Томский политехнический университет ФТИ

Адрес: пр. Ленина, 43, г.Томск, Россия, 634034
tyurin@fnsm.tpu.edu.ru,
Тел. 8-3822-563-621
Факс 8-3822-563-403

Сегодня: воскресенье, 30 октября 2016 г.

Лекция 2

Тема: МЕХАНИКА

Содержание лекции:

1. Введение
2. КИНЕМАТИКА
   - 2.1. Введение
   - 2.2. Векторные величины
   - 2.3. Кинематика поступательного движения материальной точки
   - 2.4. Мгновенная скорость
   - 2.5. Ускорение
   - 2.6. Кинематика вращательного движения

1. Введение

Механика *– часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.*

Механическое движение *– это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.*

Развитие механики как науки начинается с III в. до н.э., когда древнегреческий ученый *Архимед (287 – 212 г.г. до н.э.)* сформулировал *закон равновесия рычага* и законы *равновесия плавающих тел*. Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Г. Галилеем и окончательно сформулированы английским ученым И. Ньютоном.

Механика Галилея – Ньютона называется *классической механикой*, т.е. она рассматривает *движение микроскопических тел* со скоростями, значительно меньшими скорости света в вакууме.

2. Кинематика движения материальной точки.

2.1. Введение

Кинематика (от греческого слова kinēma – движение) – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил. Исходными понятиями в кинематике являются такие фундаментальные физические понятия, как ***пространство и время***. Пространство выражает порядок сосуществования отдельных физических объектов. Время – порядок смены явлений.

Свойства пространства и времени задаются не философскими теориями, а являются предметом естественно-научного исследования. Такие общие свойства пространства и времени были установлены. При движении тела со скоростями много меньшими скорости света (c = 299792458 $\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$) *пространство* является ***евклидовым*** *и время течет одинаково во всех системах отсчета* – *область классического поведения физических объектов*.

Пространство **однородно и изотропно** –

в пространстве нет выделенных положений и направлений. Все точки пространства равноправны и все направления эквивалентны.

Однородность времени означает, что все моменты времени эквивалентны и нет какого-либо выделенного начала отсчета для протекания любого физического явления. Время однонаправлено и протекает из прошлого в будущее. При скоростях движения, близких к скорости света, пространство и время образуют единый четырехмерный пространственно-временной континуум. При больших скоростях движения, близких к $3 \cdot 10^8$ м/с, размеры предметов и временной интервал между событиями не являются инвариантами и зависят от выбора системы отсчета.

2.2. Векторные величины

Рассматривая движение на плоскости, приходится складывать и вычитать перемещения, которые не всегда бывают направленными в одну и ту же сторону. Для упрощения этих действий пользуются математическим понятием вектора. Вектор представляет собой математическую величину, характеризуемую длиной и направлением. Пусть за время Δt шарик пролетел расстояние Δx по горизонтали и Δy по вертикали. Тогда полное линейное перемещение шарика за время Δt запишется в виде

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Величина Δr определяет величину вектора перемещения $\Delta \mathbf{r}$.

На рис. 2.2 показано, как складываются два вектора. Вектор $\mathbf{s}_1$ представляет собой перемещение из точки A в точку B, а $\mathbf{s}_2$ – перемещение из точки B в точку C. Результирующее перемещение из A в C $\mathbf{s}$ представляет собой векторную сумму $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$. Из рис. 2.2 мы видим, что

$$s_x = s_{1x} + s_{2x},\ s_y = s_{1y} + s_{2y}.$$

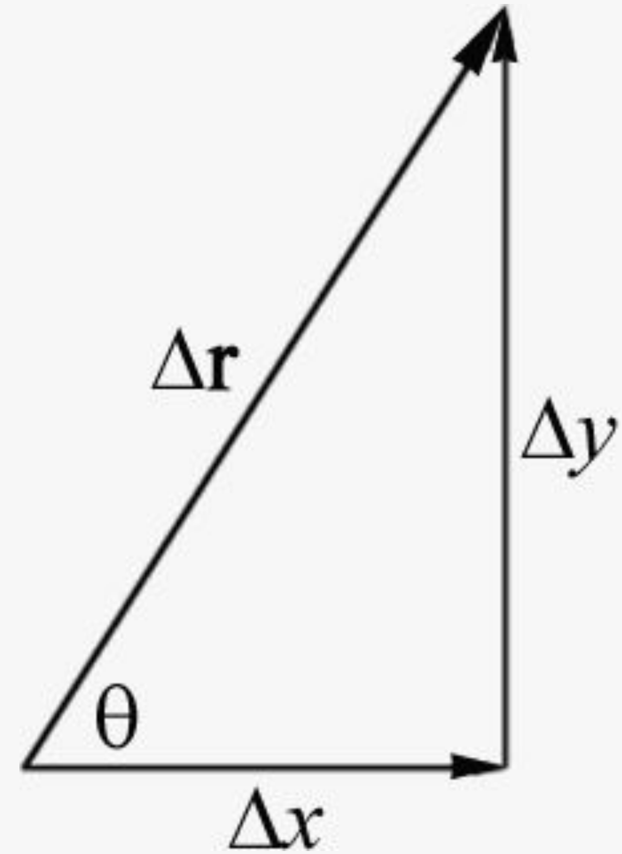
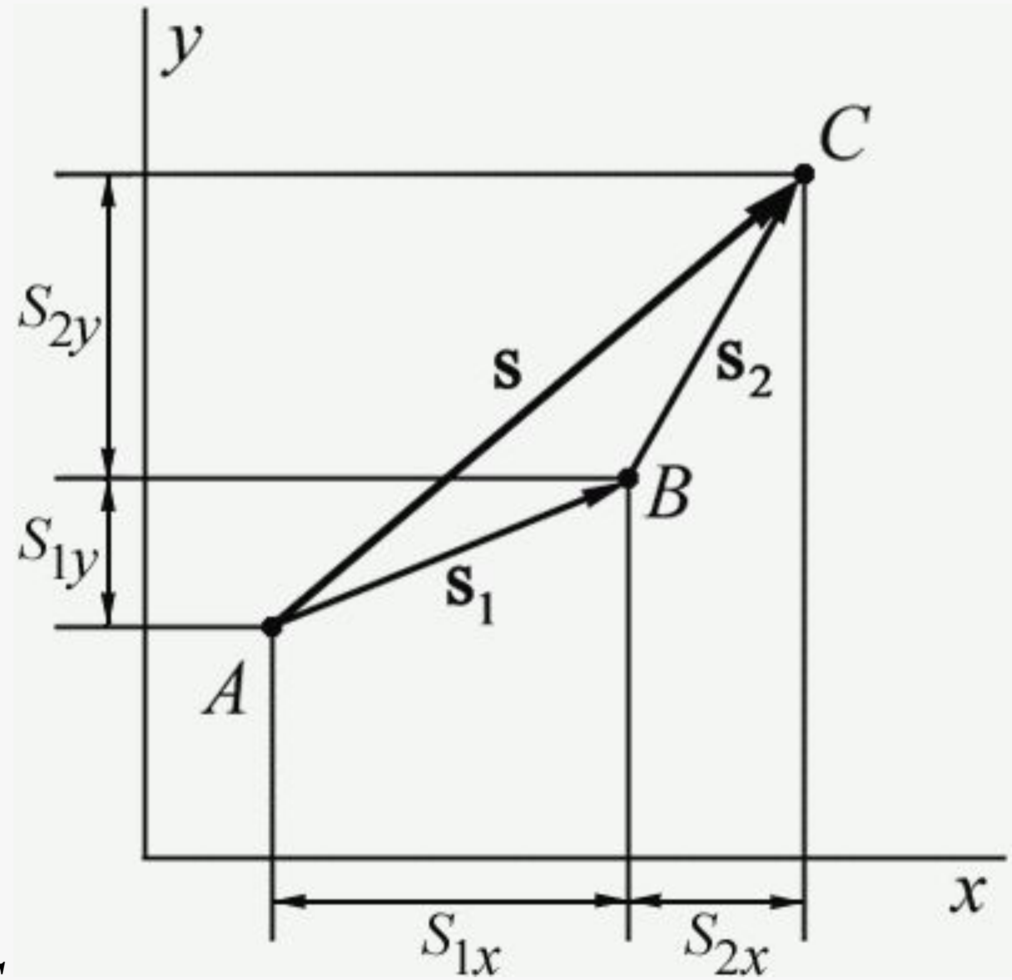


Рис. 2.1. Соотношение между полным перемещением *Δ**r*** и его составляющими *Δx*, *Δy* по осям *x* и *y*

Вектор **s**1

представляет собой перемещение из точки *A* в точку *B*, а **s**2 – перемещение из точки *B* в точку *C*. Результирующее перемещение из *A* в *C* **s** представляет собой векторную сумму **s**1 + **s**2.



$$s_x = s_{1x} + s_{2x},\ s_y = s_{1y} + s_{2y}.$$

Рис. 2.2. Сложение двух векторов путем совмещения начала второго вектора с концом первого

В учебниках векторы обозначаться жирными буквами, например **s**, а длины векторов – светлыми курсивными буквами, например *s*, либо в виде |**s**|. В конспектах вектора удобнее обозначать стрелкой над буквой а. Длина вектора всегда положительна. Векторное уравнение $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ представляет собой сокращенную форму записи приведенных выше двух уравнений $sx = s_{1x} + s_{2x}$, $s_y = s_{1y} + s_{2y}$.

Отметим, что если векторы $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ не являются параллельными, то для суммы $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ справедливо неравенство $\mathbf{s} < \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$. Более того, иногда величина **s** может оказаться меньше любого из ее слагаемых. Такой случай показан на рис. 2.3.

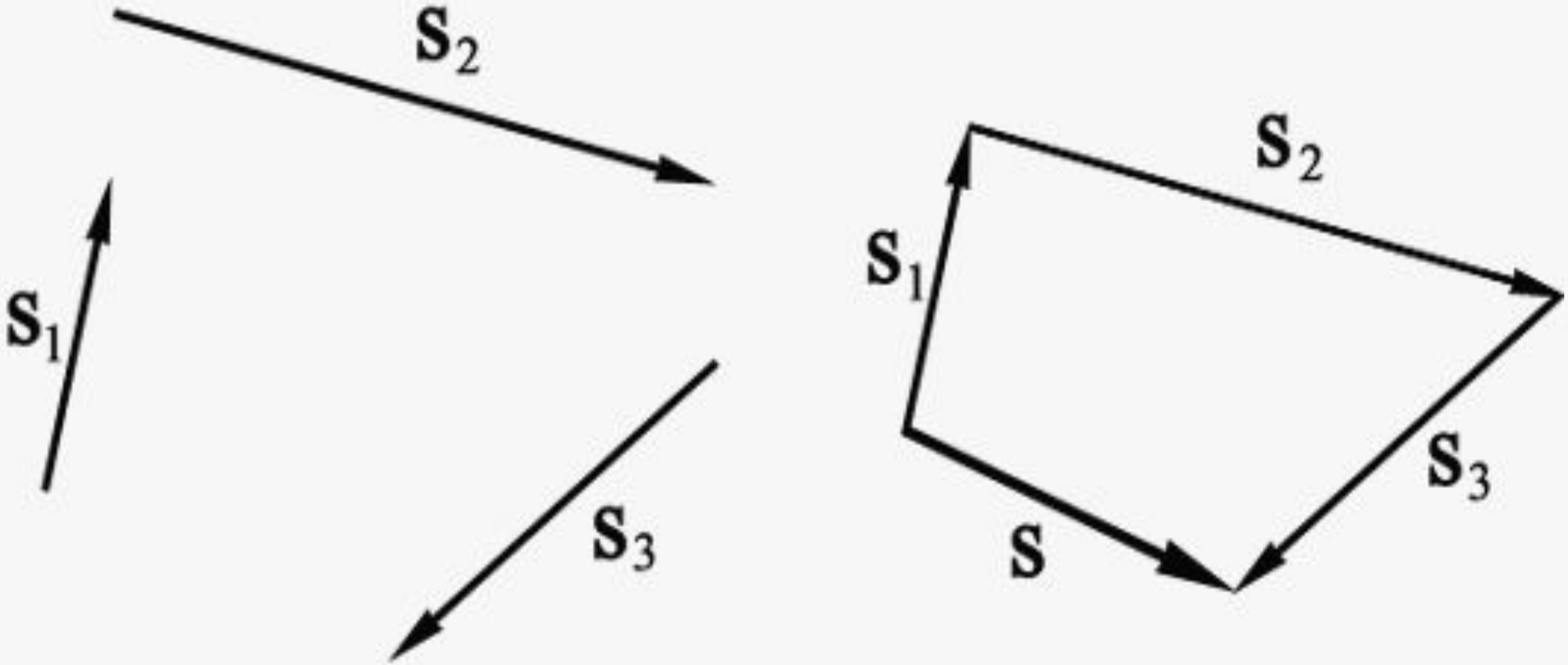


Рис. 2.3. Применение правила многоугольника к определению суммы

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3$$

В физике часто приходится иметь дело с векторными величинами. К ним относятся перемещение тела, скорость, ускорение, сила, импульс, момент импульса, момент силы, электрическое поле, магнитное поле и плотность тока.

Если вектор умножить (или разделить) на число, то результирующая величина также будет вектором. Например, при делении перемещения $\Delta\mathbf{r}$ на Δt получаем вектор скорости:

$$\boldsymbol{v} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \text{ (определение скорости).}$$

При делении вектора $\Delta\boldsymbol{v}$ на Δt получаем вектор ускорения:

$$\mathbf{a} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \text{ (определение ускорения)}$$

(символ “≡” означает здесь “по определению”).

Произвольный вектор **r** можно задать тремя его составляющими *x*, *y*, *z*. Общепринята следующая запись:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z,$$

где **i**, **j**, **k** – единичные векторы, направленные вдоль осей *x*, *y*, *z* соответственно. Например, как показано на рис. 2.4, вектор **i** имеет единичную длину и направлен вдоль оси *x*.

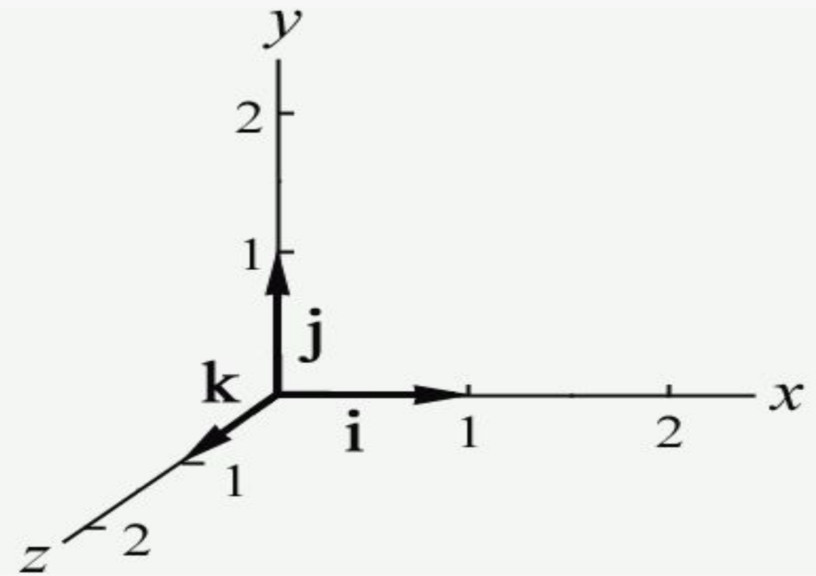


Рис. 2.4. Три единичных вектора ***i****,* ***j*** *и* ***k***

2.3. Кинематика поступательного движения материальной точки

В классической кинематике рассматривается движение материальной точки в евклидовом пространстве с абсолютным временем, единым для всех систем отсчета.

Материальная точка – физический объект, размерами которого можно пренебречь по сравнению с пройденным расстоянием. Например, радиус Земли $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, радиус орбиты Земли $r = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м. То есть Землю можно рассматривать в качестве точки на околосолнечной орбите.

Кинематика точки является основой изучения движения тел произвольных линейных размеров.

Выберем прямоугольную систему координат. Положение точки относительно данной системы отсчета задается *радиус-вектором* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, т.е. набором трех проекций координат точки на оси x, y, z, как функций времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t),$$

В международной системе СИ, $\mathbf{r}$ измеряется в метрах (м). Линия, описывающая изменение положения конца радиус-вектора $\mathbf{r}$ со временем, называется *траекторией* движения (рис. 2.5).

Вектор, соединяющий начальную точку (1) движения с конечной (2), называется *перемещением* $\Delta\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. ***Путь*** – расстояние, пройденное точкой вдоль траектории движения S, величина скалярная.

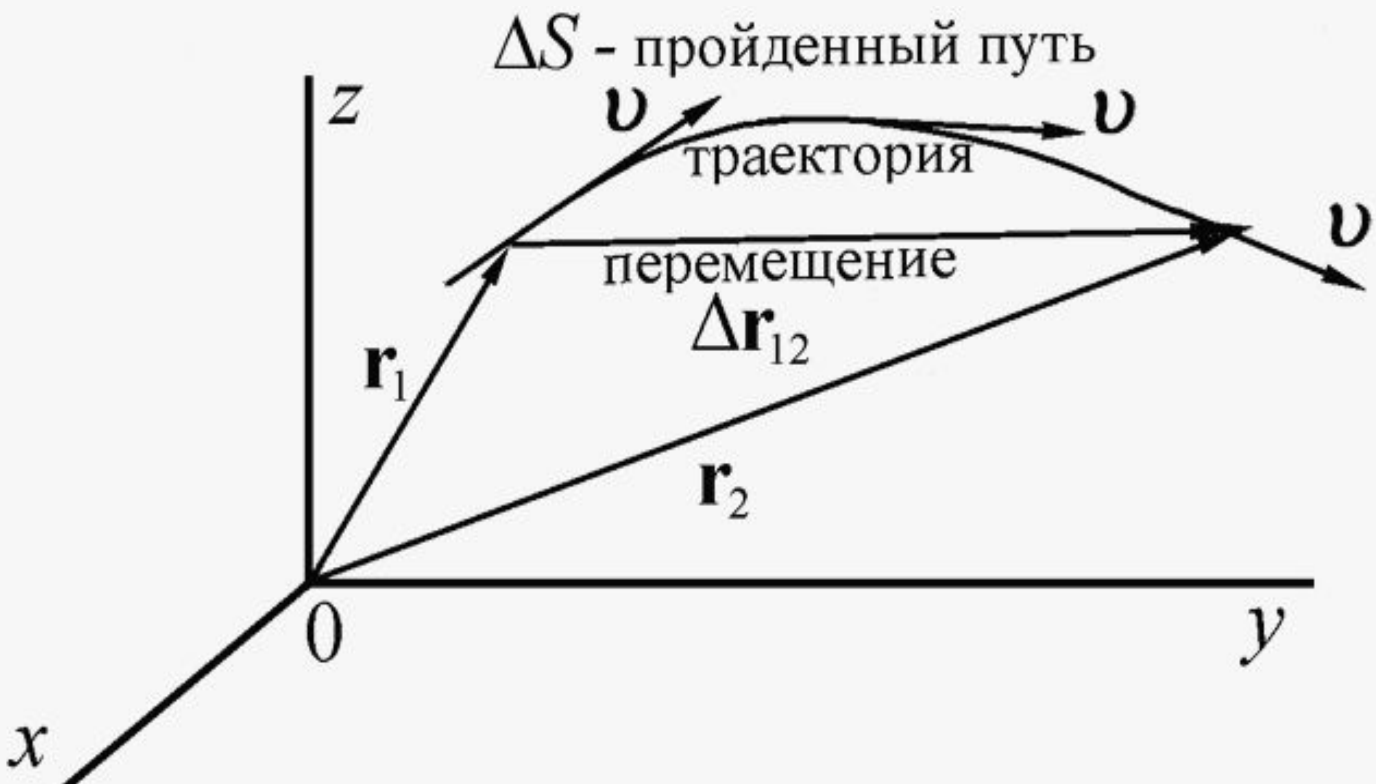


Рис. 2.5.

2.4. Мгновенная скорость

Скорость – это быстрота изменения положения тела в пространстве. Мгновенной скоростью называют величину, равную производной от радиус-вектора тела по времени

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\,\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}\frac{dx(t)}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy(t)}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz(t)}{dt} = \mathbf{i}\,v_x + \mathbf{j}\,v_y + \mathbf{k}\,v_z$$

Производная равна скорости изменения функции при изменении аргумента. Через vx, vy, vz обозначены проекции вектора скорости на

оси x, y, z

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Вектор скорости ***v*** направлен по касательной к траектории движения. Величина вектора скорости в каждой точке траекторий равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Время в СИ измеряется в секундах, длина в метрах, скорость в [метрах за секунду] = [м/с].

Средняя величина скорости точки равна отношению пути ΔS ко времени t, за который этот путь пройден:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Здесь S – пройденный путь за время t.

Средний вектор скорости определяется как отношение вектора перемещения **r** ко времени *t*, за которое это перемещение произошло

$$\boldsymbol{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t},$$

где

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{i}(x_2 - x_1) + \mathbf{j}(y_2 - y_1) + \mathbf{k}(z_2 - z_1),$$

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

В случае движения с малыми скоростями, много меньшими скорости света, скорость тела, участвующего одновременно в нескольких движениях, может быть найдена по правилу сложения векторов

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2,$$

где $\boldsymbol{v}_1$ – скорость тела относительно системы отсчета K_1, $\boldsymbol{v}_2$ – скорость движения системы K_1 относительно "неподвижной" системы K_2.

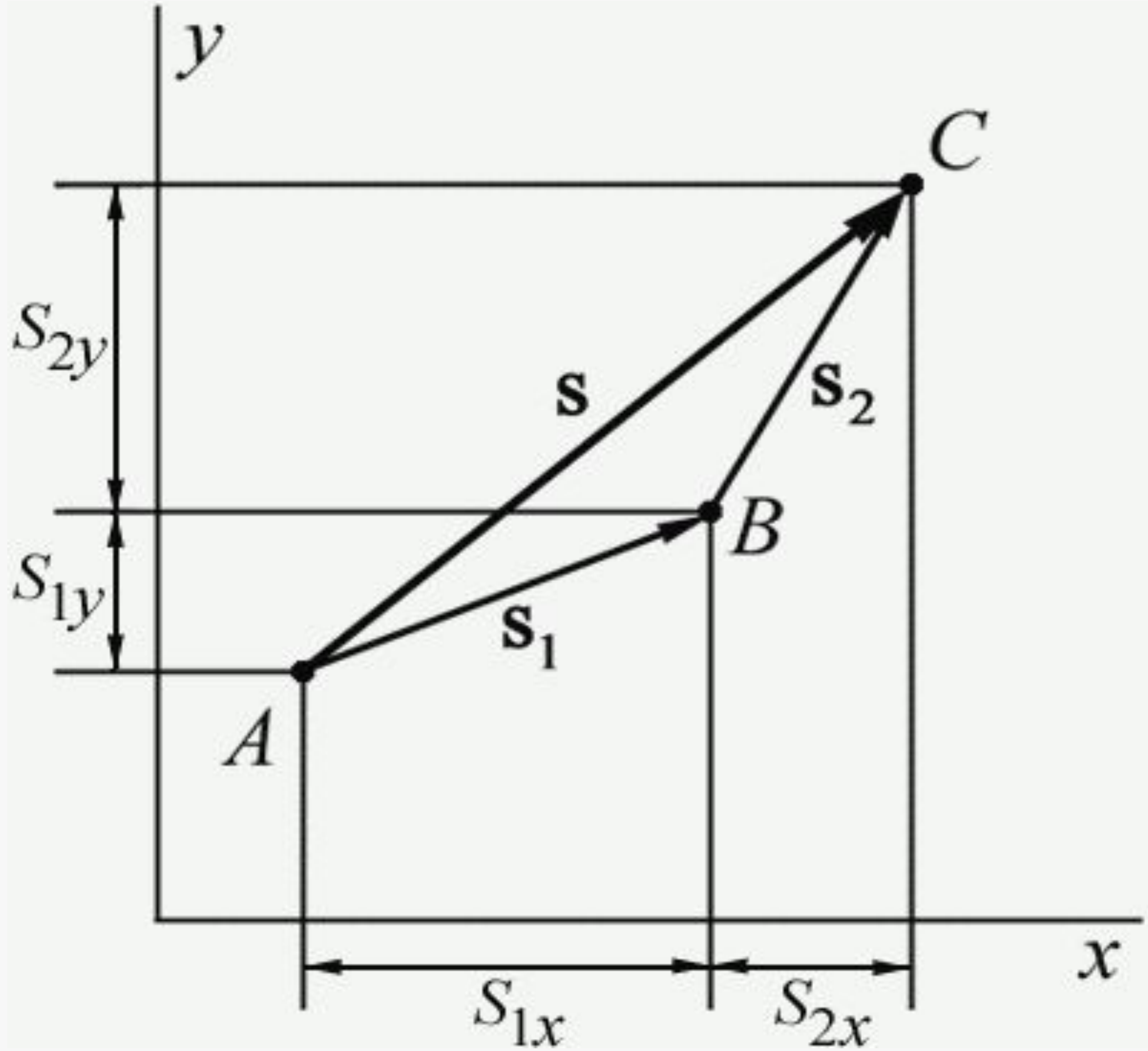
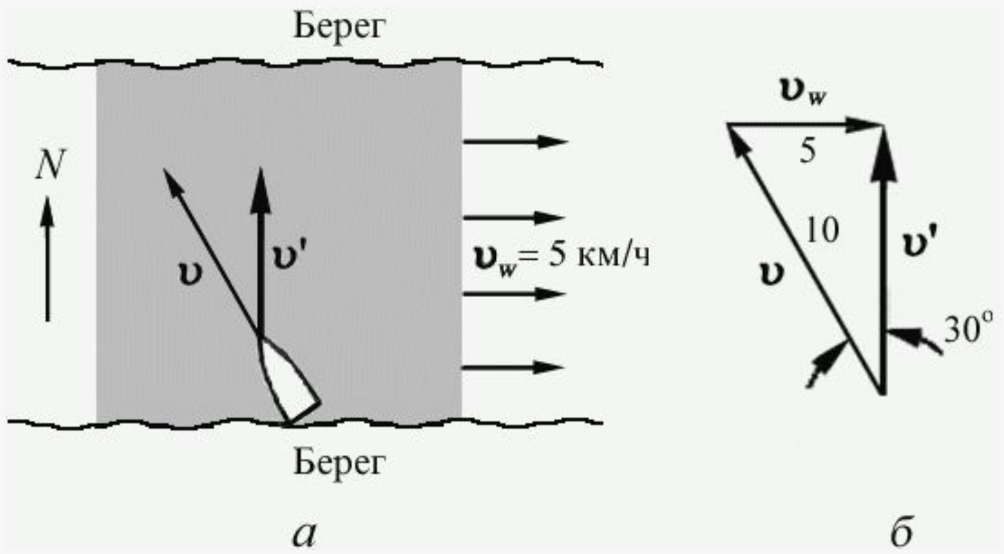


Рис. 2.6.

Векторное сложение скоростей можно продемонстрировать на примере лодки, перемещающейся в движущейся воде. Обозначим через $\Delta\mathbf{r}$ перемещение лодки относительно воды и через $\Delta\mathbf{r}_w$ перемещение воды относительно берега за одно и то же время Δt. Тогда для перемещения $\Delta\mathbf{r}'$ лодки относительно берега имеем $\Delta\mathbf{r}' = \Delta\mathbf{r}_w + \Delta\mathbf{r}$. Разделив обе части этого выражения на Δt, получим

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}_w + \boldsymbol{v}.$$



В приводимом примере через $\mathbf{v}$ обозначена скорость лодки в системе отсчета (в системе координат), которая покоится относительно воды. Эту скорость измеряют те, кто находится на борту лодки, если они не видят берегов. Наблюдатель в другой системе отсчета, а именно связанной с берегом, видит иную скорость движения лодки $\mathbf{v}'$, которая дается написанным выше соотношением.

Пусть, например, лодка пытается пересечь реку, текущую, как показано на рис. 2.7 , на восток со скоростью 5 км/ч. Рулевому известна скорость лодки относительно воды: 10 км/ч. Как надо править, чтобы паром двигался поперек реки, и какой будет скорость парома относительно берега?

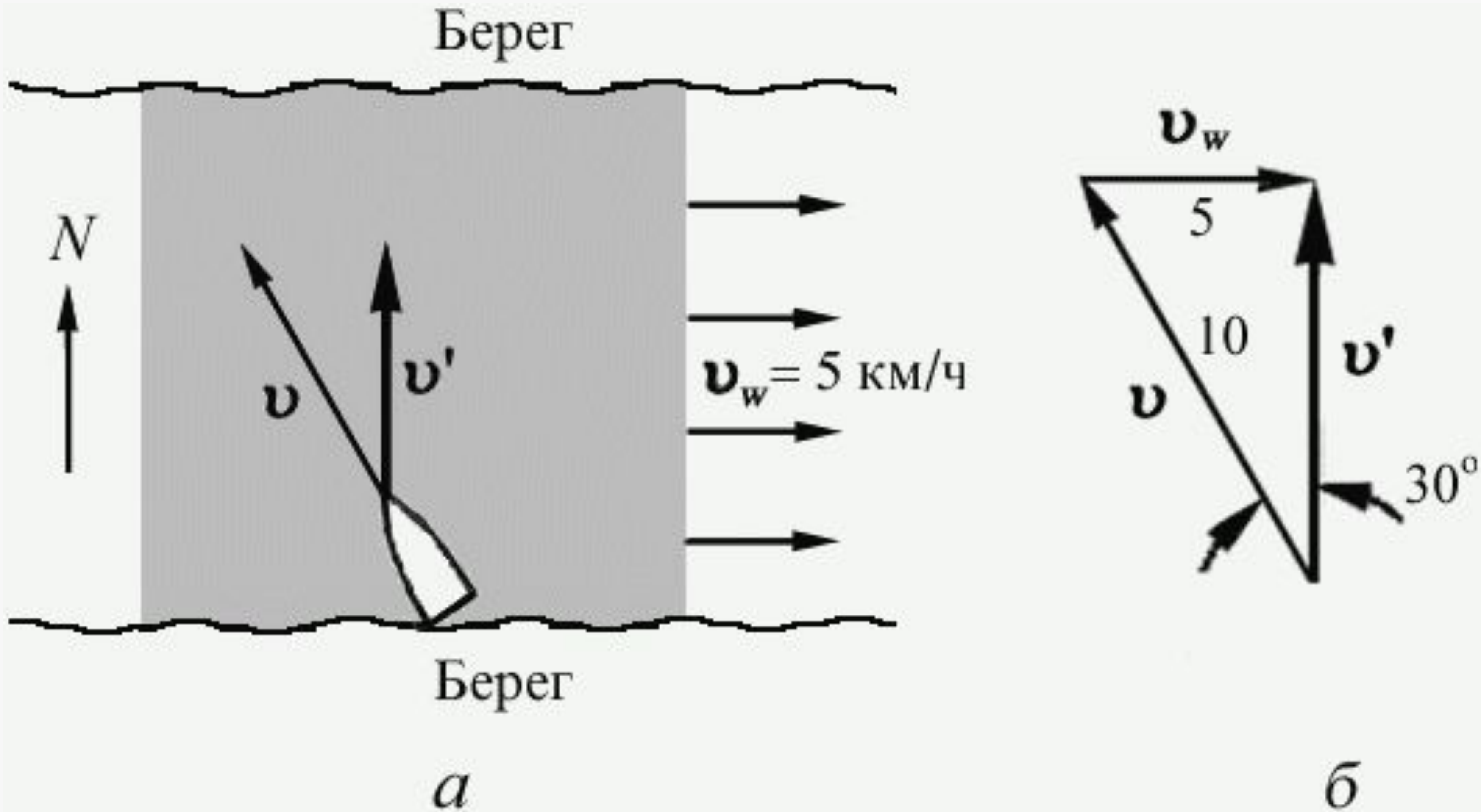

Берег
N
$\boldsymbol{\upsilon}$
$\boldsymbol{\upsilon}'$
$\boldsymbol{\upsilon}_w = 5$ км/ч
Берег
а
$\boldsymbol{\upsilon}_w$
5
10
$\boldsymbol{\upsilon}$
$\boldsymbol{\upsilon}'$
30°
б

Рис. 2.7.

Обозначим через $\boldsymbol{v}$ вектор скорости парома относительно воды, а через $\boldsymbol{v}_w$ – скорость воды. На рис. 2.7, *б* показан треугольник, составленный из этих векторов. Один угол в этом треугольнике прямой, а два других равны 30° и 60°, поскольку гипотенуза треугольника в два раза длиннее одного из катетов. Следовательно, рулевой должен держать курс под углом 30° к северо-западу. Величина вектора $\boldsymbol{v}'$ равна 10 км/ч $\cdot$ cos 30°, т.е. 8,66 км/ч. Заметим, что она меньше суммы ве личин слагаемых: 8,66 < 10 + 5 км/ч.

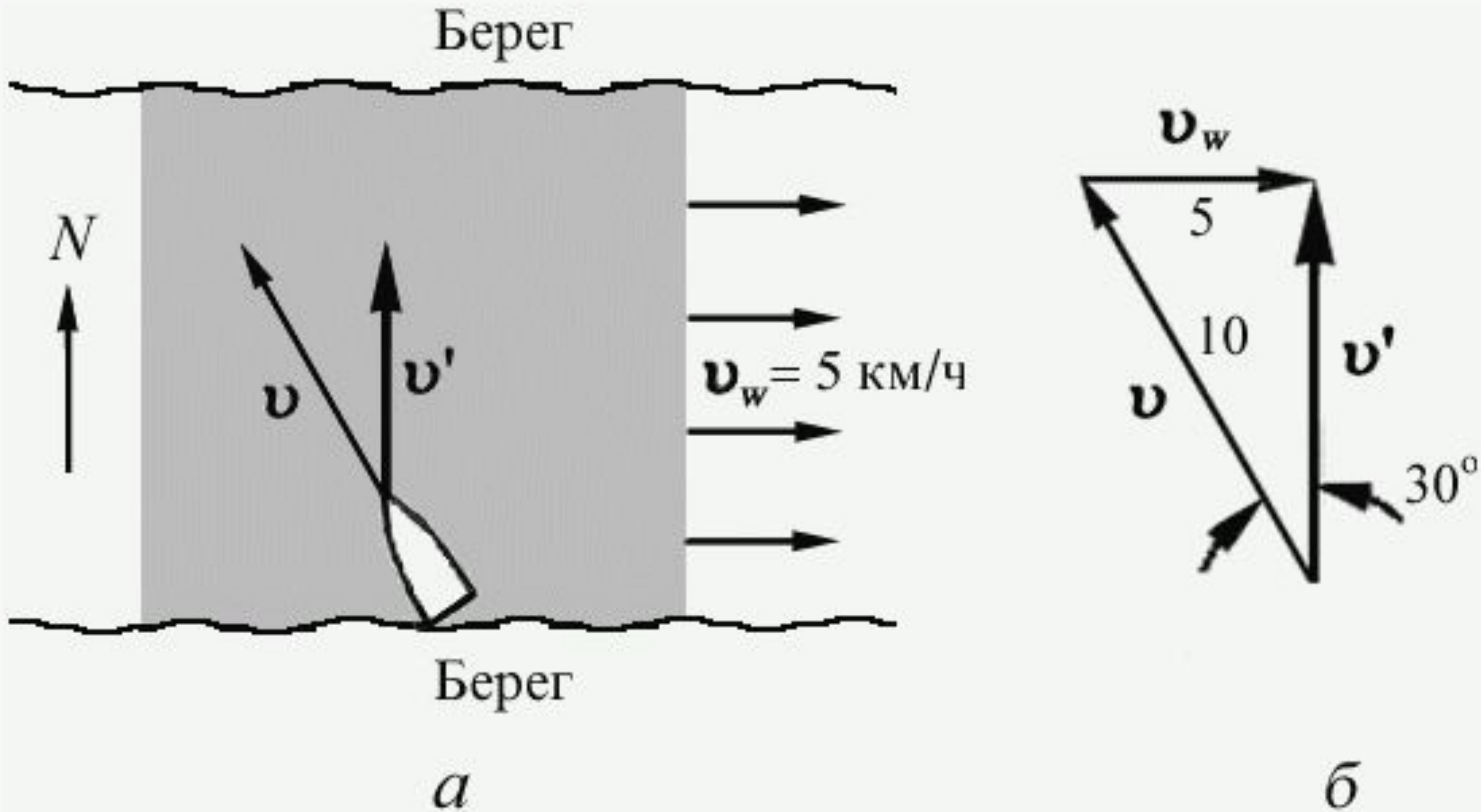


Рис. 2.7.

2.5. Ускорение

Ускорением называется физическая величина, равная скорости изменения скорости – первая производная от $\mathbf{v}$ по t или вторая производная от $\mathbf{r}$ по t:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}dt = \mathbf{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \mathbf{k}\frac{d^2z}{dt^2} = \mathbf{i}\,a_x + \mathbf{j}\,a_y + \mathbf{k}\,a_z$$

Поскольку скорость – векторная величина, а вектор задается своим модулем – длиной

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

и направлением, то и изменяться вектор $\boldsymbol{v}$ со временем может двумя способами: по величине и по направлению.

Изменение величины вектора скорости точки со временем определяет ее *тангенциальное ускорение* (рис. 2.8):

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{d\,|\boldsymbol{v}|}{dt}\,\boldsymbol{\tau}.$$

Изменение направления вектора скорости материальной точки со временем определяет ее *нормальное ускорение* (рис. 2.8):

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\tau = \frac{\boldsymbol{v}^2}{R}\mathbf{n}$$

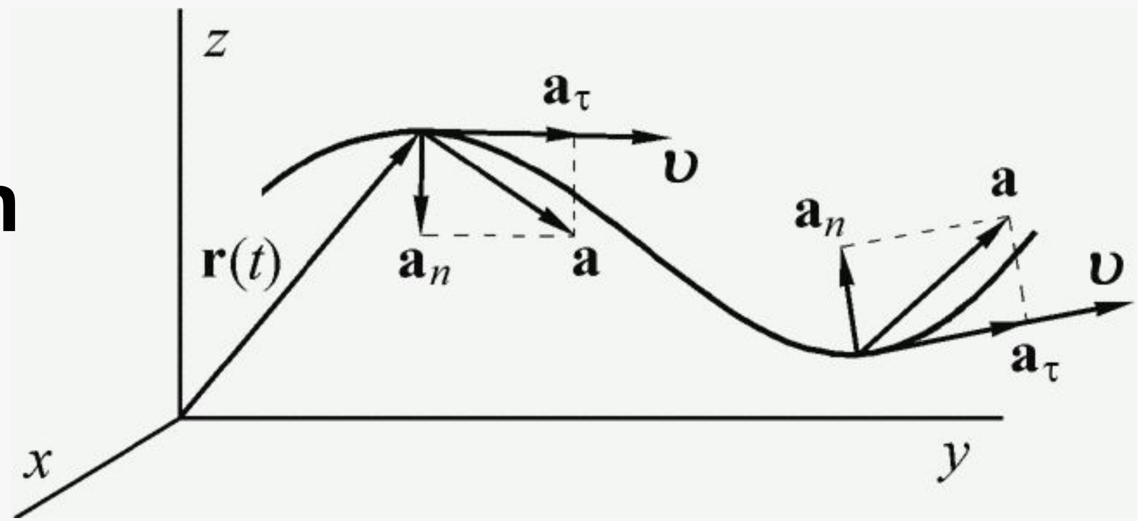


Рис. 2.8.

Здесь: **τ** – единичный вектор, направленный параллельно вектору скорости ***v*****,** т.е. по касательной к траектории движения

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|};$$

n – вектор нормали, перпендикулярный вектору **τ**, т.е. (**n**,**τ**) = 0, где круглые скобки означают скалярное произведение векторов;

R – радиус кривизны траектории движения в точке, где определяется скорость движения – радиус окружности касательной в данной точке к искривленной траектории движения. Чем меньше радиус окружности, тем сильнее кривизна траектории в данной точке, тем быстрее изменяется вектор скорости по направлению, тем больше нормальное ускорение.

По определению, имеем: $\mathrm{a} = \mathrm{a}_n + \mathrm{a}_\tau$, $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

2.6. Кинематика вращательного движения

По аналогии с линейной скоростью и ускорением вводятся *угловая скорость* и *угловое ускорение*. Эти понятия относятся к случаю движения материальной точки по окружности. Положение точки *A* на окружности можно задать углом , который образует радиус-вектор **r** с неизменным направлением оси *x* (рис. 2.9). Величина угловой скорости точки равна углу поворота радиус-вектора точки в единицу времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$$

Вращение называется равномерным, если угловая скорость ω постоянна, в этом случае угол поворота линейно растет со временем: $\phi = \phi_0 + \omega t$.

При равномерном вращении ω называют циклической частотой вращения. Величина $\frac{\omega}{2\pi} = \nu$ дает число оборотов в единицу времени и называется частотой вращения.

Пусть точка *A* движется по окружности постоянного радиуса *r* с постоянной угловой скоростью ω, найдем связь между линейной и угловой скоростью.

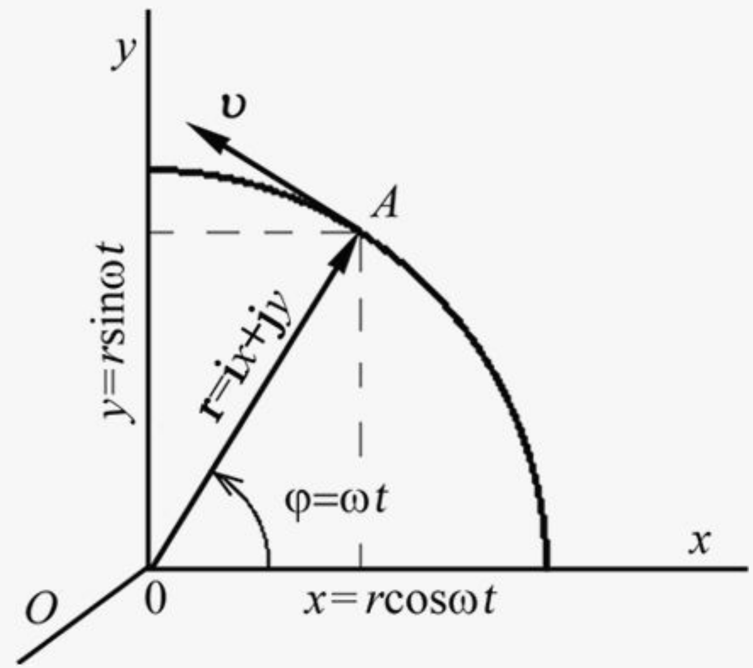


Рис. 2.9.

Движение точки по круговой траектории описывается уравнением

$$\mathbf{r}(\mathrm{t}) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) = r(\mathbf{i}\cdot\cos\omega t + \mathbf{j}\cdot\sin\omega t),$$

где **i**, **j** – единичные векторы, направленные вдоль осей x и y соответственно.

Вектор скорости материальной точки, движущейся по окружности неизменного радиуса с постоянной скоростью, равен

$$\boldsymbol{v} = \left.\frac{d\,\mathbf{r}}{dt}\right|_{\substack{r=\mathrm{const}\\ \omega=\mathrm{const}}} = \omega r\left[-\mathbf{i}\sin\omega t + \mathbf{j}\cos\omega t\right].$$

Вектор $\boldsymbol{v}$ направлен по касательной к окружности, т.е. перпендикулярно **r**, поскольку их скалярное произведение равно нулю $(\boldsymbol{v},\mathbf{r}) = 0$. Величина вектора скорости равна

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \omega\cdot r$$

Найдем ускорение точки, равномерно вращающейся по окружности, и связанное только с изменением направления вектора скорости, т.е. нормальное ускорение

$$\mathbf{a}_n = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = \left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_{\substack{r\omega = V = \text{const} \\ r = \text{const} \\ \omega = \text{const}}} = \omega^2 r[(\mathbf{i}\cdot\cos\omega t + \mathbf{j}\cdot\sin\omega t] = -\omega^2 \mathbf{r}(t).$$

Нормальное ускорение направлено к центру окружности, о чем говорит знак «минус» $(-\mathbf{r})$. Величина нормального ускорения равна

$$a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}.$$

Это ускорение также называют центростремительным ускорением.

Если угловая скорость изменяется со временем, то имеем для скорости точки, вращающейся по окружности,

$$\mathbf{r} = r(\mathbf{i}\cos\phi + \mathbf{j}\sin\phi),$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\,\mathbf{r}}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}\left(-\,\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi\right)$$

Вектор скорости $\boldsymbol{v}$ и в этом случае перпендикулярен радиус-вектору **r,** так как скалярное произведение данных векторов равно нулю $(\boldsymbol{v},\mathbf{r}) = 0$.

Величина линейной скорости определяется соотношением

$$v = \frac{dr}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}$$

- произведение величины радиуса кривизны траектории в данной точке на угловую скорость вращения тела.
- полное ускорение точки, вращающейся с переменной угловой скоростью по окружности, по определению, равно

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = r\frac{d^2\varphi}{dt^2}(-\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi) - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2(\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi) =$$

$$= r\frac{d\omega}{dt}\frac{\mathbf{v}}{v} - r\omega^2\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n .$$

Оно складывается из тангенциального ($\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{v}/v$)

$$\mathbf{a}_\tau = r\frac{d\omega}{dt}\cdot\left(\frac{\mathbf{v}}{v}\right) = r\varepsilon\boldsymbol{\tau}$$

и нормального ($\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$); $\mathbf{a}_n = -\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)r\omega^2 = -r\omega^2\,\mathbf{n}$ ускорений.

Вектор $\mathbf{a}_\tau$ направлен по касательной к окружности – параллельно вектору $\boldsymbol{v}$, а вектор $\mathbf{a}_n$ направлен к центру окружности – антипараллельно вектору $\mathbf{r}$.

Величина $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ (рад/с^2) называется угловым ускорением и характеризует изменение угловой скорости в единицу времени.

Определим величину нормального ускорения тела на экваторе, обусловленного вращением Земли. В данном случае угловая скорость вращения ω равна $\dfrac{2\pi R}{T}$, где T – период обращения Земли вокруг оси, T = 1 сут = $8{,}64 \cdot 10^4$ с и R – радиус Земли, $R = R_з =$ = 6370 км. Подставляя данные значения T и R в формулу для нормального ускорения, получаем

$$a_n = \frac{4\pi^2\left(6{,}37 \cdot 10^6\right)}{\left(8{,}64 \cdot 10^4\right)^2}\ \text{м/с}^2 = 0{,}034\ \text{м/с}^2.$$

Это всего лишь 0.35% от величины g = 9,8 м/с^2. Таким образом, если бы Земля была идеально сферической, то на экваторе человек был бы на 0.35% легче, чем около полюса. Это одна из причин, объясняющих, почему в более высоких широтах труднее побить спортивные рекорды, чем на экваторе.

Угловая скорость и угловое ускорение являются в общем случае векторами. Связь между вектором угловой **ω** и линейной скорости ***v*** задается с помощью векторного произведения

$$\boldsymbol{v} = [\omega, r].$$

Вектор угловой скорости **ω** направлен перпендикулярно плоскости вращения, в сторону, определяемую правилом буравчика – если вращать буравчик по направлению движения точки, то его поступательное движение укажет направление вектора **ω.**

По направлению вектор углового ускорения **ε** совпадает с вектором угловой скорости при ускоренном вращении ($d\omega/dt > 0$) и противоположно ему при замедленном вращении ($d\omega/dt < 0$).

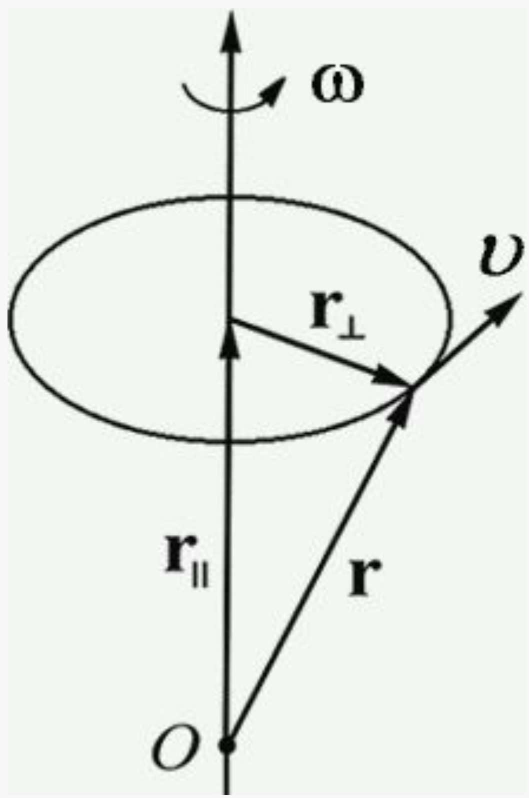


Рис. 2.10.

Основные выводы

Движение с постоянной скоростью описывается уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{v}t$

Мгновенная скорость $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\,\mathbf{r}}{dt}$

Мгновенное ускорение $\mathbf{a} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dfrac{d^2\,\mathbf{r}}{dt^2}$

Полное ускорение складывается из нормального $\mathbf{a}_n = \dfrac{v^2}{R}\,\mathbf{n}$ и тангенциального $\mathbf{a}_\tau = \dfrac{d\,|\boldsymbol{v}|}{dt}\,\boldsymbol{\tau}$ ускорений

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau.$$

Вектор угловой скорости $$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$$

угловое ускорение $$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\,\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\varphi}}{dt^2}$$

Связь между нормальным и тангенциальным ускорением и угловыми кинематическими характеристиками:

$$\mathbf{a}_n = -\omega^2 r\mathbf{n},$$

$$\mathbf{a}_{\boldsymbol{\tau}} = r\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\tau}.$$

Прямая задача кинематики: по известному r=f(t) найти v,a=f(t).

Обратная задача кинематики: по известному a=f(t) найти r=f(t).

Лекция окончена

Нажмите клавишу <ESC> для выхода