



Томский политехнический университет ФТИ

Адрес: пр. Ленина, 43, г.Томск, Россия, 634034

tyurin@fnsm.tpu.edu.ru,

Тел. 8-3822-563-621

Факс 8-3822-563-403

Тема: МЕХАНИКА

Содержание лекции:

1. Введение

2. КИНЕМАТИКА

2.1. Введение

2.2. Векторные величины

2.3. Кинематика поступательного движения материальной точки

2.4. Мгновенная скорость

2.5. Ускорение

2.6. Кинематика вращательного движения

1. Введение

Механика – часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.



Механическое движение – это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.



Развитие механики как науки начинается с III в. до н.э., когда древнегреческий ученый *Архимед* (287 – 212 г.г. до н.э.) сформулировал закон *равновесия рычага* и законы *равновесия плавающих тел*. Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Г. Галилеем и окончательно сформулированы английским ученым И. Ньютоном.

Механика Галилея – Ньютона называется *классической механикой*, т.е. она рассматривает *движение микроскопических тел* со скоростями, значительно меньшими скорости света в вакууме.

2. Кинематика движения материальной точки.

2.1. Введение

Кинематика (от греческого слова *kinēma* – движение) – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил. Исходными понятиями в кинематике являются такие фундаментальные физические понятия, как *пространство и время*. Пространство выражает порядок сосуществования отдельных физических объектов. Время – порядок смены явлений.

Свойства пространства и времени задаются не философскими теориями, а являются предметом естественно-научного исследования. Такие общие свойства пространства и времени были установлены. При движении тела со скоростями много меньшими скорости света ($c = 299792458 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$) *пространство является евклидовым и время течет одинаково во всех системах отсчета – область классического поведения физических объектов.*

Пространство однородно и изотропно – в пространстве нет выделенных положений и направлений. Все точки пространства равноправны и все направления эквивалентны.

Однородность времени означает, что все моменты времени эквивалентны и нет какого-либо выделенного начала отсчета для протекания любого физического явления. Время однонаправлено и протекает из прошлого в будущее. При скоростях движения, близких к скорости света, пространство и время образуют единый четырехмерный пространственно-временной континуум. При больших скоростях движения, близких к $3 \cdot 10^8$ м/с, размеры предметов и временной интервал между событиями не являются инвариантами и зависят от выбора системы отсчета.

2.2. Векторные величины

Рассматривая движение на плоскости, приходится складывать и вычитать перемещения, которые не всегда бывают направленными в одну и ту же сторону. Для упрощения этих действий пользуются математическим понятием вектора. Вектор представляет собой математическую величину, характеризуемую длиной и направлением. Пусть за время Δt шарик пролетел расстояние Δx по горизонтали и Δy по вертикали. Тогда полное линейное перемещение шарика за время Δt запишется в виде

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Величина Δr определяет величину вектора перемещения $\Delta \mathbf{r}$.

На рис. 2.2 показано, как складываются два вектора. Вектор \mathbf{s}_1 представляет собой перемещение из точки A в точку B , а \mathbf{s}_2 – перемещение из точки B в точку C . Результирующее перемещение из A в C \mathbf{s} представляет собой векторную сумму $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$. Из рис. 2.2 мы видим, что

$$s_x = s_{1x} + s_{2x}, \quad s_y = s_{1y} + s_{2y}.$$

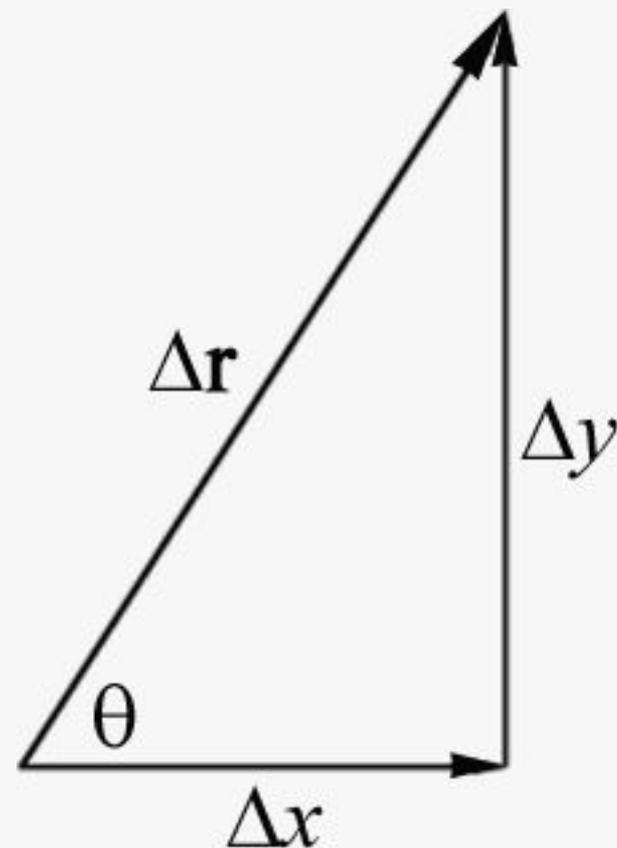


Рис. 2.1. Соотношение между полным перемещением $\Delta \mathbf{r}$ и его составляющими Δx , Δy по осям x и y

Вектор s_1

представляет собой перемещение из точки A в точку B , а s_2 – перемещение из точки B в точку C .

Результирующее перемещение из A в C s представляет собой векторную сумму $s_1 + s_2$.

$$s_x = s_{1x} + s_{2x}, \quad s_y = s_{1y} + s_{2y}.$$

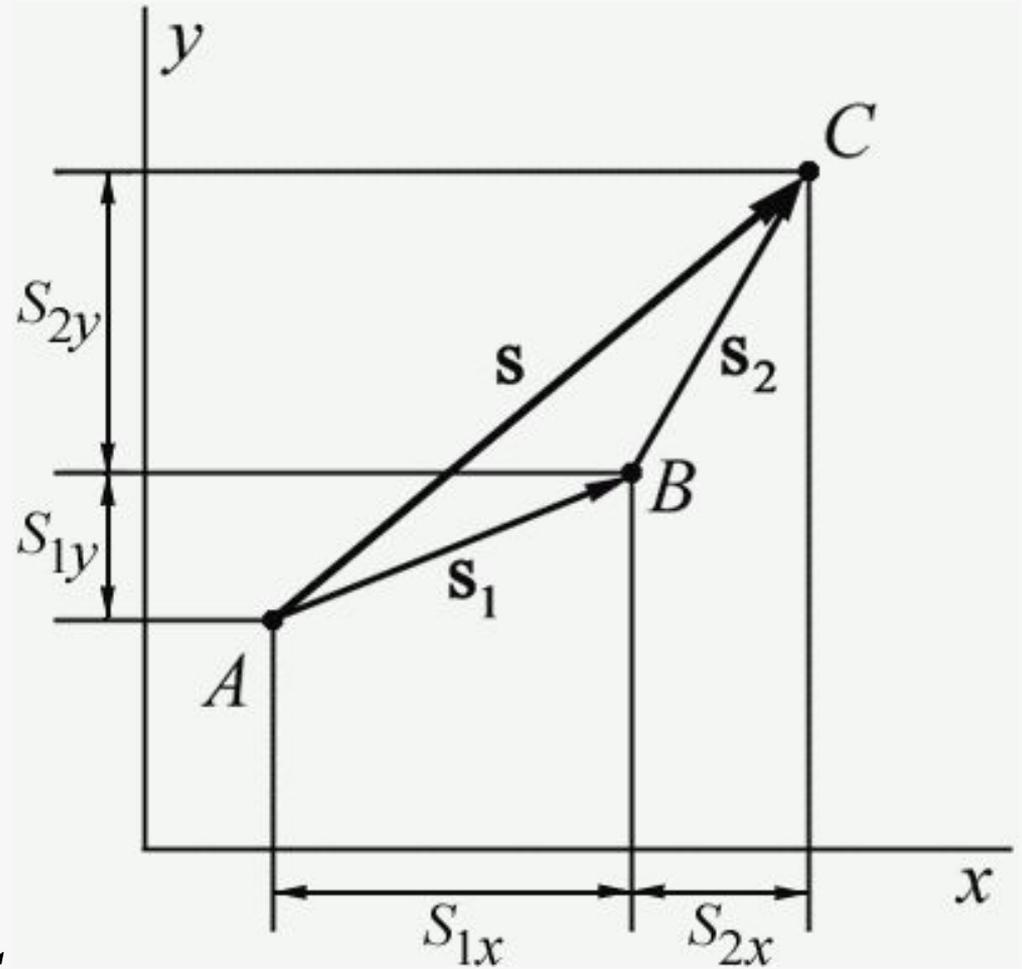


Рис. 2.2. Сложение двух векторов путем совмещения начала второго вектора с концом первого

В учебниках векторы обозначаются жирными буквами, например \mathbf{s} , а длины векторов – светлыми курсивными буквами, например s , либо в виде $|\mathbf{s}|$. В конспектах вектора удобнее обозначать стрелкой над буквой \mathbf{s} . Длина вектора всегда положительна. Векторное уравнение $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ представляет собой сокращенную форму записи приведенных выше двух уравнений $s_x = s_{1x} + s_{2x}$, $s_y = s_{1y} + s_{2y}$.

Отметим, что если векторы \mathbf{s}_1 и \mathbf{s}_2 не являются параллельными, то для суммы $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ справедливо неравенство $s < s_1 + s_2$. Более того, иногда величина s может оказаться меньше любого из ее слагаемых. Такой случай показан на рис. 2.3.

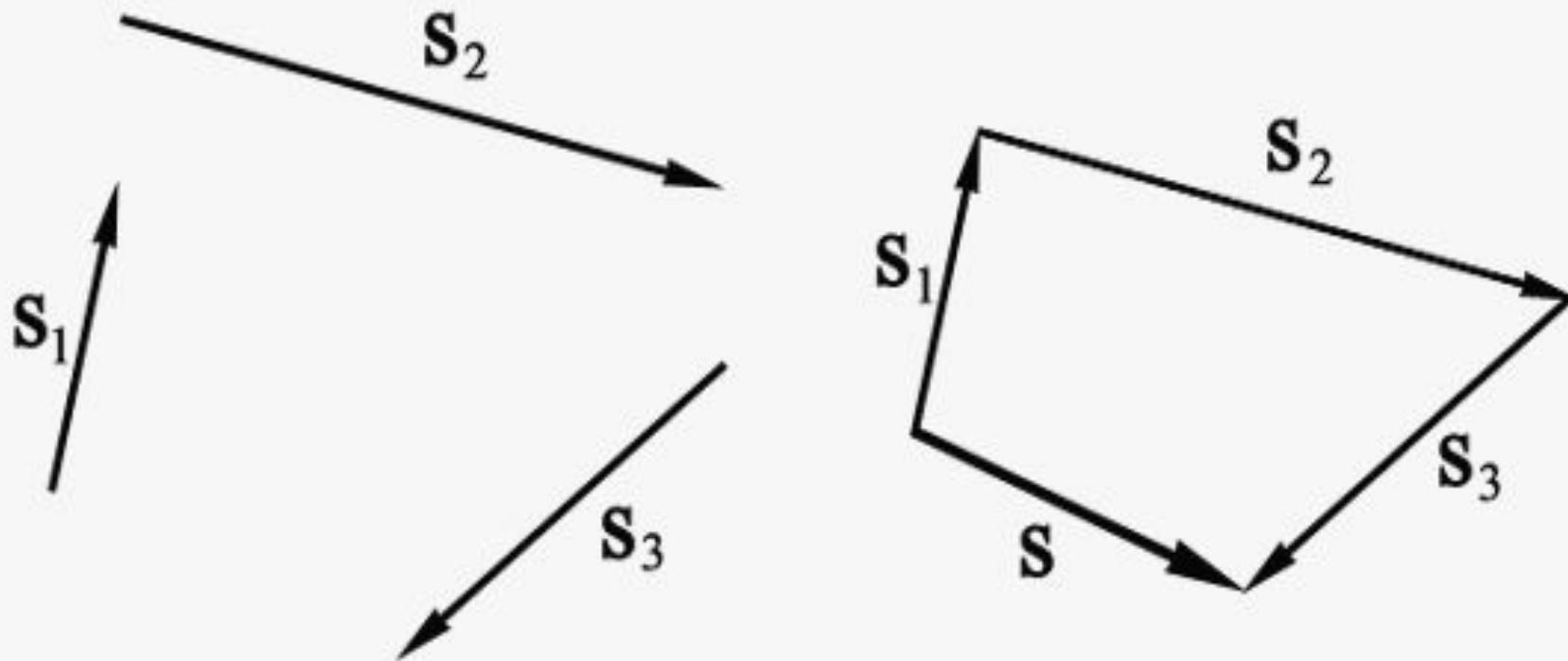


Рис. 2.3. Применение правила многоугольника к определению суммы

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3$$

В физике часто приходится иметь дело с векторными величинами. К ним относятся перемещение тела, скорость, ускорение, сила, импульс, момент импульса, момент силы, электрическое поле, магнитное поле и плотность тока.

Если вектор умножить (или разделить) на число, то результирующая величина также будет вектором. Например, при делении перемещения $\Delta \mathbf{r}$ на Δt получаем вектор скорости:

$$\mathbf{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \text{ (определение скорости).}$$

При делении вектора $\Delta \mathbf{v}$ на Δt получаем вектор ускорения:

$$\mathbf{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \text{ (определение ускорения)}$$

(символ “ \equiv ” означает здесь “по определению”).

Произвольный вектор \mathbf{r} можно задать тремя его составляющими x , y , z . Общепринята следующая запись:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z,$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – единичные векторы, направленные вдоль осей x , y , z соответственно. Например, как показано на рис. 2.4, вектор \mathbf{i} имеет единичную длину и направлен вдоль оси x .

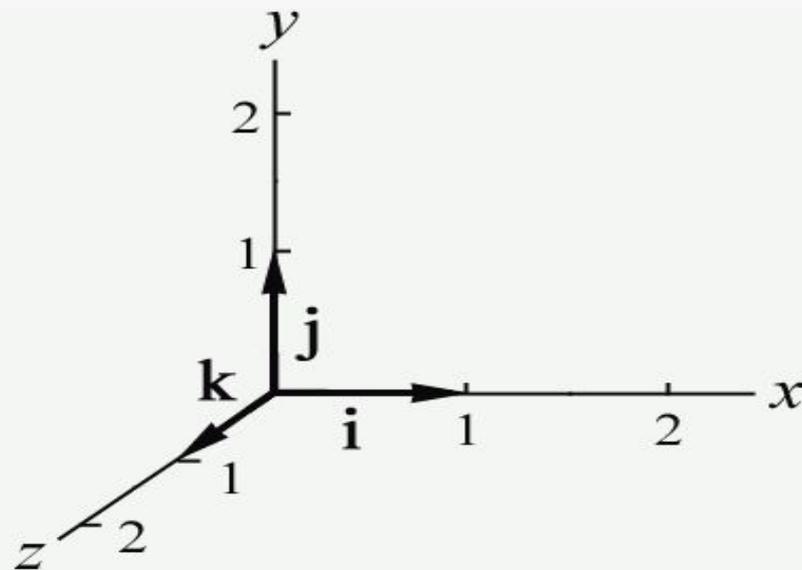


Рис. 2.4. Три единичных вектора \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k}

2.3. Кинематика поступательного движения материальной точки

В классической кинематике рассматривается движение материальной точки в евклидовом пространстве с абсолютным временем, единым для всех систем отсчета.

Материальная точка – физический объект, размерами которого можно пренебречь по сравнению с пройденным расстоянием. Например, радиус Земли $R = 6,4 \cdot 10^6$ м, радиус орбиты Земли $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ м. То есть Землю можно рассматривать в качестве точки на околосолнечной орбите.

Кинематика точки является основой изучения движения тел произвольных линейных размеров.

Выберем прямоугольную систему координат. Положение точки относительно данной системы отсчета задается *радиус-вектором* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, т.е. набором трех проекций координат точки на оси x , y , z , как функций времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t),$$

В международной системе СИ, \mathbf{r} измеряется в метрах (м). Линия, описывающая изменение положения конца радиус-вектора \mathbf{r} со временем, называется *траекторией* движения (рис. 2.5).

Вектор, соединяющий начальную точку (1) движения с конечной (2), называется *перемещением* $\Delta \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. *Путь* – расстояние, пройденное точкой вдоль траектории движения S , величина скалярная.

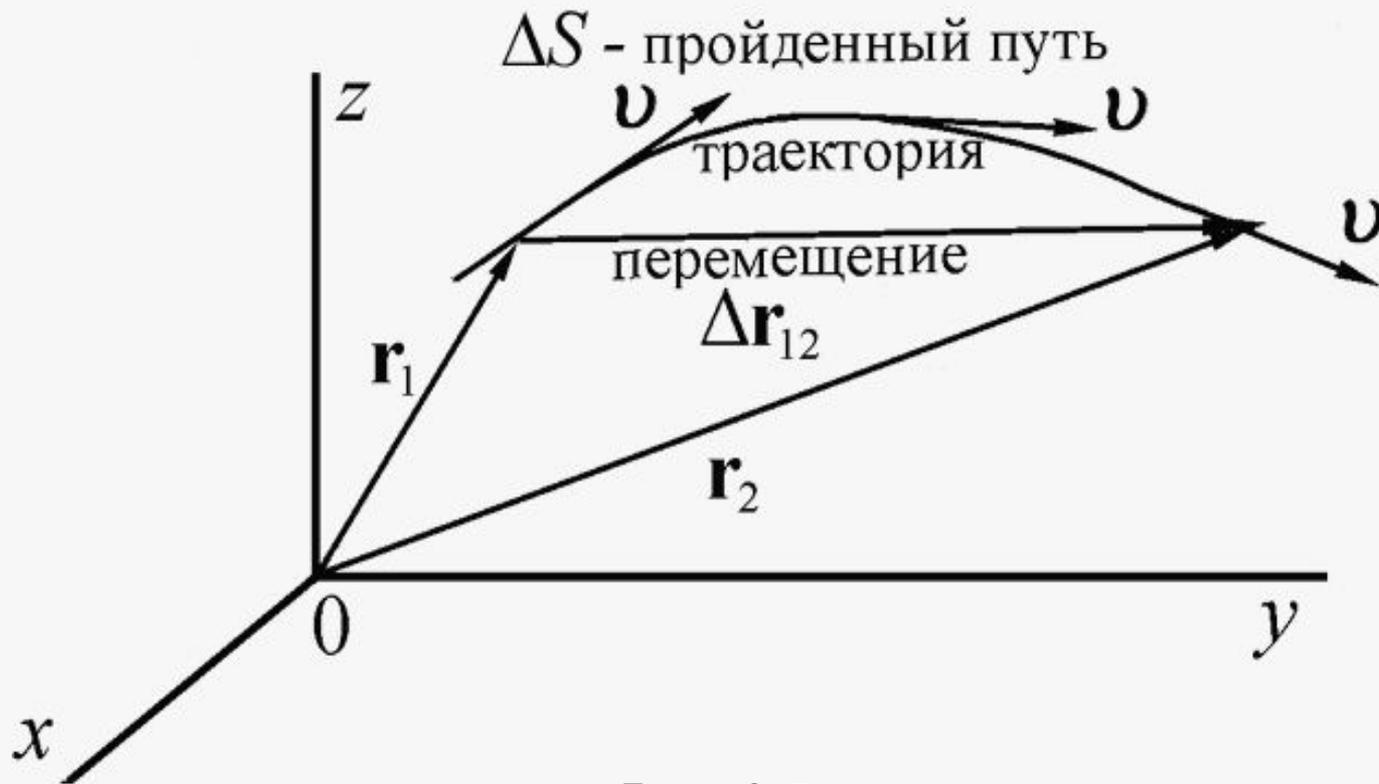


Рис. 2.5.

2.4. Мгновенная скорость

Скорость – это быстрота изменения положения тела в пространстве. Мгновенной скоростью называют величину, равную производной от радиус-вектора тела по времени

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dx(t)}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy(t)}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz(t)}{dt} = \mathbf{i} v_x + \mathbf{j} v_y + \mathbf{k} v_z$$

Производная равна скорости изменения функции при изменении аргумента. Через v_x , v_y , v_z обозначены проекции вектора скорости на

оси x , y , z

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Вектор скорости \mathbf{v} направлен по касательной к траектории движения. Величина вектора скорости в каждой точке траекторий равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Время в СИ измеряется в секундах, длина в метрах, скорость в [метрах за секунду] = [м/с].

Средняя величина скорости точки равна отношению пути ΔS ко времени t , за который этот путь пройден:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} .$$

Здесь S – пройденный путь за время t .

Средний вектор скорости определяется как отношение вектора перемещения \mathbf{r} ко времени t , за которое это перемещение произошло

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t},$$

где

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{i}(x_2 - x_1) + \mathbf{j}(y_2 - y_1) + \mathbf{k}(z_2 - z_1),$$
$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

В случае движения с малыми скоростями, много меньшими скорости света, скорость тела, участвующего одновременно в нескольких движениях, может быть найдена по правилу сложения векторов

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

где \mathbf{v}_1 – скорость тела относительно системы отсчета K_1 , \mathbf{v}_2 – скорость движения системы K_1 относительно "неподвижной" системы K_2 .

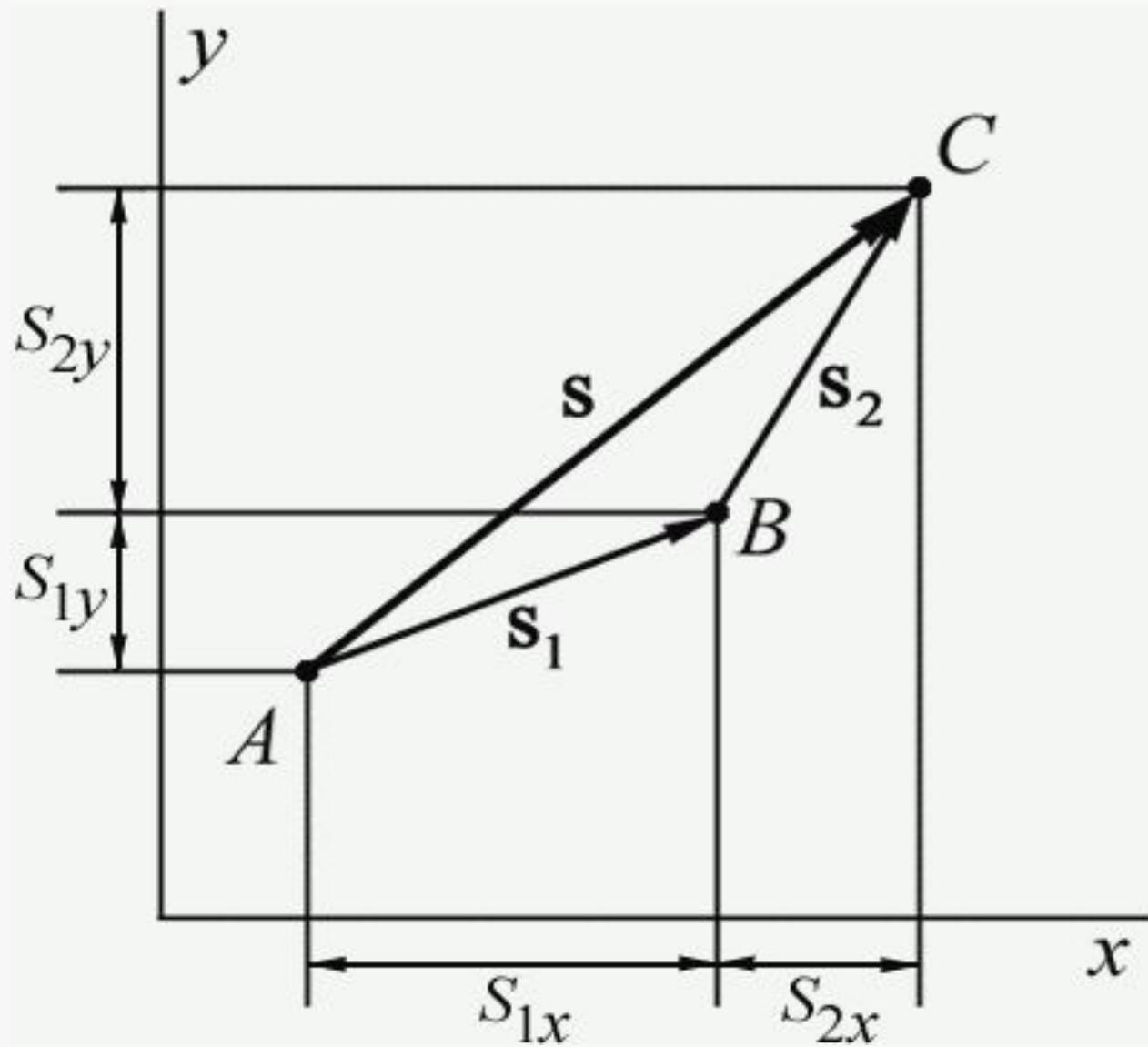
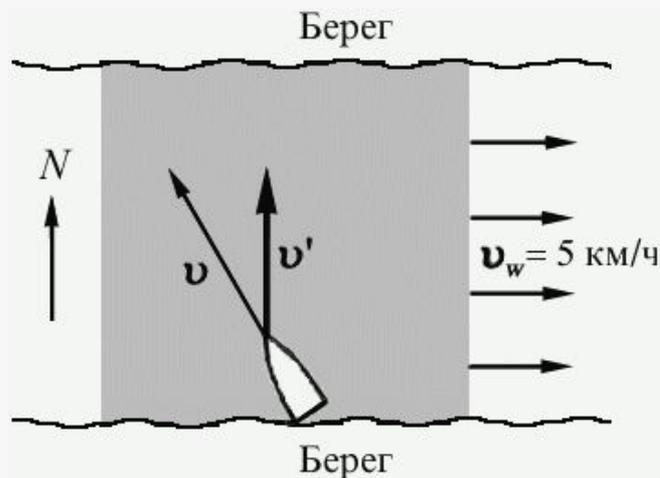


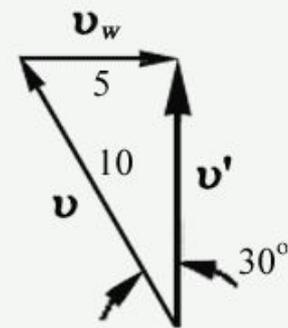
Рис. 2.6.

Векторное сложение скоростей можно продемонстрировать на примере лодки, перемещающейся в движущейся воде. Обозначим через $\Delta \mathbf{r}$ перемещение лодки относительно воды и через $\Delta \mathbf{r}_w$ перемещение воды относительно берега за одно и то же время Δt . Тогда для перемещения $\Delta \mathbf{r}'$ лодки относительно берега имеем $\Delta \mathbf{r}' = \Delta \mathbf{r}_w + \Delta \mathbf{r}$. Разделив обе части этого выражения на Δt , получим

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_w + \mathbf{v}.$$



а



б

В приводимом примере через v обозначена скорость лодки в системе отсчета (в системе координат), которая покоится относительно воды. Эту скорость измеряют те, кто находится на борту лодки, если они не видят берегов. Наблюдатель в другой системе отсчета, а именно связанной с берегом, видит иную скорость движения лодки v' , которая дается написанным выше соотношением.

Пусть, например, лодка пытается пересечь реку, текущую, как показано на рис. 2.7, на восток со скоростью 5 км/ч. Рулевому известна скорость лодки относительно воды: 10 км/ч. Как надо править, чтобы паром двигался поперек реки, и какой будет скорость парома относительно берега?

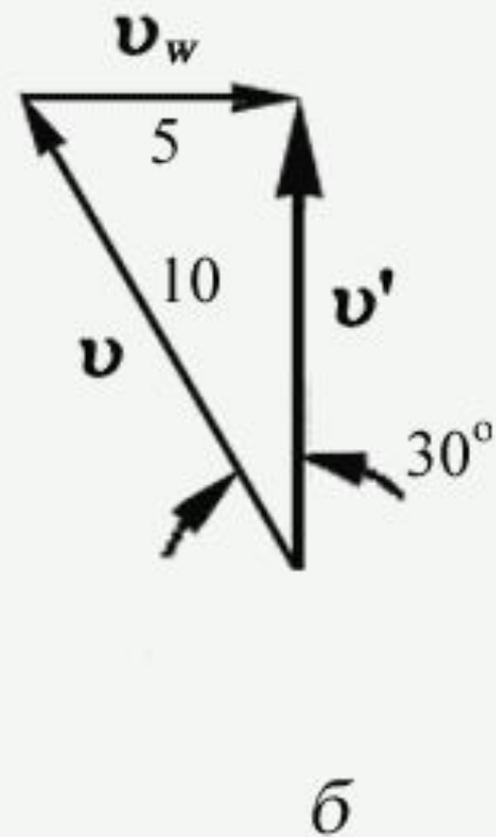
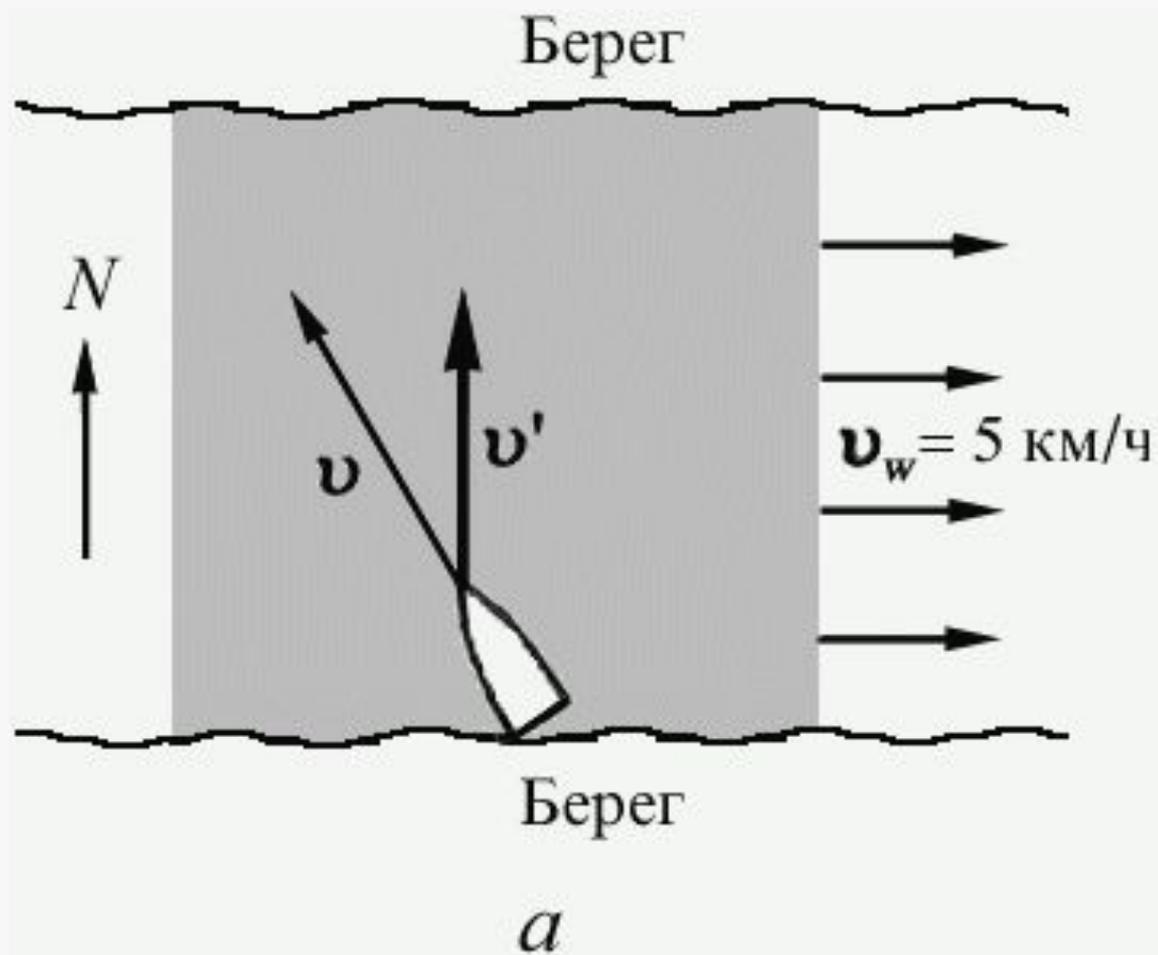


Рис. 2.7.

Обозначим через \mathbf{v} вектор скорости парома относительно воды, а через \mathbf{v}_w – скорость воды. На рис. 2.7, б показан треугольник, составленный из этих векторов. Один угол в этом треугольнике прямой, а два других равны 30° и 60° , поскольку гипотенуза треугольника в два раза длиннее одного из катетов. Следовательно, рулевой должен держать курс под углом 30° к северо-западу. Величина вектора \mathbf{v}' равна $10 \text{ км/ч} \cdot \cos 30^\circ$, т.е. $8,66 \text{ км/ч}$. Заметим, что она меньше суммы величин слагаемых: $8,66 < 10 + 5 \text{ км/ч}$.

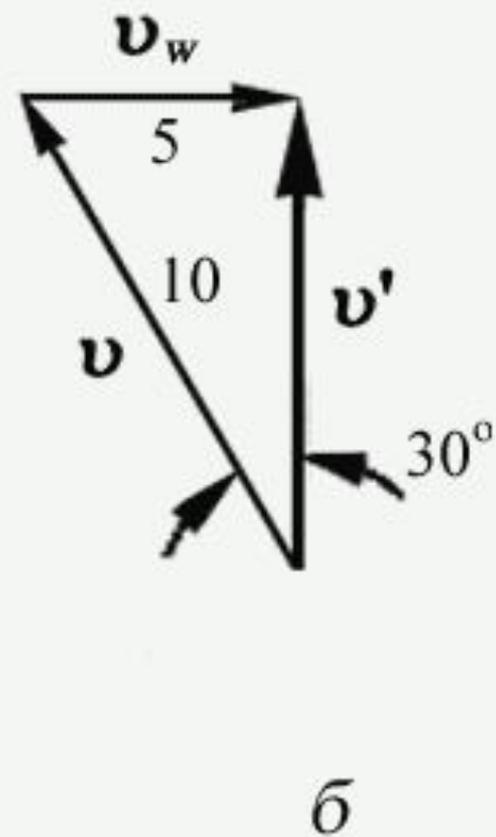
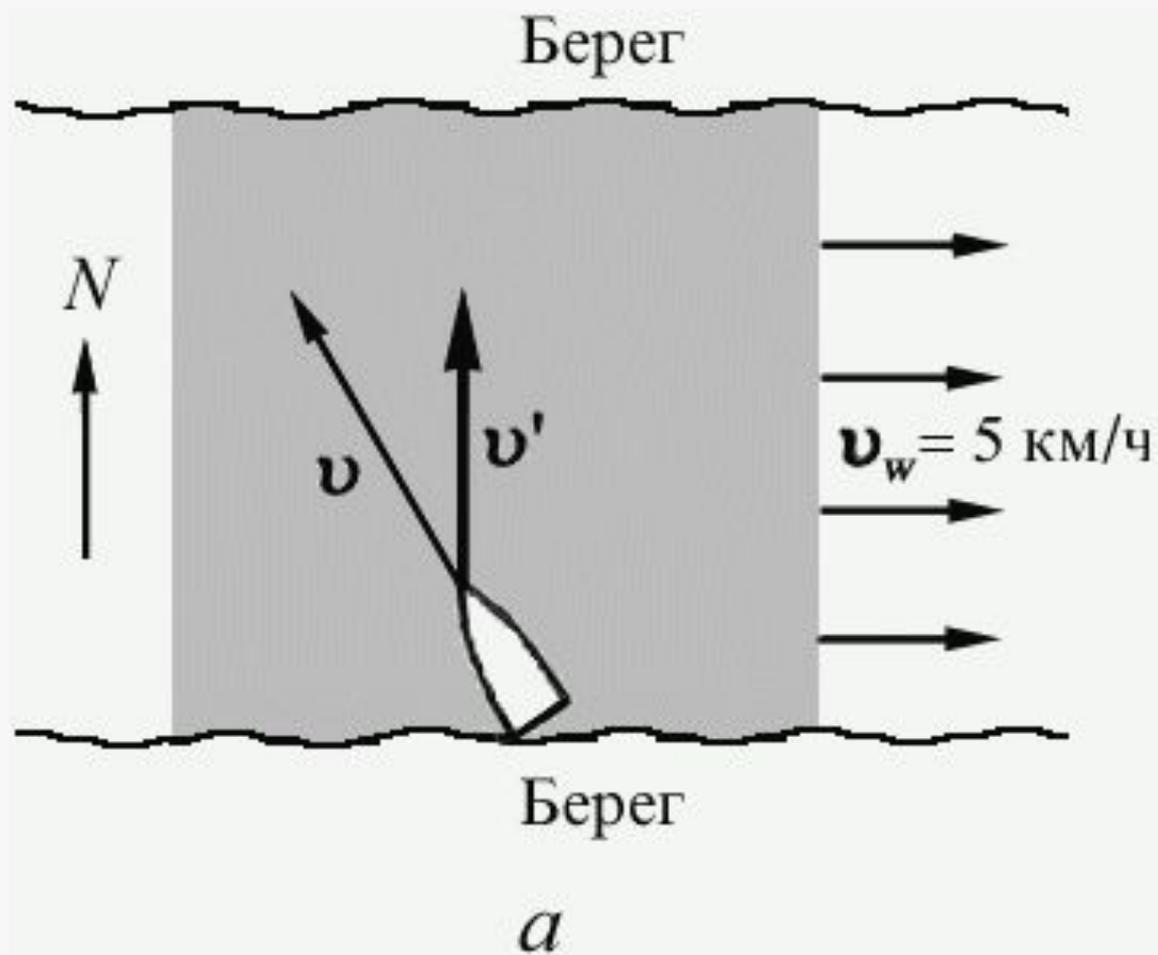


Рис. 2.7.

2.5. Ускорение

Ускорением называется физическая величина, равная скорости изменения скорости – первая производная от \mathbf{v} по t или вторая производная от \mathbf{r} по t :

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i} \frac{d^2 x}{dt^2} + \mathbf{j} \frac{d^2 y}{dt^2} + \mathbf{k} \frac{d^2 z}{dt^2} = \mathbf{i} a_x + \mathbf{j} a_y + \mathbf{k} a_z$$

Поскольку скорость – векторная величина, а вектор задается своим модулем – длиной

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

и направлением, то и изменяться вектор \mathbf{v} со временем может двумя способами: по величине и по направлению.

Изменение величины вектора скорости точки со временем определяет ее *тангенциальное ускорение* (рис. 2.8):

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} \boldsymbol{\tau}.$$

Изменение направления вектора скорости материальной точки со временем определяет ее *нормальное ускорение* (рис. 2.8):

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\tau = \frac{v^2}{R} \mathbf{n}$$

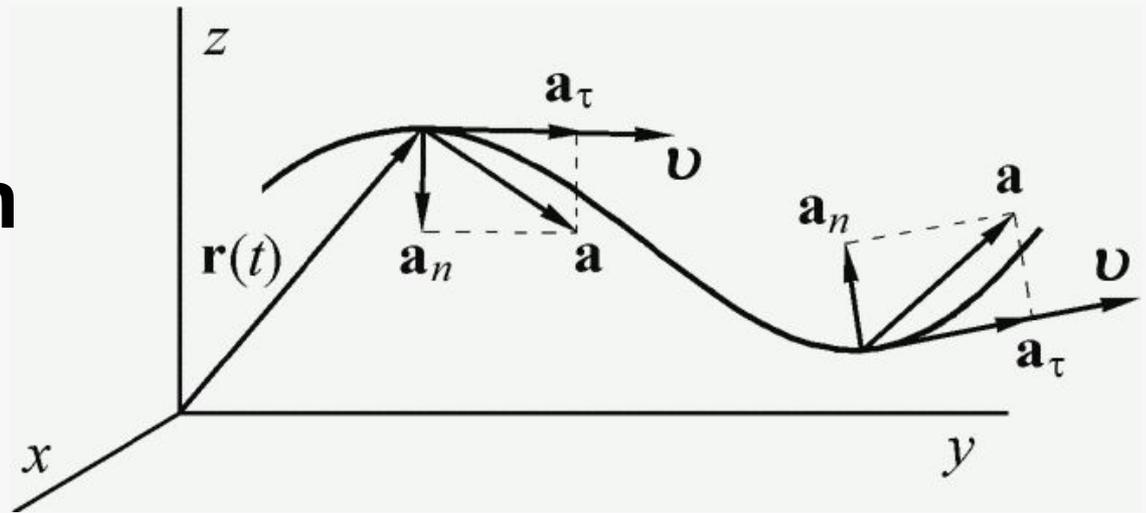


Рис. 2.8.

Здесь: $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, направленный параллельно вектору скорости \mathbf{v} , т.е. по касательной к траектории движения

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|};$$

\mathbf{n} – вектор нормали, перпендикулярный вектору $\boldsymbol{\tau}$, т.е. $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) = 0$, где круглые скобки означают скалярное произведение векторов;

R – радиус кривизны траектории движения в точке, где определяется скорость движения – радиус окружности касательной в данной точке к искривленной траектории движения. Чем меньше радиус окружности, тем сильнее кривизна траектории в данной точке, тем быстрее изменяется вектор скорости по направлению, тем больше нормальное ускорение.

По определению, имеем: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau$, $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

2.6. Кинематика вращательного движения

По аналогии с линейной скоростью и ускорением вводятся *угловая скорость* и *угловое ускорение*. Эти понятия относятся к случаю движения материальной точки по окружности. Положение точки A на окружности можно задать углом, который образует радиус-вектор \mathbf{r} с неизменным направлением оси x (рис. 2.9). Величина угловой скорости точки равна углу поворота радиус-вектора точки в единицу времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$$

Вращение называется равномерным, если угловая скорость ω постоянна, в этом случае угол поворота линейно растет со временем: $\phi = \phi_0 + \omega t$.

При равномерном вращении ω называют циклической частотой вращения. Величина $\frac{\omega}{2\pi} = \nu$ дает число оборотов в единицу времени и называется частотой вращения.

Пусть точка A движется по окружности постоянного радиуса r с постоянной угловой скоростью ω , найдем связь между линейной и угловой скоростью.

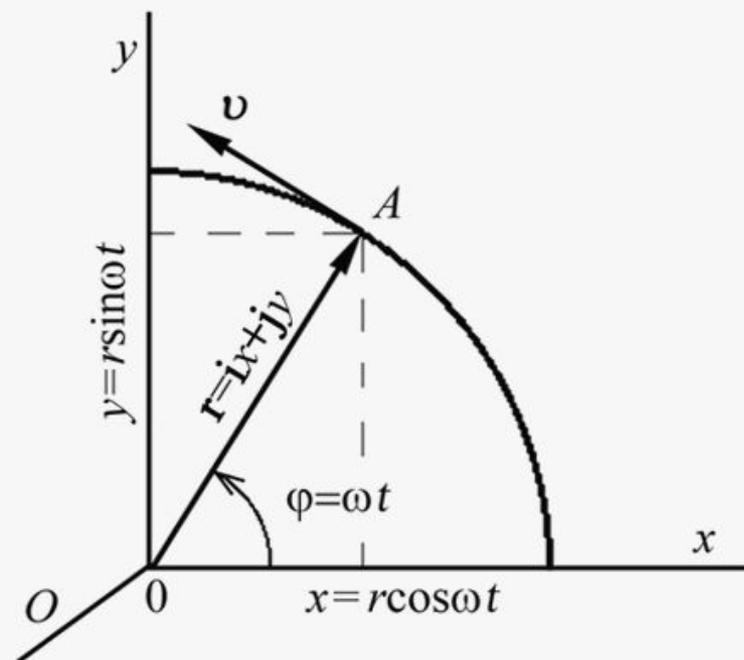


Рис. 2.9.

Движение точки по круговой траектории описывается уравнением

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) = r(\mathbf{i} \cdot \cos\omega t + \mathbf{j} \cdot \sin\omega t),$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} – единичные векторы, направленные вдоль осей x и y соответственно.

Вектор скорости материальной точки, движущейся по окружности неизменного радиуса с постоянной скоростью, равен

$$\mathbf{v} = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{\substack{r=\text{const} \\ \omega=\text{const}}} = \omega r [-\mathbf{i} \sin\omega t + \mathbf{j} \cos\omega t].$$

Вектор \mathbf{v} направлен по касательной к окружности, т.е. перпендикулярно \mathbf{r} , поскольку их скалярное произведение равно нулю $(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = 0$. Величина вектора скорости равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \cdot r$$

Найдем ускорение точки, равномерно вращающейся по окружности, и связанное только с изменением направления вектора скорости, т.е. нормальное ускорение

$$\mathbf{a}_n = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Big|_{\substack{r\omega=V=\text{const} \\ r=\text{const} \\ \omega=\text{const}}} = \omega^2 r [(\mathbf{i} \cdot \cos\omega t + \mathbf{j} \cdot \sin\omega t)] = -\omega^2 \mathbf{r}(t).$$

Нормальное ускорение направлено к центру окружности, о чем говорит знак «минус» ($-\mathbf{r}$). Величина нормального ускорения равна

$$a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}.$$

Это ускорение также называют центростремительным ускорением.

Если угловая скорость изменяется со временем, то имеем для скорости точки, вращающейся по окружности,

$$\mathbf{r} = r(\mathbf{i}\cos\phi + \mathbf{j}\sin\phi),$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r \frac{d\phi}{dt} (-\mathbf{i}\sin\phi + \mathbf{j}\cos\phi)$$

Вектор скорости \mathbf{v} и в этом случае перпендикулярен радиус-вектору \mathbf{r} , так как скалярное произведение данных векторов равно нулю $(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = 0$.

Величина линейной скорости определяется соотношением

$$v = \frac{dr}{dt} = r \frac{d\phi}{dt}$$

- произведение величины радиуса кривизны траектории в данной точке на угловую скорость вращения тела.
- полное ускорение точки, вращающейся с переменной угловой скоростью по окружности, по определению, равно

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} (-\mathbf{i} \sin\varphi + \mathbf{j} \cos\varphi) - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 (\mathbf{i} \cos\varphi + \mathbf{j} \sin\varphi) =$$

$$= r \frac{d\omega}{dt} \frac{\mathbf{v}}{v} - r\omega^2 \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n .$$

Оно складывается из тангенциального ($\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}/v$)

$$\mathbf{a}_\tau = r \frac{d\omega}{dt} \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{v} \right) = r\varepsilon\boldsymbol{\tau}$$

и нормального ($\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$); $\mathbf{a}_n = -\left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) r\omega^2 = -r\omega^2 \mathbf{n}$ ускорений.

Вектор \mathbf{a}_τ направлен по касательной к окружности – параллельно вектору \mathbf{v} , а вектор \mathbf{a}_n направлен к центру окружности – антипараллельно вектору \mathbf{r} .

Величина $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ (рад/с²) называется угловым ускорением и характеризует изменение угловой скорости в единицу времени.

Определим величину нормального ускорения тела на экваторе, обусловленного вращением Земли. В данном случае угловая скорость вращения ω равна $\frac{2\pi R}{T}$ где T – период обращения Земли вокруг оси, $T = 1$ сут = $8,64 \cdot 10^4$ с и R – радиус Земли, $R = R_3 = 6370$ км. Подставляя данные значения T и R в формулу для нормального ускорения, получаем

$$a_n = \frac{4\pi^2 (6,37 \cdot 10^6)}{(8,64 \cdot 10^4)^2} \text{ м/с}^2 = 0,034 \text{ м/с}^2.$$

Это всего лишь 0.35% от величины $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. Таким образом, если бы Земля была идеально сферической, то на экваторе человек был бы на 0.35% легче, чем около полюса. Это одна из причин, объясняющих, почему в более высоких широтах труднее побить спортивные рекорды, чем на экваторе.

Угловая скорость и угловое ускорение являются в общем случае векторами. Связь между вектором угловой ω и линейной скорости v задается с помощью векторного произведения

$$\mathbf{v} = [\omega, \mathbf{r}].$$

Вектор угловой скорости ω направлен перпендикулярно плоскости вращения, в сторону, определяемую правилом буравчика – если вращать буравчик по направлению движения точки, то его поступательное движение укажет направление вектора ω .

По направлению вектор углового ускорения ε совпадает с вектором угловой скорости при ускоренном вращении ($d\omega/dt > 0$) и противоположно ему при замедленном вращении ($d\omega/dt < 0$).

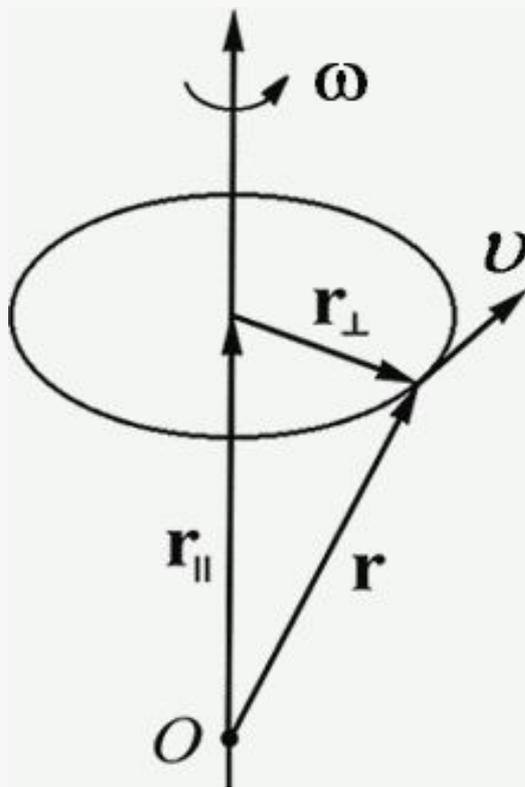


Рис. 2.10.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Движение с постоянной скоростью описывается уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$$

Мгновенная скорость

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Мгновенное ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Полное ускорение складывается

из нормального $\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{n}$ и тангенциального $\mathbf{a}_\tau = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} \boldsymbol{\tau}$

ускорений

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau.$$

Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$

угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Связь между нормальным и тангенциальным ускорением и угловыми кинематическими характеристиками:

$$\mathbf{a}_n = -\omega^2 r \mathbf{n},$$

$$\mathbf{a}_\tau = r \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\tau}.$$

Прямая задача кинематики: по известному $r=f(t)$ найти $v, a=f(t)$.

Обратная задача кинематики: по известному $a=f(t)$ найти $r=f(t)$.

Лекция окончена

Нажмите клавишу <ESC> для выхода