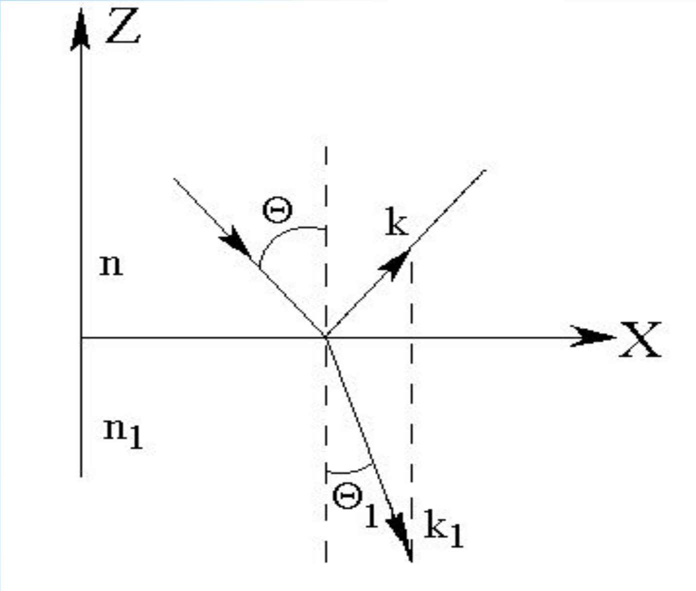
Отражение плоской волны от границы раздела сред



Пусть на плоскую границу раздела из полупространства ($z>0$) падает плоская монохроматическая волна с волновым числом k.

За границей раздела ($z=0$) распространяется прошедшая через границу волна с волновым числом k_1.

Решение двумерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$$

для полупространства $z>0$ представляется в виде суммы падающей и отраженной волны

$$\varphi_2=\varphi_0\left[\exp(-ikz\cos\theta)+V\exp(ikz\cos\theta)\right]\exp(ikx\sin\theta)\ , \qquad (2.46.1)$$

где V,θ - коэффициент отражения волны и угол падения.

Преломленная волна в нижней среде $z<0$ запишется в виде

$$\varphi_1 = \varphi_0 W \exp\left[ik_1(x\sin\theta_1 - z\cos\theta_1)\right], \qquad (2.46.2)$$

где θ_1, W - угол преломления и коэффициент прохождения (коэффициент прозрачности границы). Волновое поле однородно вдоль оси x, поэтому на границе выполняется условие постоянства горизонтальной составляющей волнового вектора

$$k\sin\theta = k_1\sin\theta_1 . \qquad (2.46.3)$$

Это выражение носит название закона преломления Снелля (Снеллиуса).

В силу этого падающая и прошедшая волна имеют одинаковые зависимости от координаты k: $\exp[ik_x x]$.

Следовательно, задача о наклонном падении волны на границу может рассматриваться как задача о нормальном (вертикальном) отражении и прохождении волны с волновым числом $k_z = k\cos\theta$.

Из условия непрерывности волнового поля на границе

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Big|_{z=0} \qquad (2.46.4)$$

получим связь между коэффициентами прохождения и отражения:

$$1 + V = W, \qquad (2.46.5)$$

а при условии непрерывности производной $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\Big|_{z=0}$

можно получить их выражения в зависимости от нормальной составляющей волнового числа:

$$V = \frac{k_z - k_{1z}}{k_z + k_{1z}} \;; W = \frac{2k_z}{k_z + k_{1z}}. \qquad (2.46.6)$$

Вместо (2.46.6) на практике часто используются зависимости коэффициентов отражения и прохождения от характеристических импедансов сред:

$$V = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \;; W = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad (2.46.7)$$

Для ЭМ волн $Z = \sqrt{\mu / \varepsilon}$, а для акустических - $Z = \rho c$.

Поле в волноводах и резонаторах

Пусть волна распространяется в плоскости x,z между двумя идеально отражающими границами ($z=0$, $z=a$). Решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (2.47.1)$$

должно удовлетворять граничным условиям

$$\varphi(x,0,t)=0\ ;\ \varphi(x,a,t)=0 \qquad (2.47.2)$$

Ищем решение в виде $\varphi=\varphi(z)e^{i(\omega t-kx)}$. Для удовлетворения (2.47.2) получим $\varphi(z)=\varphi_0\sin k_z z$; $k_z a=\pi n$, где $n=1,2,3....$. То есть поле в волноводе имеет поперечную структуру в виде стоячей волны с волновым числом k_z , когда между стенками волновода "укладывается" целое число полуволн. Подставив решение в (2.47.1) получим характеристическое уравнение

$$-k^2-k_z^2+\omega^2/c^2=0 \qquad (2.47.3)$$

из которого следует

$$k=\sqrt{\omega^2/c^2-\pi^2 n^2/a^2} \qquad (2.47.4)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (2.47.1) \qquad k=\sqrt{\omega^2/c^2-\pi^2 n^2/a^2} \qquad (2.47.4)$$

Если электромагнитная волна распространяется в волноводе без затухания, то волновое число k - действительная величина, а подкоренное выражение в (2.47.4) не должно быть отрицательным. Отсюда вытекает условие $\omega \geq \frac{\pi c}{a}n$.

То есть в волноводе не может распространяться волна с частотой меньшей некоторой частоты ω_0 ($n=1$), которая называется граничной частотой волновода. Этой частоте соответствует максимальная длина волны $\lambda_0 = 2a$. С другой стороны, общее решение волнового уравнения (2.47.1) представляет собой сумму решений

$$\varphi=\sum_n \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n z}{a}\right)\exp\left[i\left(\omega t-k_n x\right)\right], \qquad (2.47.5)$$

где $k_n^2=\omega^2/c^2-\pi^2 n^2/a^2$.

Выражение (2.47.5) называется разложением волнового поля по нормальным волнам, а каждый член ряда часто называют модами волновода. Предположим теперь, что волновое поле однородно вдоль оси x, то есть волны в этом направлении не распространяются, в (2.47.1) $\partial^2\varphi/\partial^2 x=0$. Тогда рассмотренная задача определяет одномерный закрытый резонатор, а (2.47.4) при $k=0$ переходит в условие для собственных частот резонатора:

$$\omega_n=\frac{\pi c n}{a}. \qquad (2.47.6)$$