp\left(-\frac{1}{G_0}\int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2\,dt\right) = c_2 \exp(k(\lambda))$$

Аргумент экспоненты: $k(\lambda) = -\frac{1}{G_0}\int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2\,dt = -\frac{1}{G_0}\int_0^T \left[y^2(t) - 2y(t)s_\lambda(t) + s_\lambda(t)^2\right]dt =$

$$= \underbrace{-\frac{1}{G_0}\int_0^T y^2(t)dt}_{\text{от } \lambda \text{ не зависит}} + \underbrace{\frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)s_\lambda(t)dt}_{\substack{\text{корреляционный}\\\text{интеграл}}} - \frac{1}{G_0}\underbrace{\int_0^T s_\lambda(t)^2\,dt}_{\substack{\text{энергия}\\\text{сигнала}}} = c_3 + q(\lambda) - \frac{E_\text{c}(\lambda)}{G_0}$$

$$\boxed{L(\lambda) = c_2 e^{c_3} \cdot e^{q(\lambda)} \cdot e^{-\frac{E_\text{c}(\lambda)}{G_0}}}$$

Апостериорная плотность вероятности параметра и её логарифм

$$w_{ps}(\lambda) = c_1 \cdot L(\lambda) \cdot w_{pr}(\lambda) = c_1 c_2 e^{c_3} \cdot e^{q(\lambda)} \cdot e^{-\frac{E_{\text{c}}(\lambda)}{G_0}} \cdot w_{pr}(\lambda) = C\, e^{q(\lambda)} e^{-\frac{E_{\text{c}}(\lambda)}{G_0}}\, w_{pr}(\lambda)$$

Логарифм апостериорной плотности вероятности параметра:

$$\boxed{\ln w_{ps}(\lambda) = \ln\left(C e^{q(\lambda)} e^{-\frac{E_{\text{c}}(\lambda)}{G_0}}\, w_{pr}(\lambda) \right) = \ln C + q(\lambda) - \frac{E_{\text{c}}(\lambda)}{G_0} + \ln w_{pr}(\lambda)}$$

$q(\lambda) = \dfrac{2}{G_0}\displaystyle\int_0^T y(t) s_\lambda(t)\, dt$ – корреляционный интеграл

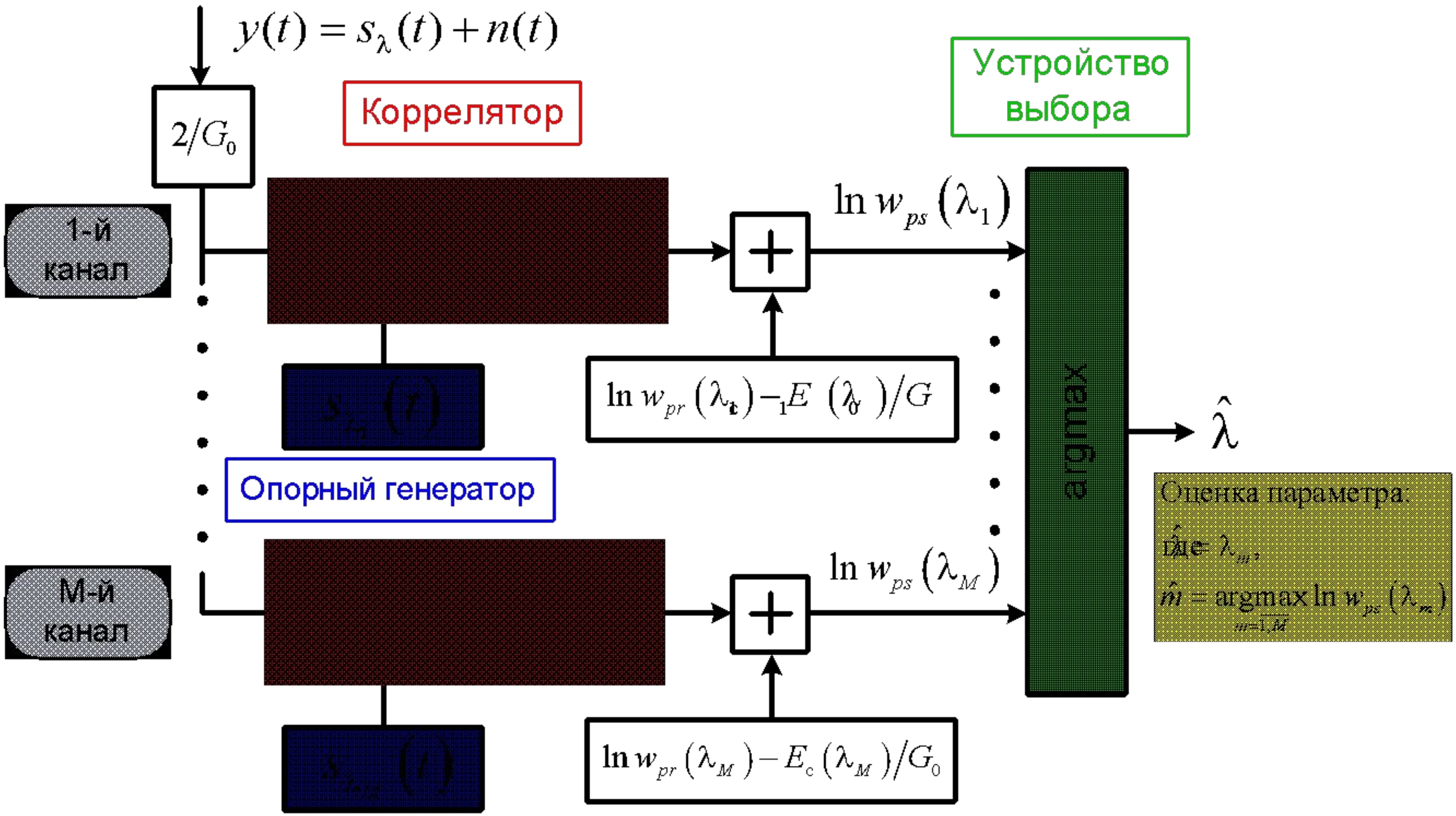
$E_{\text{c}}(\lambda) = \displaystyle\int_0^T s_\lambda^2(t)\, dt$ – энергия сигнала

Оценка параметра по критерию максимума апостериорной вероятности:

$$\boxed{\hat{\lambda} = \operatorname{argmax}\, w_{ps}(\lambda) = \operatorname{argmax}\, \ln w_{ps}(\lambda)}$$

Оценка параметра полностью известного сигнала

(корреляционный приёмник)



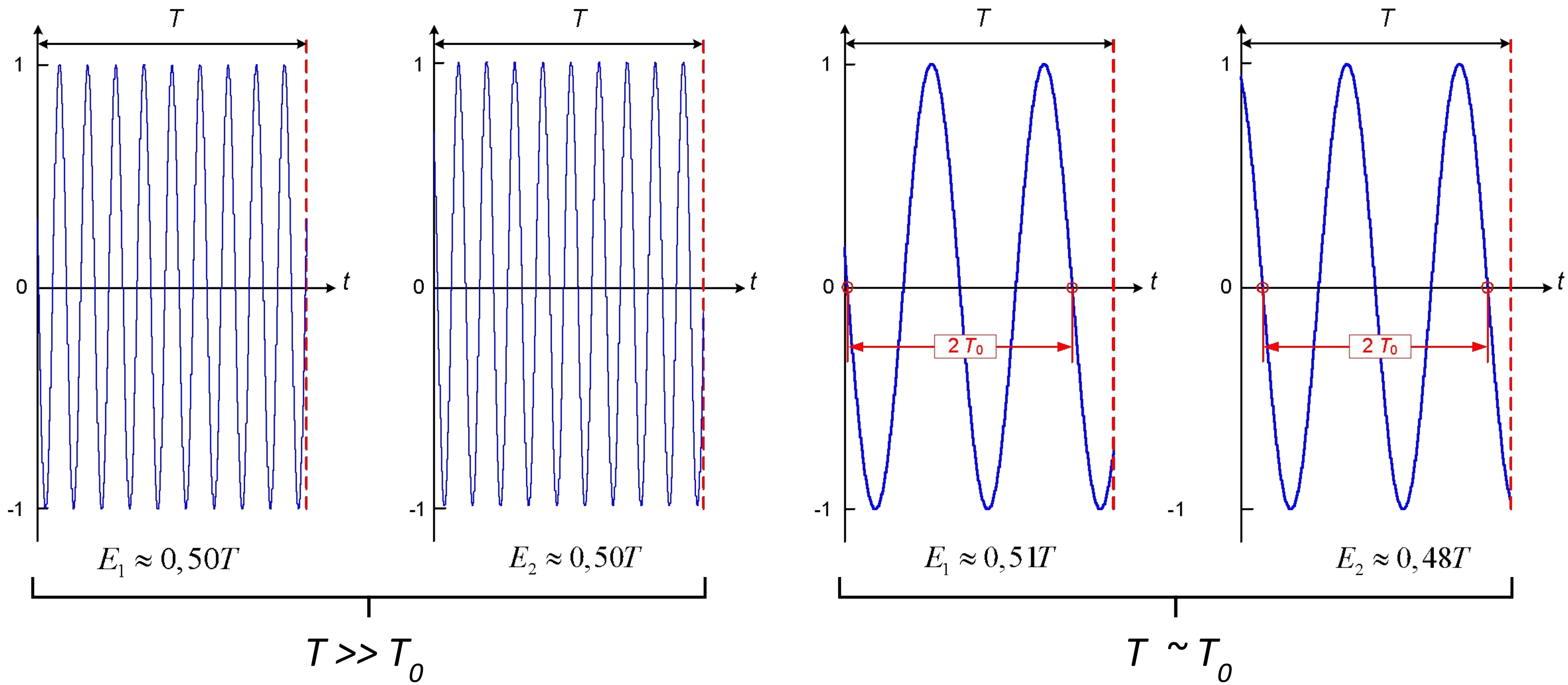
Оценка неэнергетического параметра

Неэнергетические параметры:

- *задержка*
- *фаза*

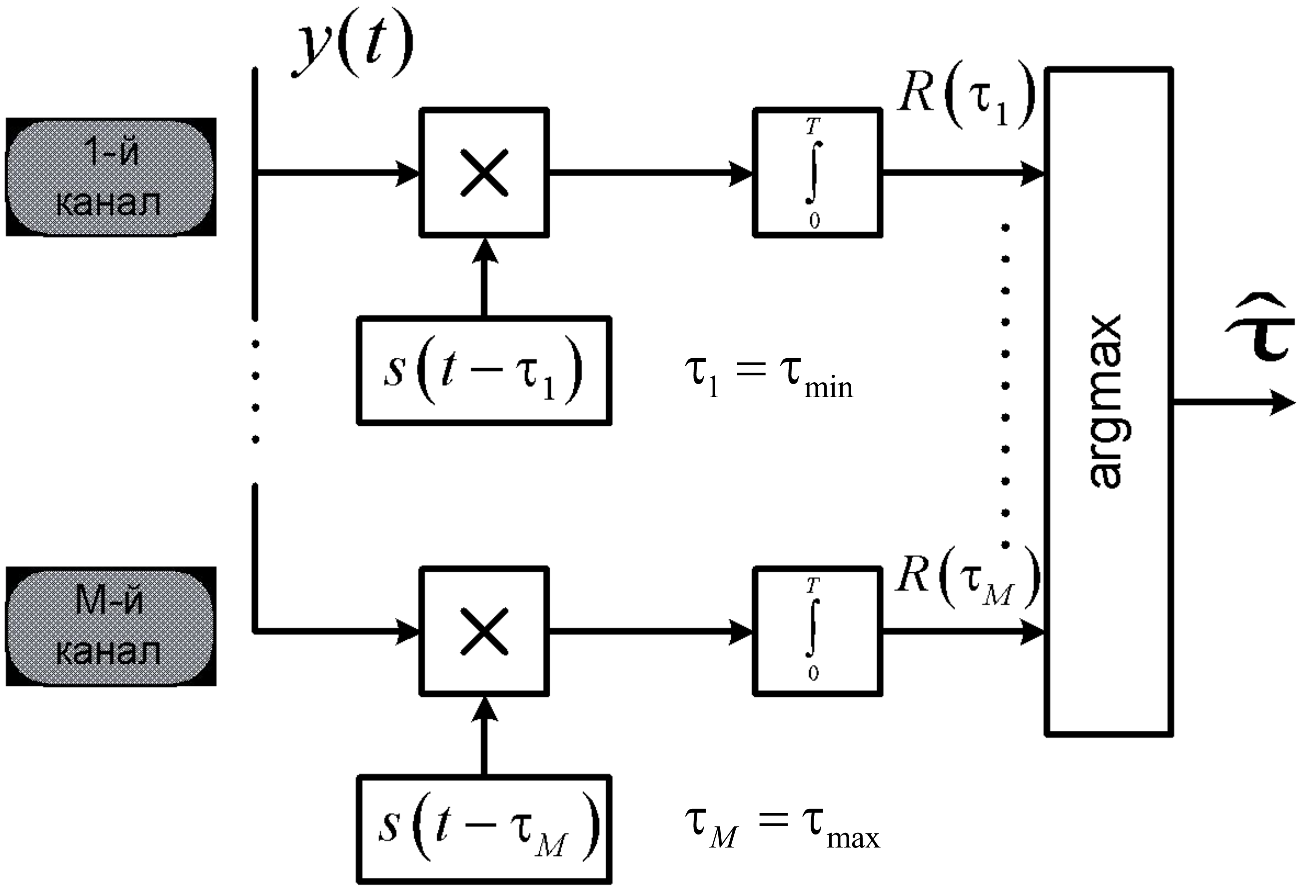
при $T >> T_0$

- *частота*

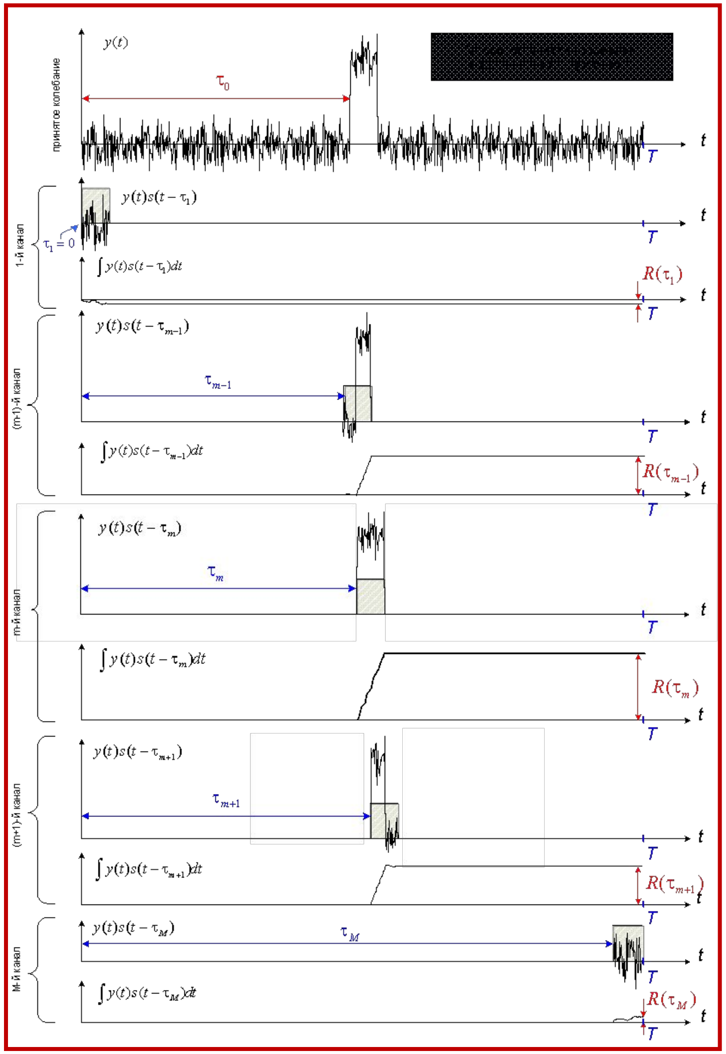


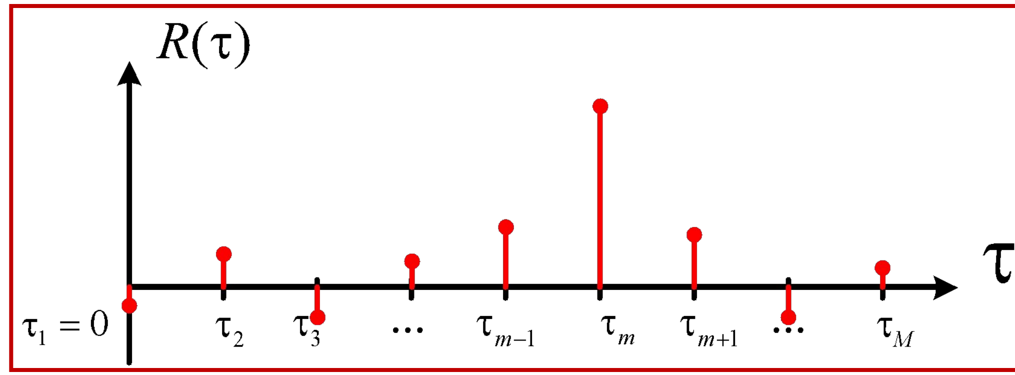
Корреляционный приёмник
для оценки задержки известного сигнала

Априорное распределение задержки – равномерное на интервале $[\tau_{min}, \tau_{max}]$



Эпюры напряжений в корреляционном приёмнике прямоугольного видеоимпульса

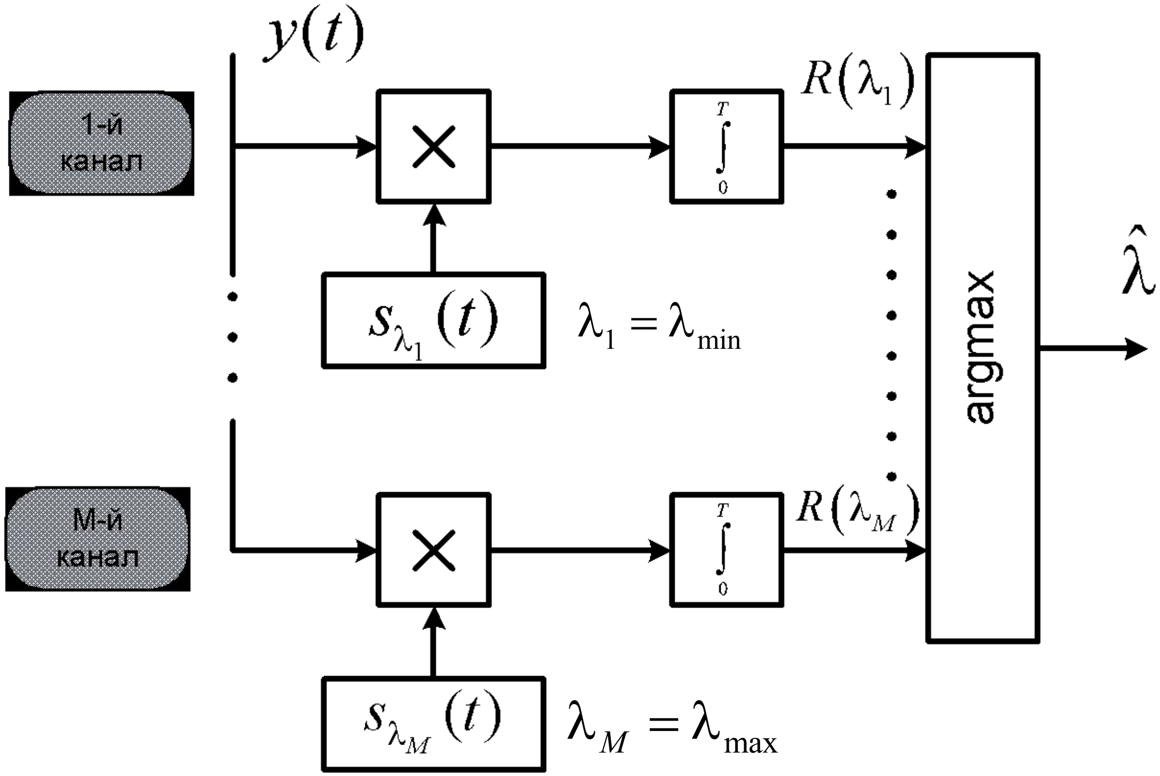




$$\hat{m} = \underset{m=\overline{1,M}}{\operatorname{argmax}}\, R(\tau_m)$$

$$\hat{\tau} = \tau_{\hat{m}}$$

Корреляционный приёмник для оценки неэнергетического параметра



Априорное распределение параметра – равномерное на интервале $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$

$$\hat{m} = \underset{m=\overline{1,M}}{\operatorname{argmax}} R(\lambda_m)$$

$$\hat{\lambda} = \lambda_{\hat{m}}$$