

# ПИД - регулятор

Предназначен для управления динамическим объектом. ПИД-регулятор использует пропорционально-интегрально-дифференциальный закон регулирования. ПИД-регулятор относится к наиболее распространенному типу регуляторов. Около 90...95 % регуляторов, находящихся в настоящее время в эксплуатации, используют ПИД-алгоритм. Причиной столь высокой популярности является простота построения и промышленного использования, ясность функционирования, пригодность для решения большинства практических задач и низкая стоимость.

Они бывают:

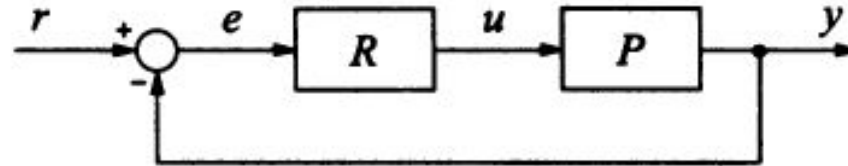
- На основе аналоговых элементов управления, которые реализуют непосредственно дифференциальное уравнение.
- На основе микропроцессорных систем, на основе которых используется закон управления, получаемый в результате дискретизации (разложения) функций разностных управлений.

ПИД-регулятор, воплощенный в виде микроконтроллера, называют ПИД-контроллером. ПИД-контроллер обычно имеет дополнительные сервисные свойства автоматической настройки, сигнализации, самодиагностики, программирования, безударного переключения режимов, дистанционного управления, возможность работы в промышленной сети и т.д.

После появления дешевых микропроцессоров и аналого-цифровых преобразователей в ПИД-регуляторах используется автоматическая настройка параметров, использующая:

- адаптивные алгоритмы,
- методы нечеткой логики,
- генетические алгоритмы

## Классический ПИД-регулятор в системе с обратной связью



$$u(t) = Ke(t) + \frac{1}{T_{\text{и}}} \int_0^t e(t) dt + T_{\text{д}} \frac{de(t)}{dt},$$

R - регулятор (Regulator),

P - объект регулирования (Process),

r - управляющее воздействие или уставка (reFERENCE),

e - сигнал рассогласования или ошибки (error),

u - выходная величина регулятора,

y - регулируемая величина,

t - время,

K - пропорциональный коэффициент,

T<sub>и</sub> - постоянная времени интегрирования,

T<sub>д</sub> - постоянная времени дифференцирования регулятора.

## Модификации выражения закона управления для ПИД-регулятора

$$u(t) = K_0 \left( e(t) + \frac{1}{T_{\text{и}}} \int_0^t e(t) dt + T_{\text{д}} \frac{de(t)}{dt} \right),$$

$$u(t) = ke(t) + k_{\text{и}} \int_0^t e(t) dt + k_{\text{д}} \frac{de(t)}{dt}.$$

Передаточная функция ПИД-регулятора имеет вид

$$R(s) = K + \frac{1}{T_{\text{и}}s} + T_{\text{д}}s = K \left( 1 + \frac{1}{KT_{\text{и}}s} + \frac{T_{\text{д}}}{K}s \right).$$

# Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики ПИД-регулятора

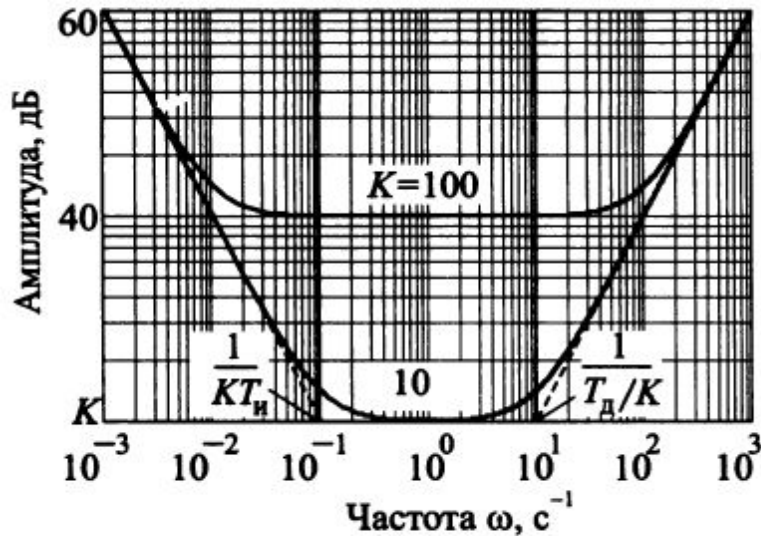


Рис. 5.34. АЧХ ПИД-регулятора

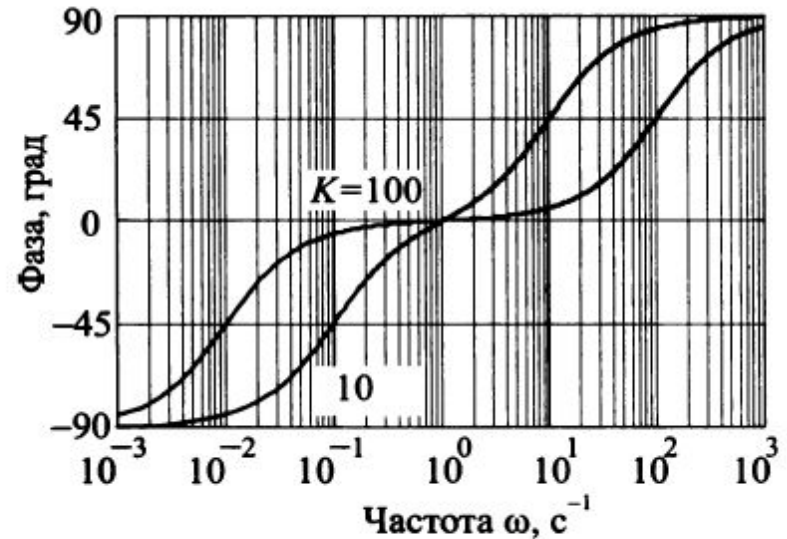


Рис. 5.35. ФЧХ ПИД-регулятора

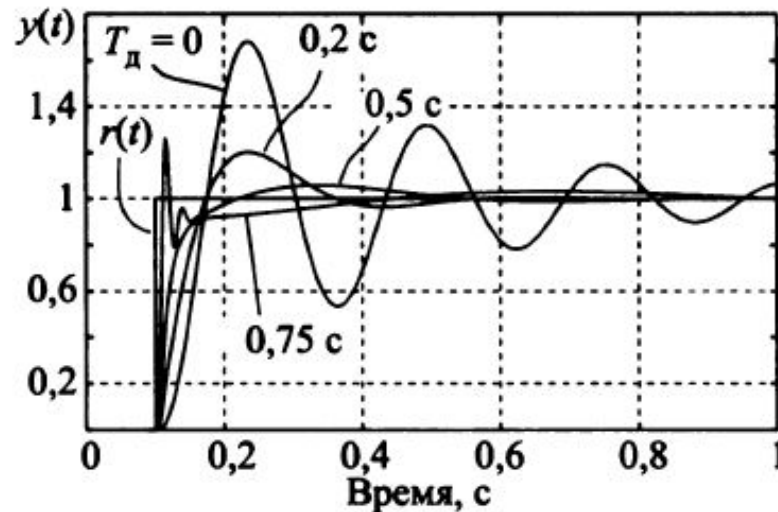
Передаточная функция замкнутой системы:

$$y(s) = \frac{P(s)R(s)}{1 + P(s)R(s)} r(s), \quad \text{или} \quad G_{cl}(s) = \frac{P(s)R(s)}{1 + P(s)R(s)},$$

# Переходные характеристики САУ с ПИД-регулятором

Переходная характеристика ПИД-регулятора (реакция на единичный скачок) представляет собой сумму постоянной составляющей  $K$ , прямой линии  $t/T_i$ , полученной при интегрировании единичного скачка, и дельта-функции Дирака  $T_d \delta(t)$ , полученной при дифференцировании единичного скачка.

ПИД-регулятор обеспечивает астатизм 1-го порядка замкнутой САУ – замкнутая система не будет иметь статической ошибки по координате. Позволяет производить компенсацию полюсов передаточной функции объекта управления.



**Рис. 5.41.** Реакция замкнутой системы с ПИД регулятором на скачок  $r(t)$  при  $T_n = 0,015$  с,  $K = 6$  для объекта вида (5.50) при  $T = 0,1$  с

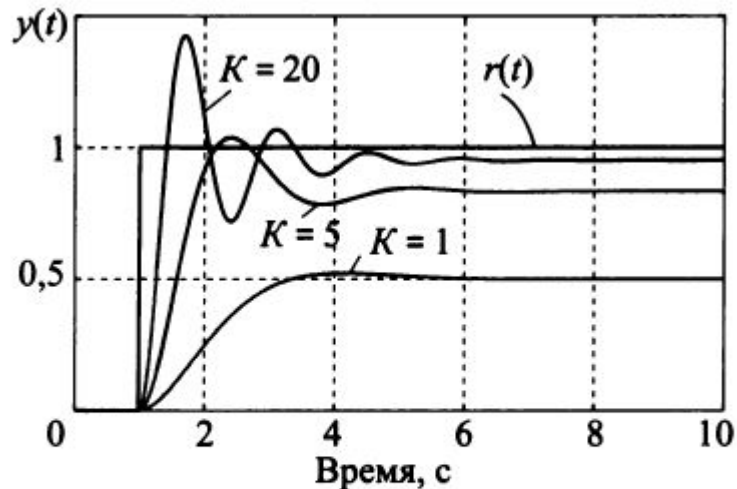
## П-регулятор (пропорциональный)

В ряде случаев достаточно сложный закон ПИД-регулирования применять не имеет смысла.

Например, когда производится управление инерционным объектом с передаточной функцией порядка не выше второго. В таких случаях удается использовать более простые законы регулирования, являющиеся частными случаями ПИД-регулятора.

Для П-регулятора интегральная и дифференциальная компоненты отсутствуют, т.е.  $K_d = 0$ ,  $K_i = 0$ . Тогда из закона ПИД-регулирования получим  $R(s) = K$ .

Замкнутая система будет обладать статической ошибкой, которая стремится к нулю с ростом петлевого усиления  $K_p \cdot K \gg 1$ . Однако проблема устойчивости замкнутой системы не позволяет выбрать коэффициент усиления  $K$  достаточно большим.

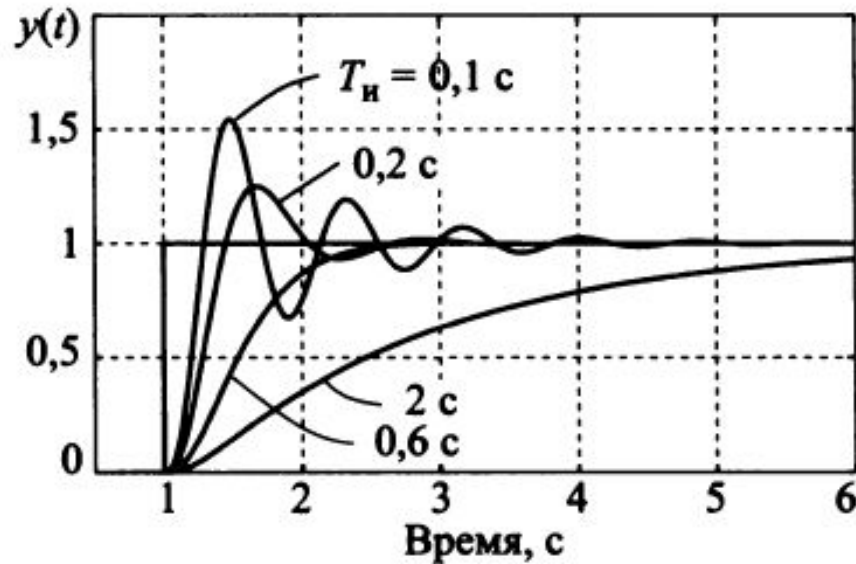


**Рис. 5.37.** Изменение переменной  $y(t)$  во времени при подаче единичного скачка  $r(t)$  на вход системы при разных  $K$

## И-регулятор (интегрирующий)

Это случай, когда в ПИД-регуляторе остается только интегральный член, т.е.  $K = 0$  и  $K_d = 0$ . Такое управление вносит в систему астатизм первого порядка, при котором статическая ошибка равна 0.

$$u(s) = \frac{1}{T_{\text{и}}s} e(s).$$

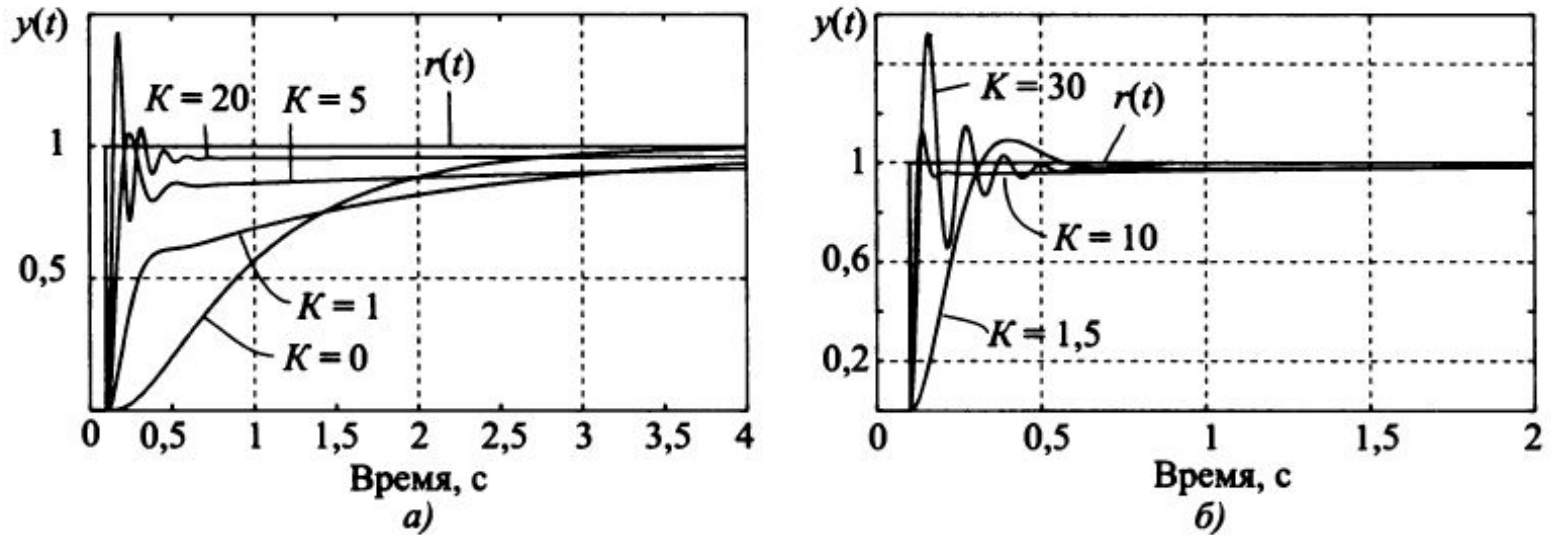


**Рис. 5.38.** Реакция на скачок  $r(t)$  замкнутой системы с объектом 2-го порядка (5.50) с И-регулятором при  $T = 0,1$  с и разных  $T_{\text{и}}$

## ПИ-регулятор (пропорционально-интегрирующий)

В ПИ-регуляторе только постоянная дифференцирования равна нулю ( $T_d=0$ )

$$R(s) = K + \frac{1}{T_i s}$$



**Рис. 5.39.** Реакция замкнутой системы с ПИ-регулятором на скачок  $r(t)$  для объекта вида (5.50) при  $T = 0,1$  с: *a* — при  $T_i = 1$  с; *б* — при  $T_i = 0,1$  с



## Особенности реальных регуляторов

ПИД-регулятор и его модификации являются теоретическими идеализациями реальных регуляторов. Особенности технической реализации реальных регуляторов:

- конечный динамический диапазон изменений физических переменных в системе (например, ограниченная мощность нагревателя, ограниченная пропускная способность клапана);
- отсутствие (как правило) в системе поддержания температуры холодильника (управляющее воздействие  $u < 0$  соответствует включению холодильника, а не выключению нагревателя);
- ограниченная точность измерений, что требует специальных мер для выполнения операций дифференцирования с приемлемой погрешностью;
- наличие практически во всех системах типовых нелинейностей: насыщение (ограничение динамического диапазона изменения переменных), ограничение скорости нарастания, гистерезис и люфт;
- технологический разброс и случайные вариации параметров регулятора и объекта;
- дискретная реализация регулятора;
- необходимость плавного (безударного) переключения режимов регулирования.

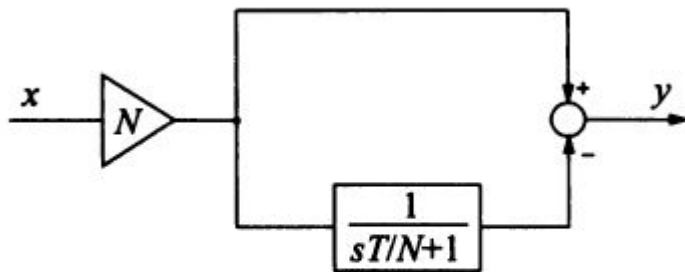
# Погрешность дифференцирования

Суть проблемы: производная вычисляется обычно как разность двух близких по величине значений функции, поэтому относительная погрешность производной всегда оказывается больше, чем относительная погрешность численного представления дифференцируемой функции.

В частности, если на вход дифференциатора поступает синусоидальный сигнал  $A\sin(\omega t)$ , то на выходе получим  $A\omega\cos(\omega t)$ , т.е. с ростом частоты  $\omega$  увеличивается амплитуда сигнала на выходе дифференциатора. Иначе говоря, дифференциатор усиливает высокочастотные помехи, короткие выбросы и шум.

Помехи, усиленные дифференциатором, можно ослабить:

- Применением реального дифференциатора, имеющего в своем составе фильтр низкой частоты первого порядка;
- Применением ФНЧ второго порядка, включенного последовательно с регулятором.



**Рис. 5.64.** Структурная реализация дифференциального члена ПИД-регулятора

$$y = Nx \left( 1 - \frac{1}{sT/N + 1} \right) = \left( \frac{sT}{sT/N + 1} \right) x,$$

$$\frac{sT}{sT/N + 1}$$

$$F(s) = \frac{1}{1 + sT_F + s^2T_F^2/2}$$

# Шумы

Кроме шумов дифференцирования, на работу ПИД-регулятора оказывают воздействие и шумы измерения. Через цепь обратной связи эти шумы попадают на вход регулятора и снижают точность регулирования.

В ПИД-регуляторах различают:

- шум с низкочастотным спектром, вызванный внешними воздействиями на объект управления,
- высокочастотный шум, связанный с электромагнитными наводками, помехами по шинам питания и земли, с дискретизацией измеряемого сигнала и другими причинами.

Низкочастотный шум моделируют как внешние возмущения, высокочастотный — как шумы измерений.

# Интегральное насыщение

В установившемся режиме работы и при малых возмущениях большинство систем с ПИД-регуляторами являются линейными. Однако процесс выхода на режим практически всегда требует учета нелинейности типа «ограничение». Эта нелинейность связана с естественными ограничениями на мощность, скорость, частоту вращения, угол поворота и т.п. Контур регулирования в системе, находящейся в насыщении (когда переменная достигла ограничения), оказывается разомкнутым, поскольку при изменении переменной на входе звена с ограничением его выходная переменная остается без изменений.

Наиболее типовым проявлением режима ограничения является так называемое интегральное насыщение, которое возникает в процессе выхода системы на режим в регуляторах с ненулевым коэффициентом интегрирования  $K_i \neq 0$ . Интегральное насыщение приводит к затягиванию переходного процесса. Часто под интегральным насыщением понимают совокупность эффектов, связанных с нелинейностью типа «ограничение».

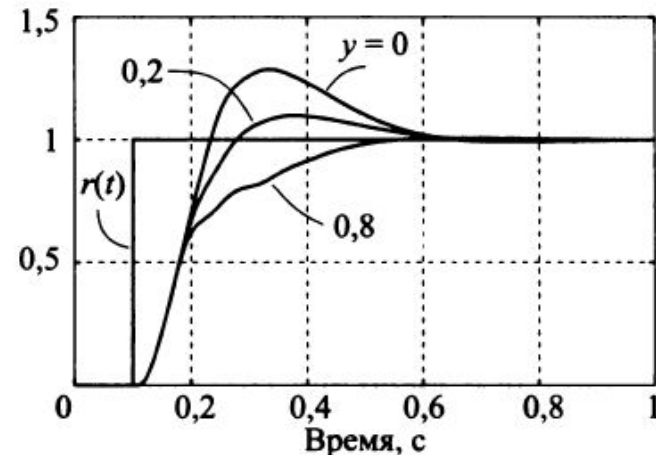
Суть проблемы интегрального насыщения состоит в том, что если сигнал на входе объекта управления  $u(t)$  вошел в зону насыщения (ограничения), а сигнал рассогласования  $r(t) - y(t)$  не равен нулю, интегратор продолжает интегрировать, т.е. сигнал на его выходе растет, но этот сигнал не участвует в процессе регулирования и не воздействует на объект вследствие эффекта насыщения. Система управления в этом случае становится эквивалентной разомкнутой системе, сигнал на входе которой равен уровню насыщения управляющего сигнала  $u(t)$ .

# Методы устранения интегрального насыщения

Методы устранения интегрального насыщения обычно являются предметом изобретений, относятся к коммерческой тайне фирм-производителей и защищаются патентами.

**Алгоритмический запрет интегрирования.** Когда управляющее воздействие на объект достигает насыщения, обратная связь разрывается и интегральная составляющая продолжает расти, даже если при отсутствии насыщения она должна была бы падать. Поэтому один из методов устранения интегрального насыщения состоит в том, что контроллер следит за управляющим воздействием на объект, и как только оно достигает насыщения, контроллер вводит запрет на операцию интегрирования для интегральной составляющей, она продолжает сохранять достигнутое значение до тех пор, пока управляющий сигнал не сойдет с ограничения.

**Условное интегрирование.** Этот способ является обобщением алгоритмического запрета интегрирования. После наступления запрета интегральная составляющая остается постоянной, на том же уровне, который она имела в момент появления запрета интегрирования. Обобщение состоит в том, что запрет интегрирования наступает не только при достижении насыщения, но и при некоторых других условиях. Такими условиями могут быть, например, достижение сигналом ошибки  $e$  или выходной переменной  $y$  некоторого заданного значения.



**Рис. 5.71.** Отклик на единичный скачок  $r(t)$  системы с насыщением исполнительного устройства, при различных уровнях отключения интегратора  $y$ . Объект второго порядка,  $T_1 = 0,1$  с,  $T_2 = 0,05$  с,  $L = 0,01$  с. Параметры регулятора:  $K = 6$ ,  $T_{и} = 0,02$  с,  $T_{д} = 0,3$  с

# Запас устойчивости и робастность

- Возможность потери устойчивости является основным недостатком систем с обратной связью.
- *Устойчивость* системы с ПИД-регулятором — это способность системы возвращаться к слежению за уставкой после прекращения действия внешних воздействий. Под внешними воздействиями понимаются не только внешние возмущения, действующие на объект, но любые возмущения, действующие на любую часть замкнутой системы, в том числе шумы измерений, временная нестабильность уставки, шумы дискретизации и квантования, шумы и погрешность вычислений. Все эти возмущения вызывают отклонения системы от положения равновесия. Если после прекращения воздействия система возвращается в положение равновесия, то она считается устойчивой. При анализе устойчивости ПИД-регуляторов обычно ограничиваются исследованием реакции системы на ступенчатое изменение уставки  $r(t)$ , шум измерений  $n(t)$  и внешние возмущения  $d(t)$ . Потеря устойчивости проявляется как неограниченное возрастание управляемой переменной объекта, или как ее колебание с нарастающей амплитудой.
- В производственных условиях попытки добиться устойчивости системы с ПИД-регулятором опытным путем, без идентификации объекта управления, не всегда приводят к успеху (например, для систем с объектом высокого порядка, для систем с большой транспортной задержкой или для объектов, которые трудно идентифицировать). Устойчивая система может стать неустойчивой при небольших изменениях ее параметров, например вследствие их технологического разброса. Поэтому проводят анализ функции чувствительности системы с ПИД-регулятором, который позволяет выявить условия, при которых система становится *грубой* (мало чувствительной к изменению ее параметров).
- Система, которая сохраняет заданный запас устойчивости во всем диапазоне изменений параметров вследствие их технологического разброса, старения, условий эксплуатации во всем диапазоне изменений параметров нагрузки, а также во всем диапазоне действующих на систему возмущений в реальных условиях эксплуатации, называют **робастной**. Иногда *робастность* и *грубость* используют как эквивалентные понятия.

## Сокращение нулей и полюсов

- Поскольку передаточная функция разомкнутой системы  $G(s) = R(s) \cdot P(s)$  является произведением двух передаточных функций, которые в общем случае имеют и числитель, и знаменатель, то возможно сокращение нулей с полюсами, которые лежат в правой полуплоскости или близки к ней. Поскольку в реальных условиях, когда существует разброс параметров, такое сокращение выполняется неточно, то может возникнуть ситуация, когда теоретический анализ приводит к выводу, что система устойчива, хотя на самом деле при небольшом отклонении параметров процесса от расчетных значений она становится неустойчивой.
- Поэтому каждый раз, когда происходит сокращение нулей в полюсов, необходимо проверять устойчивость системы при реальном разбросе параметров объекта.
- Вторым эффектом является появление существенного различия между временем установления переходного процесса при воздействии сигнала уставки и внешних возмущений. Поэтому необходимо проверять реакцию синтезированного регулятора для каждого из этих воздействий.

## Безударное переключение режимов регулирования

- В ПИД-регуляторах могут существовать режимы, когда их параметры изменяются скачком. Например, когда в работающей системе потребовалось изменить постоянную интегрирования или если после ручного управления системой необходимо перейти на автоматический режим. В описанных случаях могут появиться нежелательные выбросы регулируемой величины, если не принять специальных мер. Поэтому возникает задача плавного («безударного») переключения режимов работы или параметров регулятора.
- Основным методом решения проблемы заключается в построении такой структуры регулятора, когда изменение параметра выполняется до этапа интегрирования. Например, при изменяющемся параметре  $T_i = T_i(t)$  интегральный член можно записать в двух формах:
- В первом случае при скачкообразном изменении  $T_i(t)$  интегральный член будет меняться скачком, во втором случае — плавно, поскольку  $T_i(t)$  находится под знаком интеграла, значение которого не может изменяться скачком.

$$I(t) = \frac{1}{T_{\text{и}}(t)} \int e(t) dt \quad \text{или} \quad I(t) = \int \frac{1}{T_{\text{и}}(t)} e(t) dt.$$



# Дискретная форма регулятора

- Непрерывные переменные удобно использовать для анализа и синтеза ПИД-регуляторов. Для технической реализации необходимо перейти к дискретной форме уравнений, поскольку основой всех регуляторов является микроконтроллер, контроллер или компьютер, которые оперируют с переменными, полученными из аналоговых сигналов после их дискретизации по времени и квантования по уровню.
- Вследствие конечного времени вычисления управляющего воздействия в микроконтроллере и задержки аналого-цифрового преобразования между моментом поступления аналогового сигнала на вход регулятора и появлением управляющего воздействия на его выходе появляется нежелательная задержка, которая увеличивает общую задержку в контуре регулирования и снижает запас устойчивости.
- Основным эффектом, который появляется при дискретизации, является появление алиасных частот в спектре квантованного сигнала в случае, когда частота дискретизации недостаточно высока. Частота алиасного сигнала равна разности между частотой помехи и частотой дискретизации. При этом высокочастотный сигнал помехи смещается в низкочастотную область, где накладывается на полезный сигнал и создает большие проблемы, поскольку отфильтровать его на этой стадии невозможно.
- Переход к дискретным переменным в уравнениях аналогового регулятора выполняется путем замены производных и интегралов их дискретными аналогами. Если уравнение записано в операторной форме, то сначала выполняют переход из области изображений в область оригиналов. При этом оператор дифференцирования заменяют производной, оператор интегрирования — интегралом.
- Существует множество способов аппроксимации производных и интегралов их дискретными аналогами. В ПИД-регуляторах наиболее распространенными являются простейшая аппроксимация производной конечной разностью и интеграла — конечной суммой.

## Конечно-разностные уравнения для интегрального члена

$$I(t) = \frac{1}{T_{\text{н}}} \int_0^t e(t) dt.$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{T_{\text{н}}} e(t).$$

$$\frac{I_i - I_{i-1}}{\Delta t} = \frac{1}{T_{\text{н}}} e_{i-1},$$

$$I_i = I_{i-1} + \frac{\Delta t}{T_{\text{н}}} e_{i-1}.$$

$$I_i = I_{i-1} + \frac{\Delta t}{T_{\text{н}}} e_i.$$

- Очередное значение интеграла можно вычислить, зная предыдущее и значение ошибки в предыдущий момент времени (формула с левыми разностями).
- Однако такая формула имеет свойство накапливать ошибку вычислений с течением времени, если отношение  $\Delta t/T_{\text{н}}$  недостаточно мало.
- Более устойчива другая формула интегрирования с правыми разностями, когда значение ошибки берется в тот же момент времени, что и вычисляемый интеграл.

## Конечно-разностные уравнения для дифференциального члена (реальный дифференциатор)

$$u_D(s) = sT_d \frac{1}{sT_d/N + 1} e(s)$$

$$\frac{T_d}{N} \frac{du_D(t)}{dt} + u_D(t) = T_d \frac{de(t)}{dt}.$$

$$u_{Di} = \left(1 - \frac{N\Delta t}{T_d}\right) u_{Di-1} + N(e_i - e_{i-1}). \quad (5.103)$$

$$\left|1 - \frac{N\Delta t}{T_d}\right| < 1, \quad \Delta t < 2T_d/N. \quad (5.104)$$

$$u_{Di} = \frac{T_d}{T_d + N\Delta t} u_{Di-1} + \frac{NT_d}{T_d + N\Delta t} (e_i - e_{i-1}). \quad (5.105)$$

$$|T_d/(T_d + N\Delta t)| < 1$$

- Разностное уравнение (5.103) с левыми разностями имеет условие сходимости итерационного процесса (5.104), которое выполняется не для всех  $\Delta t$ .
- Разностное уравнение с правыми разностями (5.105) имеет условие сходимости итерационного процесса, которое выполняется **для всех**  $\Delta t$ .
- Уравнение (5.105) позволяет «отключить» дифференциальную составляющую в ПИД-регуляторе путем назначения  $T_d = 0$ , чего нельзя сделать в выражении (5.103), поскольку при этом возникает деление на ноль.
- Для обеспечения хорошего качества регулирования шаг дискретизации  $\Delta t$  не должен быть больше чем  $1/15 \dots 1/6$  времени установления переходной характеристики объекта по уровню 0,95 или  $1/4 \dots 1/6$  транспортной задержки.
- При малом шаге дискретизации увеличивается погрешность вычисления производной.

## Уравнение цифрового ПИД-регулятора

$$u_{i+1} = Ke_i + I_i + u_{Di}, \quad (5.106)$$

$$u_{D0} = 0, \quad I_0 = 0, \quad e_0 = 0,$$

$$u_{i+1} = Ke_i + \frac{1}{T_n} \sum_{k=0}^i e_k + T_d \frac{e_{i+1} - e_i}{\Delta t}, \quad (5.107)$$

- В (5.106) дифференциальная составляющая вычисляется по (5.105).
- Для начала работы алгоритма необходимо задать начальные условия, обычно нулевые.
- Простейший алгоритм (5.107) обладает плохой устойчивостью и низкой точностью.
- С уменьшением шага дискретизации различие между двумя алгоритмами стирается.

## Инкрементная форма цифрового ПИД-регулятора

Часто используют уравнение ПИД-регулятора в виде зависимости приращения управляющей величины от ошибки регулирования и ее производных (без интегрального члена). Такое представление удобно, когда роль интегратора выполняет внешнее устройство, например обычный или шаговый двигатель. Угол поворота его оси пропорционален значению управляющего сигнала и времени.

$$\Delta u(t) = K \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{T_{\text{и}}} e(t) + T_{\text{д}} \frac{d^2 e(t)}{dt^2}.$$

$$u(t) = \int_0^t \Delta u(t) dt.$$

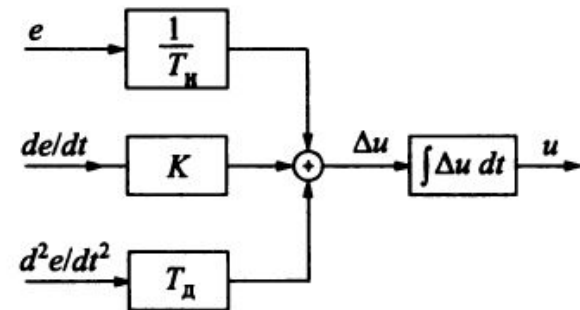


Рис. 5.81. Инкрементная форма ПИД-регулятора

$$\Delta u_{i+1} = \frac{1}{T_{\text{и}}} e_i + K \frac{\Delta e_i}{\Delta t} + T_{\text{д}} \frac{\Delta e_i - \Delta e_{i-1}}{\Delta t}, \quad (5.108)$$

$$\Delta u_{i+1} = u_{i+1} - u_i, \quad \Delta e_i = e_i - e_{i-1}.$$

## Расчет параметров ПИД-регулятора

- Расчет параметров ПИД-регулятора выполняют исходя из требований к качеству регулирования, а также ограничений на значения и скорости изменения переменных в системе.
- Традиционно основные качественные показатели формулируются исходя из требований к форме реакции замкнутой системы на ступенчатое изменение уставки.
- Однако такой критерий очень ограничен. В частности, он ничего не говорит о величине ослабления шумов измерений или влияния внешних возмущений, может дать ошибочное представление о робастности системы.
- Для полного описания или тестирования системы с ПИД-регулятором нужен ряд дополнительных показателей качества.
- В общем случае выбор показателей качества не может быть формализован полностью и должен осуществляться исходя из смысла решаемой задачи.

## Качество регулирования

Выбор критерия качества регулирования зависит от цели, для которой используется регулятор. Такой целью чаще всего является:

- поддержание постоянного значения параметра (например, температуры);
- слежение за изменением уставки или программное управление.

Например, точное слежение за изменением уставки необходимо в системах управления движением, в робототехнике. В системах управления технологическими процессами, где уставка длительное время остается без изменений, требуется максимальное ослабление возмущений.

Для той или иной задачи наиболее важными могут быть следующие факторы:

- форма отклика на внешнее возмущение (время установления, перерегулирование, коэффициент затухания и др.);
- форма отклика на шумы измерений;
- форма отклика на сигнал уставки;
- робастность по отношению к разбросу параметров объекта управления;
- требования к экономии энергии в управляемой системе;
- минимум шумов измерений и др.

Для классического ПИД-регулятора параметры, которые являются наилучшими для слежения за уставкой, в общем случае отличаются от параметров, наилучших для ослабления влияния внешних возмущений.

# Критерии качества во временной области

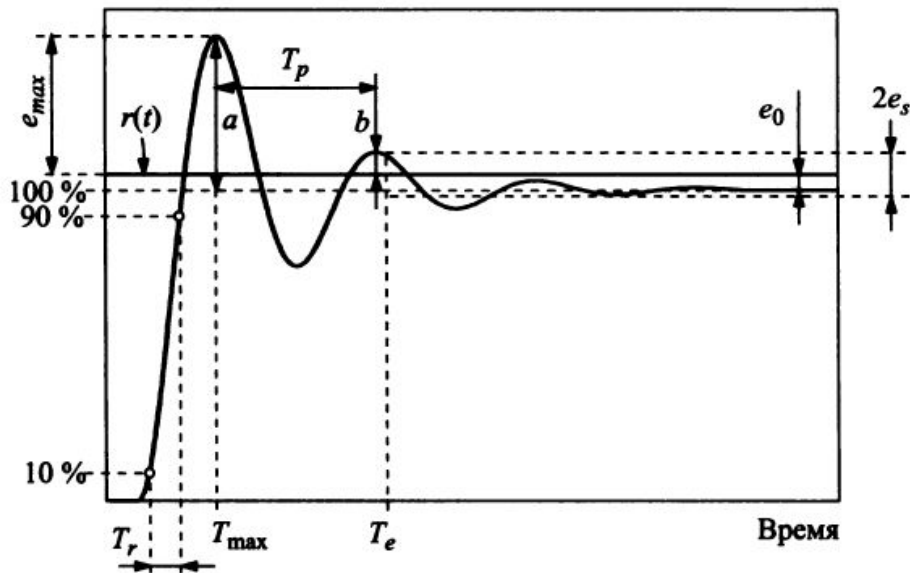
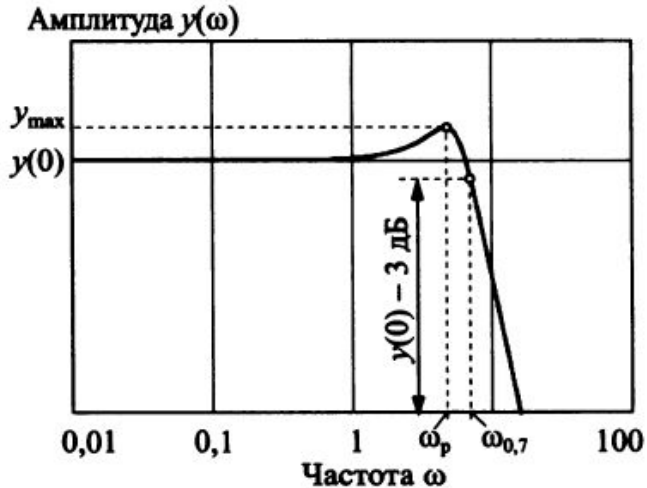


Рис. 5.82. Критерии качества регулирования во временной области

- максимум ошибки регулирования,
- момент времени  $T_{max}$ , при котором ошибка достигает этого максимума,
- интегрированная абсолютная ошибка,
- интеграл от квадрата ошибки,
- декремент затухания  $d$  — отношение первого максимума ко второму,
- статическая ошибка,
- время установления  $T_e$  с заданной погрешностью,
- перерегулирование,
- время нарастания  $T_r$  — интервал времени, в течение которого выходная переменная нарастает от 10 до 90 % своего установившегося значения,
- период затухающих колебаний  $T_p$ .



## Частотные критерии качества



**Рис. 5.83.** Критерии качества регулирования в частотной области

$$\omega_{-3 \text{ дБ}} \text{ ИЛИ } \omega_{0,7}$$

$$M = \frac{y_{\max}}{y(0)}, \quad (5.116)$$

$$\omega_p \quad y_{\max} = y(\omega_p)$$

$$T_r \omega_{0,7} \approx 2$$

$$\omega_s \approx 2\pi/T_p$$

- полоса пропускания - полоса частот, в пределах которой кривая АЧХ снижается не более чем на 3 дБ;
  - колебательность  $M$  — отношение максимального (пикового) значения АЧХ к ее значению на нулевой частоте  $y(0)$ ;
  - резонансная частота системы — частота, на которой АЧХ достигает максимума.
- Существуют приближенные зависимости между критериями в частотной и временной области

# Выбор параметров регулятора

- В общей теории автоматического управления структура регулятора выбирается исходя из модели объекта управления. В нашем же случае структура регулятора уже задана — мы рассматриваем ПИД-регулятор.
- Впервые методику расчета параметров ПИД-регуляторы предложили Зиглер и Никольс в 1942 г.
- Эта методика очень проста и дает не очень хорошие результаты.
- После расчета параметров регулятора обычно требуется его ручная подстройка для улучшения качества регулирования. Для этого используется ряд правил, хорошо обоснованных теоретически.
- Для настройки ПИД-регуляторов можно использовать и общие методы теории автоматического управления, такие, как метод назначения полюсов и алгебраические методы.
- Все аналитические (формульные) методы настройки регуляторов основаны на аппроксимации динамики объекта моделью первого или второго порядка с задержкой. Причиной этого является невозможность аналитического решения систем уравнений, которое необходимо при использовании моделей более высокого порядка.
- В последние годы в связи с появлением мощных контроллеров и персональных компьютеров получили развитие и распространение численные методы оптимизации. Они являются гибким инструментом для оптимальной настройки параметров регулятора для моделей любой сложности и легко учитывают нелинейности объекта управления и требования к робастности.

# Настройка параметров регулятора по методу Зиглера и Никольса

- Зиглер и Никольс: предложили два метода настройки ПИД-регуляторов. Один из них основан на параметрах отклика объекта на единичный скачок, второй — на частотных характеристиках объекта управления.
- Для расчета параметров ПИД-регулятора по первому методу Зиглера-Никольса используются всего два параметра:  $a$  и  $L$ . Формулы для расчета коэффициентов ПИД-регулятора сведены в табл. 5.1.



**Рис. 5.84.** Результат настройки ПИД-регулятора по методу Зиглера-Никольса для объекта второго порядка с задержкой:  $T_1 = T_2 = 0,1$  с,  $L = 0,01$  с

Таблица 5.1

Формулы для расчета коэффициентов регулятора по методу Зиглера-Никольса

Регулятор	Расчет по отклику на скачок			Расчет по частотным параметрам		
	$K$	$T_n$	$T_d$	$K$	$T_n$	$T_d$
П	$1/a$	—	—	$0,5/K_{180}$	—	—
ПИ	$0,9/a$	$3L/K$	—	$0,4/K_{180}$	$0,8T_{180}/K$	—
ПИД	$1,2/a$	$0,9L/K$	$0,5LK$	$0,6/K_{180}$	$0,5T_{180}/K$	$0,125T_{180}K$

Примечание. Система обозначений параметров регулятора соответствует уравнению (5.36).

## Настройка параметров регулятора по методу CHR

- В отличие от Зиглера и Никольса, которые использовали в качестве критерия качества настройки декремент затухания, равный 4, в методе CHR использован критерий максимальной скорости нарастания при отсутствии перерегулирования или при наличии не более чем 20%-ного перерегулирования. Такой критерий позволяет получить больший запас устойчивости, чем в методе Зиглера-Никольса.
- CHR-метод дает две разные системы параметров регулятора. Одна из них получена при наблюдении отклика на изменение уставки (табл. 5.2), вторая — при наблюдении отклика на внешние возмущения (табл. 5.3). Какую систему параметров выбирать, зависит от того, что важнее для конкретного регулятора: качество регулирования при изменении уставки или ослабление внешних воздействий. Метод CHR использует аппроксимацию объекта моделью первого порядка с задержкой и те же исходные параметры  $a$  и  $L$ , что и в методе Зиглера-Никольса.

Таблица 5.2  
Формулы для расчета коэффициентов регулятора по методу CHR,  
по отклику на изменение уставки

Регулятор	Без перерегулирования			С 20%-ным перерегулированием		
	$K$	$T_n$	$T_d$	$K$	$T_n$	$T_d$
П	$0,3/a$	–	–	$0,7/a$	–	–
ПИ	$0,35/a$	$1,2L/K$	–	$0,6/a$	$1,0L/K$	–
ПИД	$0,6/a$	$1,0L/K$	$0,5LK$	$0,95/a$	$1,4L/K$	$0,47LK$

Таблица 5.3  
Формулы для расчета коэффициентов регулятора по методу CHR,  
по отклику на внешние воздействия

Регулятор	Без перерегулирования			С 20%-ным перерегулированием		
	$K$	$T_n$	$T_d$	$K$	$T_n$	$T_d$
П	$0,3/a$	–	–	$0,7/a$	–	–
ПИ	$0,6/a$	$4L/K$	–	$0,7/a$	$2,3L/K$	–
ПИД	$0,95/a$	$2,4L/K$	$0,42LK$	$1,2/a$	$2,0L/K$	$0,42LK$

## Ручная настройка, основанная на правилах

После расчета параметров регулятора желательно сделать его подстройку. Подстройку можно выполнить на основе правил. Эти правила получены из опыта, теоретического анализа и численных экспериментов:

- увеличение пропорционального коэффициента увеличивает быстродействие и снижает запас устойчивости;
- с уменьшением интегральной составляющей ошибка регулирования с течением времени уменьшается быстрее;
- уменьшение постоянной интегрирования уменьшает запас устойчивости;
- увеличение дифференциальной составляющей увеличивает запас устойчивости и быстродействие.

Перечисленные правила применяются также для регуляторов, использующих методы экспертных систем и нечеткой логики.

Применение правил возможно только после предварительной настройки регулятора по формулам. Попытки настроить регулятор без начального приближенного расчета коэффициентов могут быть безуспешными. Правила справедливы только в окрестности оптимальной настройки регулятора. Вдали от нее эффекты могут быть иными.

# Настройка параметров с помощью методов оптимизации

Методы оптимизации для нахождения параметров регулятора концептуально очень просты.

- Выбирается критерий минимизации, в качестве которого может быть один из показателей качества или комплексный критерий, составленный из нескольких показателей с разными весовыми коэффициентами.
- К критерию добавляются ограничения, накладываемые требованиями робастности. Таким путем получается критериальная функция, зависящая от параметров ПИД-регулятора.
- Далее используются численные методы минимизации критериальной функции с заданными ограничениями, которые и позволяют найти искомые параметры ПИД-регулятора.

## **Достоинства:**

- позволяют получить оптимальные значения параметров, не требующие дальнейшей подстройки;
- не требуют упрощения модели объекта, модель может быть как угодно сложной;
- позволяют быстро достичь конечного результата (избежать процедуры длительной подстройки параметров).

**Однако реализация данного подхода связана с большими проблемами,** которые не один десяток лет являются предметом научных исследований:

- низкая надежность метода (во многих случаях вычислительный процесс может расходиться и искомые коэффициенты не будут найдены);
- низкая скорость поиска минимума для овражных функций и функций с несколькими минимумами.

# Автоматическая настройка и адаптация

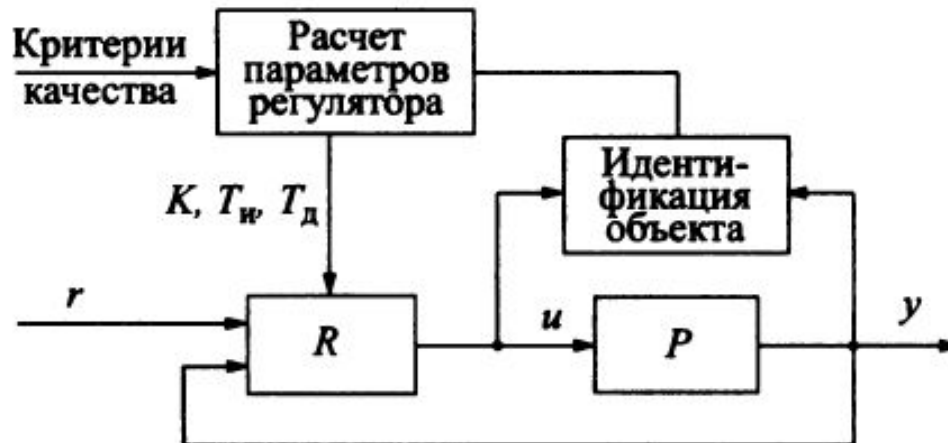
Несмотря на то, что многие методы автоматической настройки и адаптации ПИД-регуляторов, используемые в настоящее время, были разработаны еще в 60-х годах, в промышленных контроллерах адаптивная техника начала использоваться только с середины 80-х.

- Настройка может выполняться *вручную или автоматически*, без участия человека (автонастройка).
- Автонастройка может выполняться полностью *автоматически и по требованию*, когда человек является инициатором настройки. Полностью автоматическая настройка может инициироваться при наступлении заранее заданного условия, например при изменении нагрузки, при изменении внешних воздействий, при изменении погрешности регулирования, или непрерывно во времени.
- *Автоматическая настройка, иницируемая без участия человека, называется адаптацией*. Иногда термин «адаптация» трактуют более широко как приспособление регулятора к реальному объекту на стадии ввода системы в эксплуатацию.
- Разновидностью адаптации является разомкнутое управление параметрами регулятора (табличная автонастройка), когда заранее найденные параметры регулятора для разных условий работы системы заносятся в таблицу, из которой они извлекаются при наступлении условий, по которым иницируется адаптация.
- Адаптация в принципе является медленным процессом, поэтому ее нельзя рассматривать как непрерывное слежение параметров регулятора за изменяющимися параметрами объекта.
- В настоящий момент отсутствуют простые, надежные и общепринятые методы автоматической настройки.

# Основные принципы автоматической настройки

Все виды автоматической настройки используют три принципиально важных этапа: идентификация, расчет параметров регулятора, настройка. Часто конечный этап включает этап подстройки (заключительная оптимизации настройки).

- Подстройка регулятора может быть поисковой (без идентификации объекта, путем поиска оптимальных параметров) и *беспоисковой* (с идентификацией).
- Поисковая идентификация базируется обычно на правилах или на итерационных алгоритмах поиска минимума критериальной функции. Наиболее распространен поиск оптимальных параметров с помощью градиентного метода поиска.
- Автонастройка практически не имеет никаких особенностей, за исключением того, что она выполняется в автоматическом режиме. Основным этапом автоматической настройки и адаптации является идентификация модели объекта. Она выполняется в автоматическом режиме. Автоматическая настройка может выполняться и без идентификации объекта, основываясь на правилах или поисковых методах.



**Рис. 5.85.** Общая структура системы с автоматической настройкой

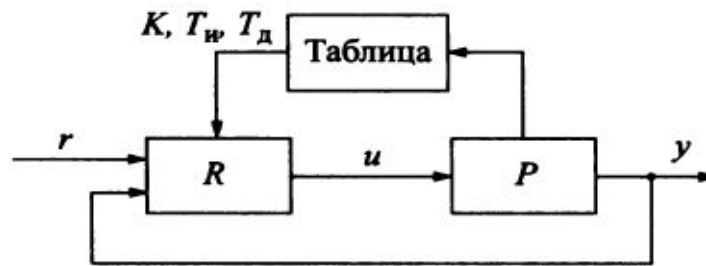


# Табличное управление

Наиболее простым методом адаптации ПИД-регулятора к изменяющимся свойствам объекта управления является метод табличного управления коэффициентами регулятора. Он может быть использован не только для адаптивного управления, но и для управления нелинейными объектами, нестационарными процессами, при необходимости изменять параметры в зависимости от некоторых условий.

Принцип табличного управления:

- зная заранее возможные изменения режима работы системы, выполняют идентификацию объекта для нескольких разных режимов и для каждого из них находят параметры регулятора.
- Значения этих параметров записывают в таблицу.
- В процессе функционирования системы измеряют параметры, которые характеризует режим работы системы, и в зависимости от их значений выбирают из таблицы коэффициенты ПИД-регулятора.



**Рис. 5.86.** Адаптивное управление с помощью параметров, заранее записанных в таблицу

## Нечеткая логика в ПИД-регуляторах

Нечеткое управление (управление на основе методов теории нечетких множеств) используется:

- при недостаточном знании объекта управления, но при наличии опыта управления им;
- в нелинейных системах, идентификация которых слишком трудоемка;
- в случаях, когда по условию задачи необходимо использовать знания эксперта.

Поскольку информация, полученная от оператора, выражена словесно, для ее использования в ПИД-регуляторах применяют лингвистические переменные и аппарат теории нечетких множеств, который был разработан Л. Заде в 1965 г. В 1974 г. Мамдани показал возможность применения идей нечеткой логики (fuzzy-logic) для построения системы управления динамическим объектом. В 1975 г. описаны нечеткий ПИ-регулятор и его применения для управления парогенератором.

Нечеткая логика в ПИД-регуляторах используется преимущественно двумя путями:

- для построения самого регулятора;
- для организации подстройки коэффициентов ПИД-регулятора.

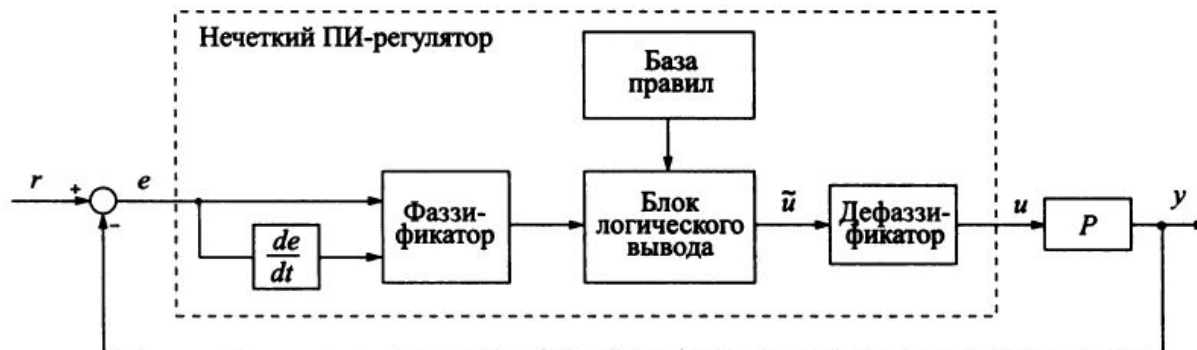
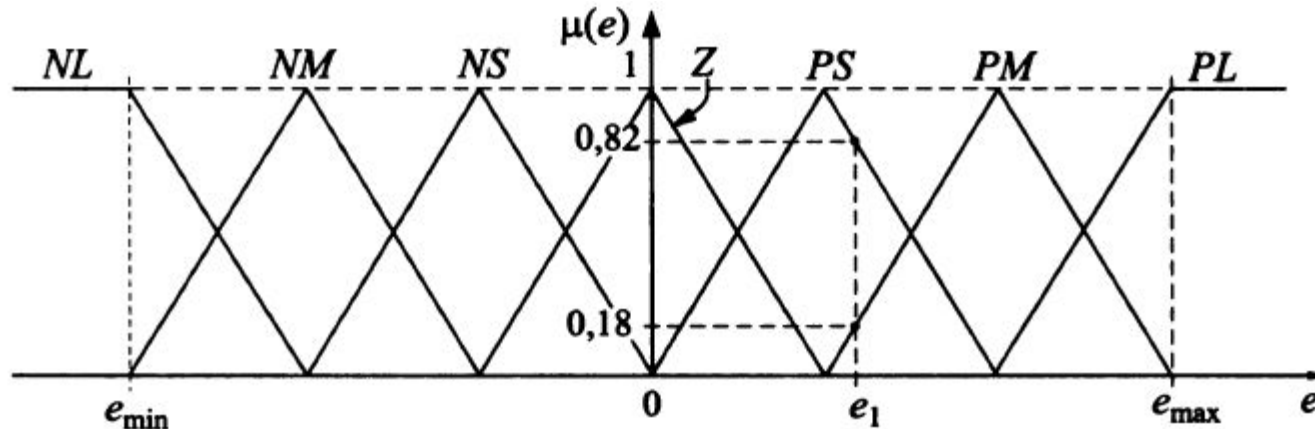


Рис. 5.87. Структура нечеткого ПИ-регулятора

# Принципы построения нечеткого ПИ-регулятора



**Рис. 5.88.** Деление области изменения переменной  $e$  на множества  $NL$ ,  $NM$ ,  $NS$  и т.д. с функциями принадлежности  $\mu(e)$  треугольной формы

Для применения методов нечеткой логики прежде всего необходимо преобразовать обычные четкие переменные в нечеткие. Процесс такого преобразования называется фаззификацией (от англ. fuzzy — нечеткий). Диапазон изменения переменной  $e$  разбивается на множества (подмножества)  $NL$ ,  $NM$ ,  $NS$ ,  $ZA$ ,  $PS$ ,  $PM$ ,  $PL$ , в пределах каждого из которых строится функция принадлежности переменной  $e$  каждому из множеств.

Для нечетких множеств существует общепринятая система обозначений:  $N$  — отрицательный (Negative);  $Z$  — нулевой (Zero);  $P$  — положительный (Positive); к этим обозначениям добавляют буквы  $S$  (малый, Small),  $M$  (средний, Medium),  $L$  (большой, Large). Например,  $NL$  — отрицательный большой;  $NM$  — отрицательный средний;  $PL$  — положительный большой. Число таких переменных (термов) может быть любым, однако с увеличением их числа существенно возрастают требования к опыту эксперта, который должен сформулировать правила для всех комбинаций входных переменных.

## Правила нечеткого вывода

Для выполнения функции регулирования над нечеткими переменными должны быть выполнены операции, построенные на основании высказываний эксперта, сформулированных в виде нечетких правил. Совокупность нечетких правил и нечетких переменных используется для осуществления нечеткого логического вывода, результатом которого является управляющее воздействие на объект управления.

Нечеткий вывод выполняется следующим образом. Пусть область изменения ошибки  $e$  разделена на множества  $N, Z, P$ , область изменения управляющего воздействия — на множества  $NL, NM, Z, PM, PL$  и с помощью эксперта удалось сформулировать следующие правила работы регулятора:

- правило 1: если  $e = N$  и  $de/dt = P$ , то  $\tilde{u} = Z$ ;
- правило 2: если  $e = N$  и  $de/dt = Z$ , то  $\tilde{u} = NM$ ;
- правило 3: если  $e = N$  и  $de/dt = N$ , то  $\tilde{u} = NL$ ;
- правило 4: если  $e = Z$  и  $de/dt = P$ , то  $\tilde{u} = PM$ ;
- правило 5: если  $e = Z$  и  $de/dt = Z$ , то  $\tilde{u} = Z$ ;
- правило 6: если  $e = Z$  и  $de/dt = N$ , то  $\tilde{u} = NM$ ;
- правило 7: если  $e = P$  и  $de/dt = P$ , то  $\tilde{u} = PL$ ;
- правило 8: если  $e = P$  и  $de/dt = Z$ , то  $\tilde{u} = PM$ ;
- правило 9: если  $e = P$  и  $de/dt = N$ , то  $\tilde{u} = Z$ .

(5.118)

		$de/dt$		
		$P$	$Z$	$N$
$e$	$N$	$Z$	$NM$	$NL$
	$Z$	$PM$	$Z$	$NM$
	$P$	$PL$	$PM$	$Z$

## Правила логического вывода и дефаззификация

Операция «И» в правилах (5.118) соответствует пересечению множеств, а результат применения всех правил соответствует операции объединения множеств.

Результат – функция принадлежности нечеткой переменной управления.

Переход от функции принадлежности нечеткого управления к точному значению управляющего воздействия – операция дефаззификации.

$$\mu_{e \cap de/dt} = \min(\mu_e, \mu_{de/dt}), \quad (5.119)$$

$$\mu_{e \cup de/dt} = \max(\mu_e, \mu_{de/dt}). \quad (5.120)$$

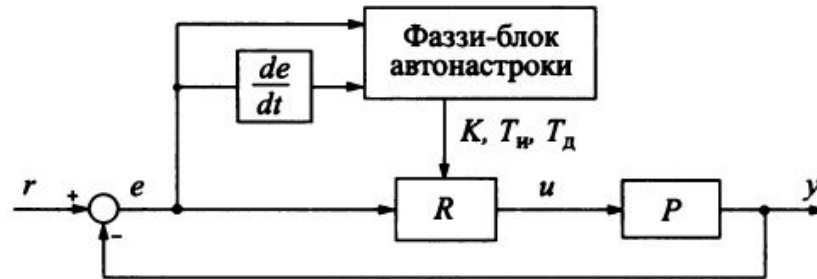
$$\begin{aligned} \mu_{\Pi 1}(\tilde{u}) &= \min\{\mu_{u1}(\tilde{u}), \min(\mu_{e1}(e), \mu_{de/dt1}(de/dt))\}, \\ \mu_{\Pi 2}(\tilde{u}) &= \min\{\mu_{u2}(\tilde{u}), \min(\mu_{e2}(e), \mu_{de/dt2}(de/dt))\}, \dots \\ \mu_{\Pi 9}(\tilde{u}) &= \min\{\mu_{u9}(\tilde{u}), \min(\mu_{e9}(e), \mu_{de/dt9}(de/dt))\}. \end{aligned} \quad (5.122)$$

$$\mu(\tilde{u}) = \max\{\mu_{\Pi 1}(\tilde{u}), \mu_{\Pi 2}(\tilde{u}), \dots, \mu_{\Pi 9}(\tilde{u})\}. \quad (5.123)$$

$$u = \frac{\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \tilde{u} \mu(\tilde{u}) d\tilde{u}}{\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \mu(\tilde{u}) d\tilde{u}}. \quad (5.124)$$

# Применение нечеткой логики для подстройки коэффициентов ПИД-регулятора

Рис. 5.90. Структура ПИД-регулятора с блоком автонастройки на основе нечеткой логики



- Блок нечеткой логики (фаззи-блок) использует базу правил подстройки и методы нечеткого вывода. Фаззи-подстройка позволяет уменьшить перерегулирование, снизить время установления и повысить робастность ПИД-регулятора.
- Процесс автонастройки регулятора с помощью блока нечеткой логики начинается с поиска начальных приближений коэффициентов регулятора  $K$ ,  $T_i$ ,  $T_d$ . Это делается обычно методом Зиглера-Никольса. Далее формулируется критериальная функция, необходимая для поиска оптимальных значений параметров настройки методами оптимизации.
- В процессе настройки регулятора выбирают диапазоны входных и выходных сигналов блока автонастройки, форму функций принадлежности искомым параметров, правила нечеткого вывода, механизм логического вывода, метод дефаззификации и диапазоны масштабных множителей, необходимых для пересчета четких переменных в нечеткие.

# Искусственные нейронные сети

- Нейронные сети, как и нечеткая логика, используются в ПИД-регуляторах двумя путями: для построения самого регулятора и для построения блока настройки его коэффициентов. Нейронная сеть обладает способностью «обучаться», что позволяет использовать опыт эксперта для обучения нейронной сети.
- Регулятор с нейронной сетью похож на регулятор с табличным управлением, однако отличается специальными методами настройки («обучения»), разработанными для нейронных сетей и методами интерполяции данных.
- В отличие от нечеткого регулятора, где эксперт должен сформулировать правила настройки в лингвистических переменных, при использовании нейронной сети от эксперта не требуется формулировка правил — достаточно, чтобы он несколько раз сам настроил регулятор в процессе «обучения» нейронной сети, т.е. сформулировал примеры обучения.
- Нейронные сети были предложены в 1943 г. Мак-Каллоком и Питтсом как результат изучения нервной деятельности и биологических нейронов. Искусственный нейрон представляет собой функциональный блок с одним выходом  $y$  и  $n$  входами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , который реализует в общем случае нелинейное преобразование (функцию активации) над входными переменными.

$$y = F\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i + b\right)$$

# Искусственная нейронная сеть и ПИД-регулятор

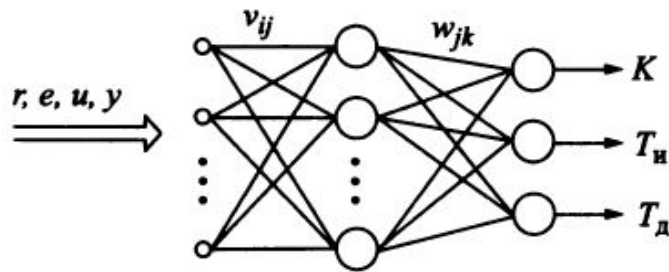


Рис. 5.91. Структура нейронной сети в блоке автонастройки

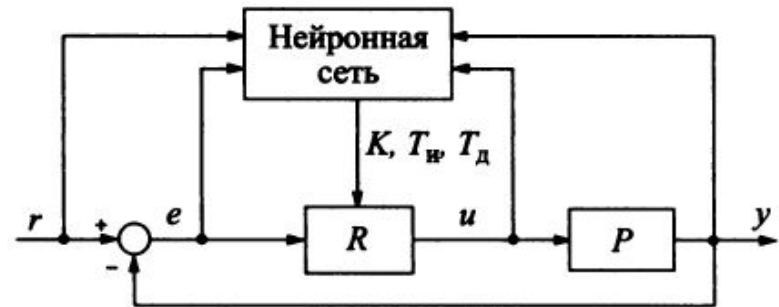


Рис. 5.92. Структура ПИД-регулятора с блоком автонастройки на основе нейронной сети

- Нейронная сеть состоит из множества связанных между собой нейронов, количество связей может составлять тысячи. Благодаря нелинейности функций активации и большому количеству настраиваемых коэффициентов нейронная сеть может выполнять нелинейное отображение множества входных сигналов во множество выходных.
- Типовая структура системы автоматического регулирования с ПИД-регулятором и нейронной сетью в качестве блока автонастройки показана на рис. 5.92. Нейронная сеть в данной структуре выполняет роль функционального преобразователя, который для каждого набора сигналов  $r, e, u, y$  вырабатывает коэффициенты ПИД-регулятора  $K, T_n, T_d$ .
- Самой сложной частью в проектировании регуляторов с нейронной сетью является процедура обучения. «Обучение» состоит в идентификации неизвестных параметров нейронов – весовых коэффициентов связей и параметров функции активации. Для обучения нейронной сети обычно используют методы градиентного поиска минимума критериальной функции зависящей от параметров нейронов. Процесс поиска является итерационным, на каждой итерации находят все коэффициенты сети, сначала для выходного слоя нейронов, затем предыдущего, и так до первого слоя (метод обратного распространения ошибки). Используются также другие методы поиска минимума, в том числе генетические алгоритмы, метод моделирования отжига, метод наименьших квадратов.



# Процесс обучения нейронной сети

Процесс обучения нейронной сети выглядит следующим образом (рис. 5.93).

- Эксперту предоставляют возможность подстраивать параметры регулятора  $K$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  в замкнутой системе автоматического регулирования при различных входных воздействиях  $r(t)$ . Предполагается, что эксперт умеет это делать с достаточным для практики качеством.
- Временные диаграммы (осциллограммы) переменных, полученные в системе, подстраиваемой экспертом, записываются в архив и затем подаются на нейронную сеть, подключенную к ПИД-регулятору (рис. 5.93,б).
- Нейронная сеть настраивается таким образом, чтобы минимизировать погрешность между сигналом  $u^*$ , полученным с участием эксперта, и сигналом  $u$ , полученным в процессе обучения нейронной сети.
- После выполнения процедуры обучения параметры нейронной сети заносятся в блок автонастройки (см. рис. 5.92). В соответствии с теорией нейронных сетей, обученная нейронная сеть должна вести себя так же, как и эксперт, причем даже при тех входных воздействиях, которые не были включены в набор сигналов, использованных при обучении.
- Длительность процесса обучения является основной преградой на пути широкого использования методов нейронных сетей в ПИД-регуляторах. Другими недостатками нейронных сетей являются невозможность предсказания погрешности регулирования для входных воздействий, которые не входили в набор обучающих сигналов; отсутствие критериев выбора количества нейронов в сети, длительности обучения, диапазона и количества обучающих воздействий. Ни в одной из публикаций не исследовалась робастность или запас устойчивости регулятора.

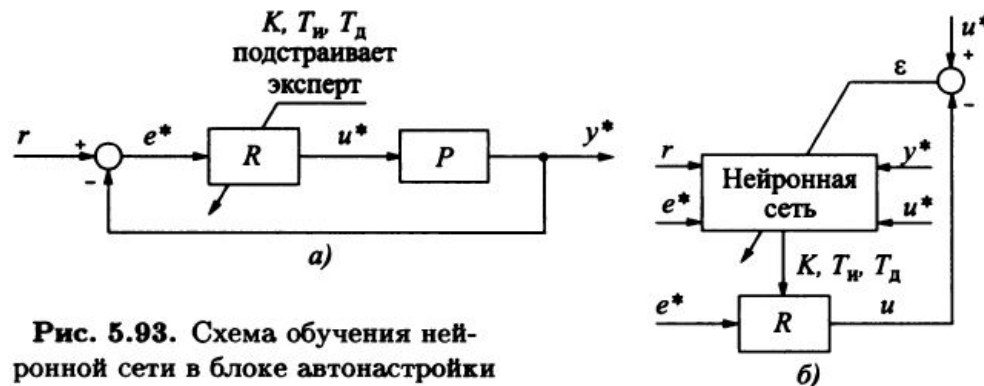


Рис. 5.93. Схема обучения нейронной сети в блоке автонастройки

## Генетические алгоритмы

- Генетические алгоритмы являются мощным методом оптимизации, позволяющим найти глобальный оптимум быстрее, чем другие методы случайного поиска. Существенным их достоинством является отсутствие проблем со сходимостью и устойчивостью. Эти методы используются для идентификации моделей объектов управления, для поиска оптимальных параметров регулятора, для поиска оптимальных положений функций принадлежности в фаззи-регуляторах и для обучения нейронных сетей. Чаще всего генетические алгоритмы используются совместно с нейронными сетями и регуляторами с нечеткой логикой.
- Недостатком генетических алгоритмов является большое время поиска экстремума, что не позволяет их использовать в быстродействующих системах реального времени.
- Генетические алгоритмы основаны на принципах естественного отбора, сформулированных Дарвиным в 1859 г. Идею генетических алгоритмов применительно к решению математических задач сформулировал Дж. Холланд в 1962 г., используя понятия генов, хромосом, скрещивания, мутация, селекции, репродукции. Основной идеей является прямое подобие принципу естественного отбора, когда выживают наиболее приспособленные особи.
- Для применения генетических алгоритмов необходимо преобразовать переменные, фигурирующие в условии задачи, в генетические переменные. Такое преобразование задается схемой кодирования. Переменные могут быть представлены в двоичной форме, в форме действительных десятичных чисел или в другой форме, в зависимости от смысла решаемой задачи.

# Классический генетический алгоритм

Классический генетический алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Выбор исходной популяции хромосом размера  $N$ .
2. Оценка приспособленности хромосом в популяции.
3. Проверка условия остановки алгоритма.
4. Селекция хромосом.
5. Применение генетических операторов.
6. Формирование новой популяции.
7. Переход к п. 2.

Для работы алгоритма нужно задать нижнюю и верхнюю границы изменения искомых параметров, вероятность скрещивания, вероятность мутации, размер популяции и максимальное количество поколений.

Исходная популяция хромосом генерируется случайным образом.

Приспособленность хромосом оценивается с помощью целевой функции в кодированной форме.

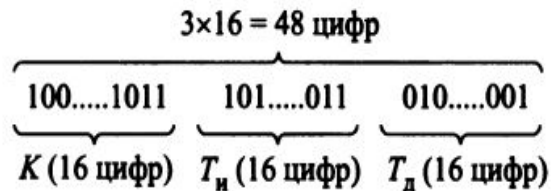
Далее хромосомы с лучшей приспособленностью собираются в группу, в пределах которой выполняются генетические операции скрещивания или мутации.

Скрещивание позволяет получить от двух родителей перспективного потомка.

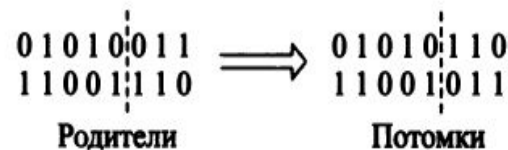
Оператор мутации вносит изменения в хромосомы. В случае двоичного кодирования мутация состоит в изменении случайного бита в двоичном слове.

## Пример кодирования, скрещивания, селекции

- Пример кодирования трех коэффициентов ПИД-регулятора для применения в генетических алгоритмах приведен на рис. 5.94. Здесь хромосома состоит из трех параметров общей длиной 48 бит.
- Операция скрещивания состоит в обмене генетическим материалом между хромосомами (родителями) для того, чтобы получить новую хромосому (потомка). Существует много различных форм операторов скрещивания. Один из них состоит в том, что в двух родительских хромосомах случайным образом выбирается некоторая позиция (рис. 5.95), затем происходит обмен генетической информацией, расположенной справа от выбранной позиции.
- После выполнения генетического алгоритма производят декодирование двоичного представления в инженерные величины.
- Оценка приспособленности хромосом в популяции для оценки коэффициентов ПИД-регулятора может быть выбрана, к примеру, по интегральному критерию.
- Селекция хромосом осуществляется методом рулетки. На колесе рулетки имеются секторы, причем ширина сектора пропорциональна функции приспособленности. Поэтому чем больше значение этой функции, тем более вероятен отбор соответствующей ей хромосомы.



**Рис. 5.94.** Пример кодирования коэффициентов регулятора для использования в генетическом алгоритме



**Рис. 5.95.** Пример операции скрещивания

$$J = \frac{1}{\int_0^t t|e(t)| dt}$$