



**Розділ 9  
ПОШИРЕННЯ  
ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ  
ХВИЛЬ НАД ПЛАСКОЮ  
ІДЕАЛЬНО ПРОВІДНОЮ  
ПОВЕРХНЕЮ**

**LOGO**

# Зміст

9.1

**Загальні поняття**

9.1.1

**Типи хвиль**

9.1.2

**Поняття рухомої та стоячої хвилі**

9.1.3

**Фазова та групова швидкості**

9.2

**Структура е/м поля над ідеальною провідною поверхнею**

9.2.1

**Вектор  $E$  перпендикулярний до площини падіння**

9.2.2

**Вектор  $E$  паралельний площині падіння**

9.3

**Висновки**

# 9.1 Загальні поняття

## 9.1.1 Типи хвиль

Як відомо (підрозділ 6.2), електромагнітні хвилі можна розділити на дві групи. До першої групи належать ті, що мають лише *поперечні* складники – це пари:  $E_x - H_y$  і  $E_y - H_x$ , а *поздовжні* відсутні. Оскільки є лише *поперечні* складники, то така хвиля має назву хвиля *типу T*, або *поперечна електромагнітна (TEM)*.

Однак, як випливає з рівнянь Максвелла, в замкненому просторі можуть існувати і хвилі іншої групи, тобто хвилі, до складу яких входять складники  $H_z$  та  $E_z$ : якщо  $H_z \neq 0$ , але  $E_z = 0$ , або якщо  $E_z \neq 0$ , але  $H_z = 0$ . Ці хвилі, відповідно, мають назву *поздовжні хвилі типу H*, або *поперечно-електричні (TE)* та *поздовжні хвилі типу E*, або *поперечно-магнітні (TM)*.

Нижче покажемо, яким чином поширюються електромагнітні хвилі над ідеально-провідною поверхнею з урахуванням граничних умов.

Щоб навчитись побудувати структуру поля хвилі будь-якого порядку доцільно починати з хвиль *найпростіших типів*:  $H_{10}$ ,  $H_{11}$ ,  $E_{11}$ . Для цього необхідно дотримуватись таких правил:

– на стінках хвилеводу завжди виконуються граничні умови:

$$E_{\tau} = 0, E_n \neq 0, H_{\tau} \neq 0, H_n = 0;$$



## 9.1.2 Поняття рухомої та нерухомої хвилі

- Нехай на ідеально провідну поверхню (глибина проникнення рівна нескінченності) падає однорідна *пласка поперечна* хвиля (хвиля типу  $T$ ). Падаюча хвиля повністю відіб'ється.

$$\text{Результуючий вектор: } \vec{\Pi}_{\text{рез}} = \vec{\Pi}_{\text{пад}} + \vec{\Pi}_{\text{від}} \quad (9.1)$$

- Із зміною кута падіння  $\varphi$  змінюється розподіл складників енергії електромагнітного поля:

$$\vec{\Pi}_{\text{пад}} = -i\vec{\Pi}_{\text{пад}} + k\vec{\Pi}_{\text{пад}} \quad (9.2)$$

$$\vec{\Pi}_{\text{від}} = i\vec{\Pi}_{\text{від}} + k\vec{\Pi}_{\text{від}} \quad (9.2a)$$

- Режим, за якого є перенесення енергії – *хвильовий режим* (рухома хвиля), а режим, за якого немає перенесення енергії – *коливальний режим* (стояча хвиля).

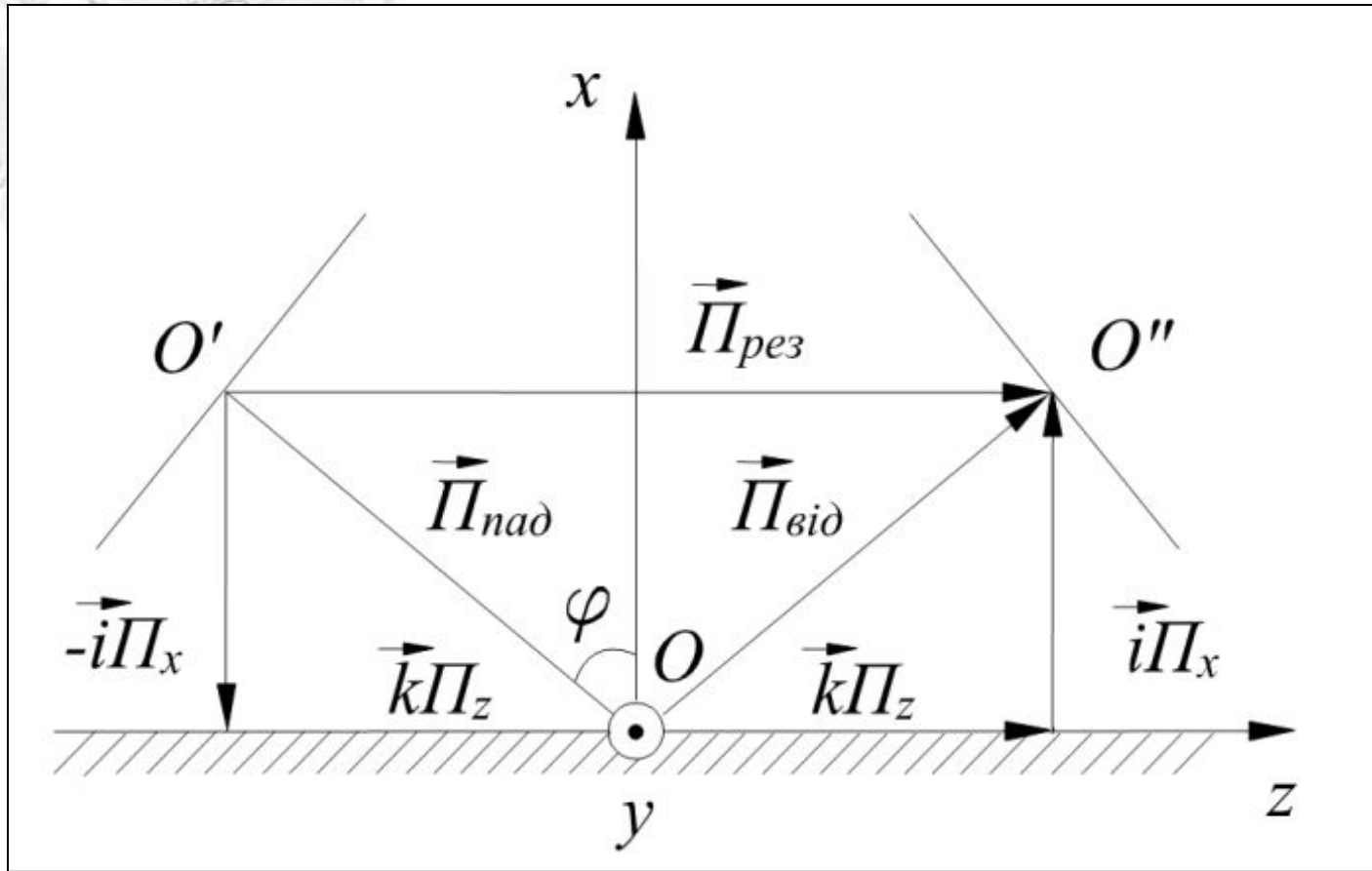
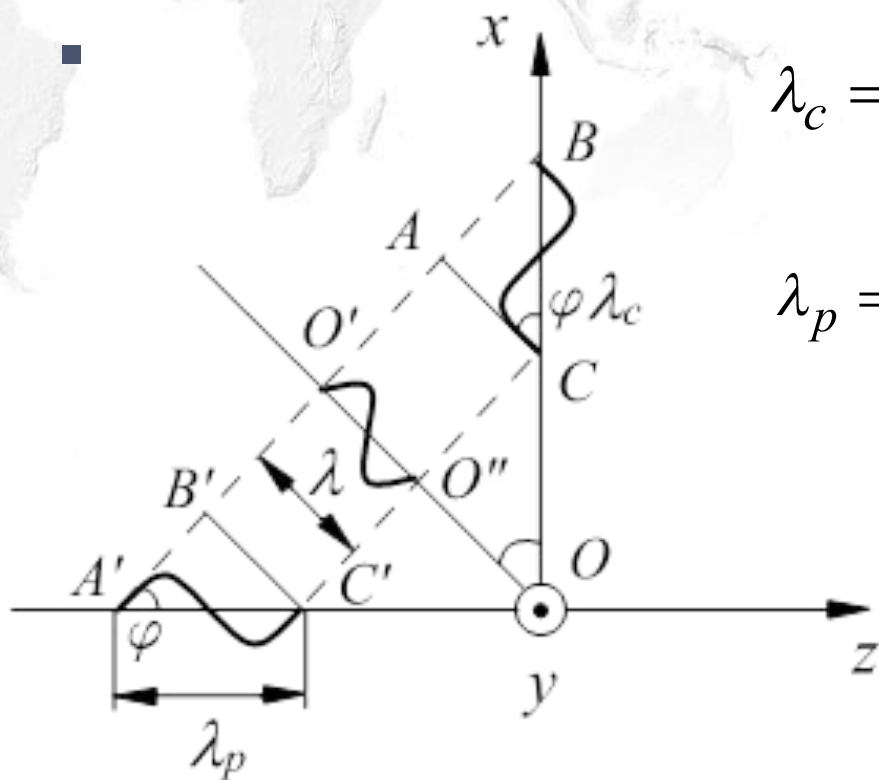


Рисунок 9.1. Процес похилого падіння електромагнітної хвилі на ідеально-провідну поверхню



## Зв'язок між довжиною хвилі та її стоячою та рухомою складовою



$$\lambda_c = \frac{\lambda}{\cos \varphi} \quad (9.3)$$

$$\lambda_p = \frac{\lambda}{\sin \varphi} \quad (9.4)$$

Отже, якщо  $\varphi = 0$ , то рухомої хвилі. Якщо  $\varphi = 90$ , то немає стоячої хвилі.

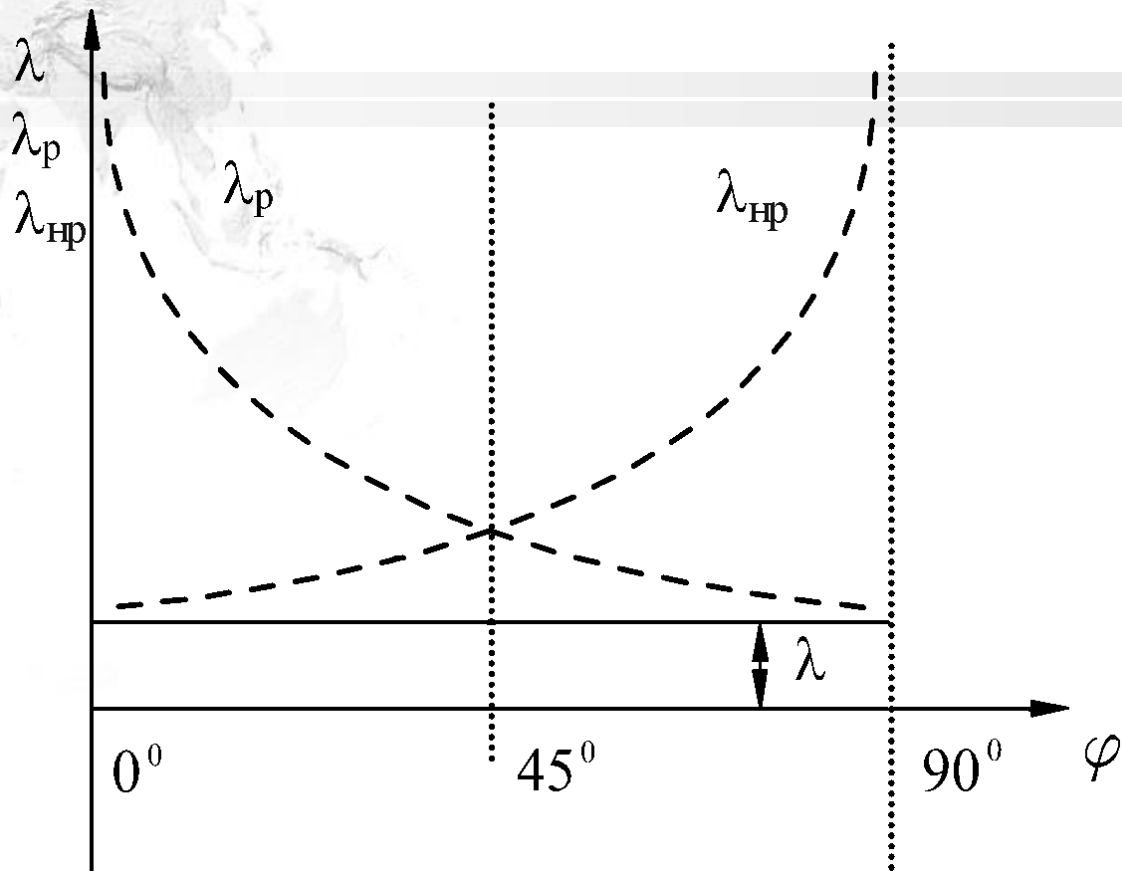


Рисунок 9.2. Залежності довжин хвиль від кута падіння



## 9.1.3. Фазова та групова швидкості

Нехай у момент  $t$  фронт хвилі, що падає, є у точці  $O'$ , а через інтервал  $\Delta t$  –  $O''$  (рис. 9.3). Згідно визначенню, фронт однорідної плоскої хвилі є поверхнею однакових фаз. Тому переміщення фронту хвилі еквівалентно переміщенню деякого фазового стану з точки  $O'$ , в точку  $O''$  зі швидкістю  $v$  діелектрику  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ .

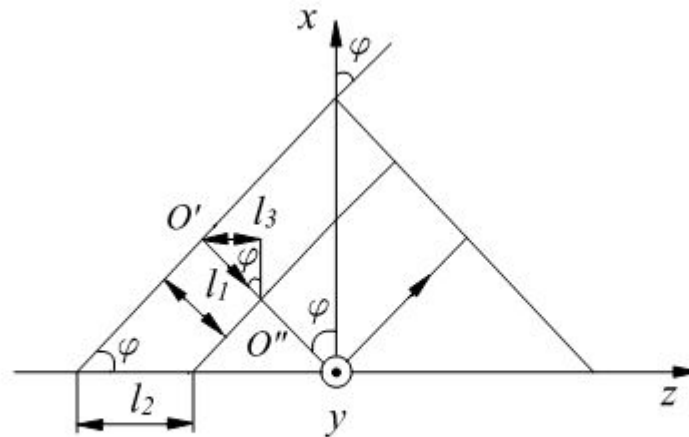


Рисунок 9.3. До визначення понять швидкостей електромагнітної хвилі





З рис. 9.3 випливає, що ця швидкість є *швидкістю фронту хвилі*, яку визначає формула:

$$v_{\dot{\varphi p}} = \frac{l_1}{\Delta t}. \quad (9.5)$$

Оскільки отримана хвиля зміщується вздовж осі  $z$ , знаходимо швидкість зміщення фазового фронту хвилі в цьому напрямі – тобто *фазову швидкість*:

$$v_{\dot{\varphi s}} = \frac{l_2}{\Delta t} = \frac{l_1}{\Delta t} \frac{l_2}{l_1} = \frac{v_{\dot{\varphi p}}}{\sin \varphi}. \quad (9.6)$$



З'ясуємо дві ситуації: кут  $\varphi = 0$ , тоді – фронт хвилі «пласко» падає на площину, тобто дотикається до неї всіма точками та  $\varphi = \pi/2$  – фронт хвилі рухається вздовж площини, а фазовий стан у довільній точці на площині змінюється зі швидкістю світла (у вільному просторі).

Визначимо швидкість руху енергії, яка має назву *групова швидкість*. Нехай в момент  $t$  в точці  $O'$  маємо певний запас енергії. За проміжок часу  $\Delta t$  ця енергія зміститься в точку  $O''$  вздовж осі  $z$  зі швидкістю:

$$v_{\text{грп}} = \frac{l_3}{\Delta t} = \frac{l_1}{\Delta t} \frac{l_3}{l_1} = v_{\text{фр}} \sin \varphi . \quad (9.7)$$

Ця швидкість не перевищує швидкість світла. Залежності значень швидкостей  $v_{\text{фр}}$ ,  $v_{\text{фз}}$ ,  $v_{\text{грп}}$  від кута падіння  $\varphi$  наведено на рис. 9.5.

З (9.6) та (9.7) маємо:

$$v_{\text{фз}} v_{\text{грп}} = v_{\text{фр}}^2 . \quad (9.8)$$

Таким чином, у напівобмеженому просторі електромагнітну хвилю характеризують три швидкості: *фронту*, *фази* та *групова*. У вільному

просторі  $v_{\text{фр}} = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

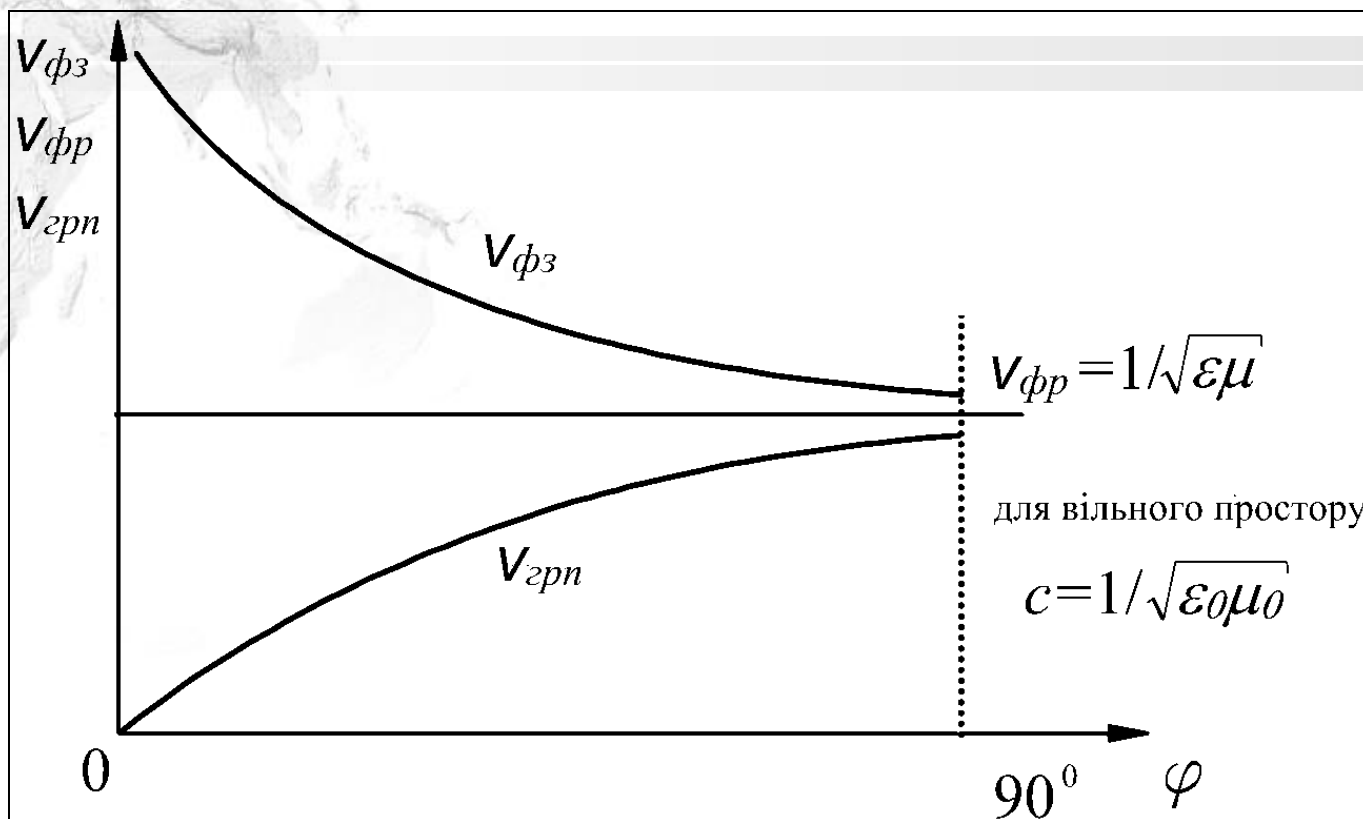


Рисунок 9.4. Залежність швидкостей  $v_{\phi z}, v_{grp}, v_{\phi p}$  від кута падіння  $\phi$

## 9.2. Структура електромагнітного поля над ідеальною провідною поверхнею

Поняття «структура поля» визначає сукупність у просторі векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  сформованої хвилі. Необхідно з'ясувати структуру поля електромагнітної хвилі для двох ситуацій:

- вектор  $\vec{E}$  хвилі, що падає, перпендикулярний площині падіння;
- вектор  $\vec{E}$  хвилі, що падає, паралельний площині падіння.

### 9.2.1. Вектор $E$ перпендикулярний до площини падіння

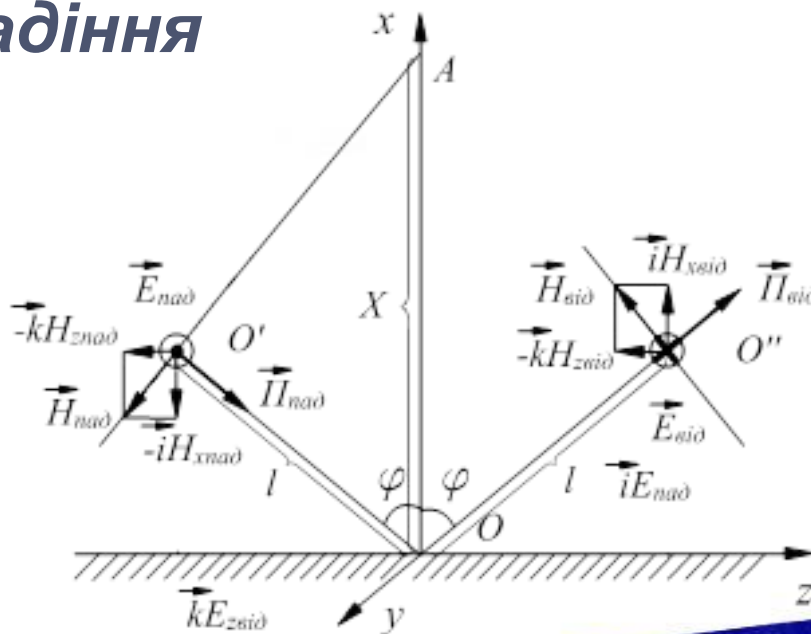


Рисунок 9.5. Складові поля за умови, якщо вектор  $E$  перпендикулярний до площини падіння

Взаємна орієнтація векторів хвилі, що падає є:

$$\vec{E}_{\text{пад}} = \vec{j}E_{y \text{ пад}} , \quad (9.9)$$

$$\vec{H}_{\text{пад}} = -\vec{i}H_{x \text{ пад}} - \vec{k}H_{z \text{ пад}} . \quad (9.10)$$

На підставі граничних умов, з урахуванням того, що на поверхні ідеального провідника  $E_{\tau} = 0$  маємо:

$$E_{y \text{ пад}} + E_{y \text{ від}} = 0 , \quad (9.11)$$

$$E_{y \text{ пад}} = -E_{y \text{ від}} . \quad (9.11a)$$

Знак «мінус» в (9.11a) означає, що напрям відбитого вектора  $\vec{E}_{\text{від}}$  змінюється на протилежний.

Відповідно до напрямку вектора Пойнтінга  $\vec{\Pi}_{\text{від}}$  запишемо  $\vec{H}_{\text{від}}$ .

$$\vec{H}_{\text{від}} = \vec{i}H_{x \text{ від}} - \vec{k}H_{z \text{ від}} . \quad (9.12)$$

Отримане в результаті значення  $E_{y\text{рез}}$ , визначимо, додаванням миттєвих значень відповідних проекцій хвилі, що падає та відбитої хвилі. Нехай у точці  $x=0$  маємо:

$$E_{y\text{пад}} = E_{m,y} \cos \omega t \quad , \quad (9.13)$$

$$E_{y\text{від}} = -E_{m,y} \cos \omega t \quad (9.13a)$$

Тоді, в точках  $O$  та  $O'$  відповідно:

$$E_{y\text{пад}}(O) = E_{m,y} \cos(\omega t + \beta l) \quad , \quad (9.14)$$

$$E_{y\text{від}}(O') = -E_{m,y} \cos(\omega t - \beta l) \quad . \quad (9.15)$$

Напруженість  $E$  у довільній точці визначимо додаванням (9.14) та (9.15). Нагадаємо:  $A[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] = -2A \sin \alpha \sin \beta$ . Тоді:

$$E_{y\text{рез}} = -2E_{m,y} \sin\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) \sin \omega t \quad . \quad (9.16)$$

Із урахуванням, що  $l = x \cos \varphi$ , маємо:

$$E_{y\text{рез}} = -2E_{m,y} \sin\left(\frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} x\right) \sin \omega t \quad . \quad (9.16a)$$



Звернемось до співмножника, що не залежить від часу – він визначає амплітуду:

$$E_{y \max} = -2E_m \sin\left(\frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} x\right) \quad (9.17)$$

Таким чином, амплітуда поля залежить від координати  $x$ . На осі  $x$  існують точки, де  $E_{y \max} = 0$ , що мають назву *вузли*, та *пучності* –  $E_{y \max} = 2E_m$ , тобто вздовж осі  $x$  сформована нерухома хвиля (рис. 9.6).

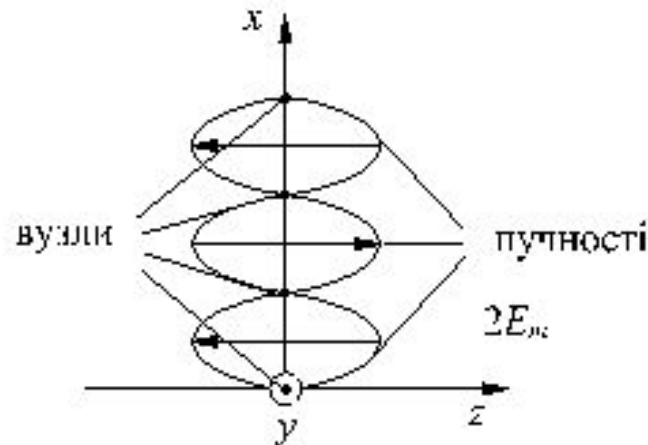


Рисунок 9.6. Ілюстрація напруженості поля у формі нерухомої хвилі

Вузли напруженості поля  $\epsilon$  за умов  $(2\pi \cos \varphi) x_n / \lambda = n\pi$ , де  $n=0, 1, 2, 3, \dots$ , тобто

$$x_n = \frac{n\lambda}{2 \cos \varphi}. \quad (9.18)$$

Довжина нерухомої хвилі – див. формулу 9.3.

Для визначення складників вектора  $\vec{H}$  можна двома способами:

- виконати усі операції, як із вектором  $\vec{E}$ ;
- використати співвідношення між  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  через хвильовий імпеданс.

Скористаємось останнім; з урахуванням, що середовище – вільний простір, для якого хвильовий імпеданс – активний:  $Z_w^\circ = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 120\pi$ .

Визначимо співвідношення між складниками  $E_y$  та  $H_x$ .

$$\frac{E_{y \text{ пар}}}{H_{x \text{ пар}}} = \frac{E_{\text{пар}}}{-H_{\text{пар}} \sin \varphi} = \frac{-Z_w^\circ}{\sin \varphi} = -R_{\text{ек}}, \quad (9.19)$$





З (9.19) та (9.19а), якщо вважати, що  $R_{ch}$  – дійсна додатна величина (за умов вільного простору), впливає, що поперечні складники електричного та магнітного полів хвилі, що падає, та відбитої, однакові, тобто змінюються за тим самим законом.

Тоді:

$$\begin{aligned} H_{x\text{рез}} &= -\frac{E_{y\text{рез}}}{R_{ch}} = 2 \frac{E_m}{R_{ch}} \sin\left(\frac{2\pi \cos\varphi}{\lambda} x\right) \sin\omega t = \\ &= 2 \frac{E_m}{Z_w} \sin\varphi \sin\left(\frac{2\pi \cos\varphi}{\lambda} x\right) \sin\omega t = \\ &= 2H_m \sin\varphi \sin\left(\frac{2\pi \cos\varphi}{\lambda} x\right) \sin\omega t = \\ &= 2H_{mz} \sin\left(\frac{2\pi \cos\varphi}{\lambda} x\right) \sin\omega t \end{aligned} \quad (9.20)$$

Визначимо  $H_{z\text{рез}}$  на підставі граничних умов для тангенціальних складників вектора  $\vec{H}$  на межі розподілу з ідеальним провідником. Як видно з рис. 9.6 тангенціальний складник після відбиття не змінюється, тобто:

$$\begin{aligned}
 H_{z \text{ рез}} &= -2H_m \cos \varphi \cos\left(\frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} x\right) \sin \omega t, \\
 &= -2H_{mz} \cos\left(\frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} x\right) \sin \omega t.
 \end{aligned}
 \tag{9.21}$$

У співвідношеннях між  $E$  та  $H$  для будь-якої точки поля вздовж осі  $z$  для конкретного значення координати маємо додатковий зсув за фазою  $\beta z = 2\pi z / \lambda$ .

Запишемо співвідношення (9.16а), (9.20), (9.21) з урахуванням додаткового зсуву за фазою таким чином:

$$E_{y \text{ рез}} = -2H_{m y} \sin\left(\frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} x\right) \sin(\omega t - \beta z); \tag{9.22}$$

$$H_{x \text{ рез}} = 2H_{m x} \sin\left(\frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} x\right) \sin(\omega t - \beta z); \tag{9.23}$$

$$H_{z \text{ рез}} = -2H_{m z} \cos\left(\frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} x\right) \cos(\omega t - \beta z) \tag{9.24}$$



Формуємо структуру поля в момент  $t=0$ . Для цього виконуємо таке:

1) приймаємо за основу формули складових поля уздовж осей  $x$  та  $z$  (9.22...9.24);

2) умовно визначаємо знаки співмножників уздовж осей  $x$  та  $z$  з урахуванням знаків в формулах (9.22...9.24) аргументу  $(\omega t - \beta z)$ :

	$x$	$z$
$E_y$	-	-
$H_x$	+	-
$H_z$	-	+

3) починаємо укладення структури поля з осі  $z$ :  $E_y(z), H_x(z), H_z(z)$  (рис. 9.8а);

4) наводимо  $E_y(x), H_x(x), H_z(x)$  вздовж осі  $x$  (рис. 9.8б);

5) перемножуємо складники:  $E_y(x)E_y(z)$ ;  $H_x(x)H_x(z)$ ;  $H_z(x)H_z(z)$  та наводимо зорієнтовані криві на рис. 9.8в;

6) перша перевірка – лінії вектора  $\vec{H}$  замкнені, друга перевірка – лінії вектора  $\vec{H}$  спрямовані вздовж межі – є дотичними;

7) наводимо вектори  $\vec{H}$  так само: вони є в площині, що перпендикулярна площині аркуша (рис. 9.8в).



Формулюємо висновок: оскільки в результаті силові лінії напруженості магнітного поля мають складники  $H_x$  та  $H_z$  то з хвилі типу  $T$ , сформовано поздовжню хвилю типу  $H$ , або поперечну електричну хвилю – типу  $TE$ , якщо вектор  $\vec{E}$  перпендикулярний площини падіння.

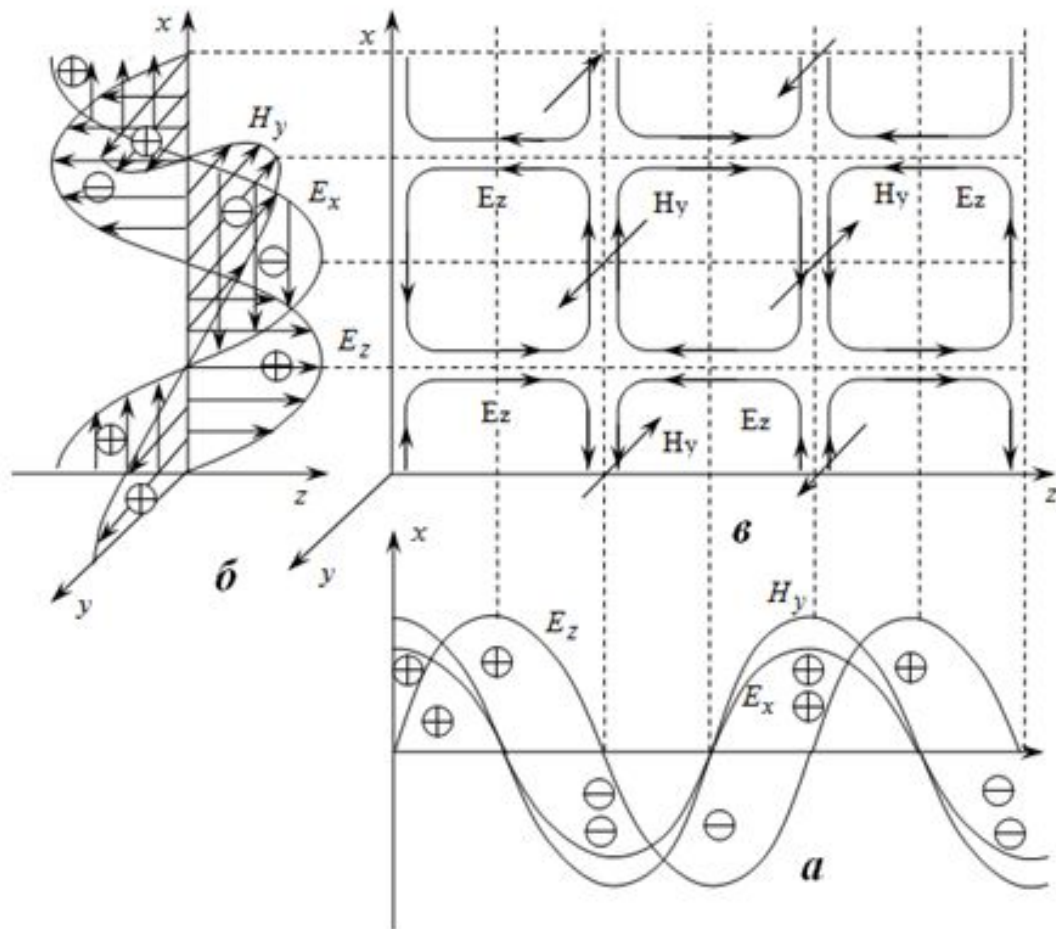


Рисунок 9.7. Структура поля за умови, що  $\vec{E}$  перпендикулярний площині падіння:

$a$  – складники вздовж осі  $z$ ;  $b$  – складники вздовж осі  $x$ ;  $v$  – результивне



## 9.2.2. Вектор $\vec{E}$ паралельний площині падіння

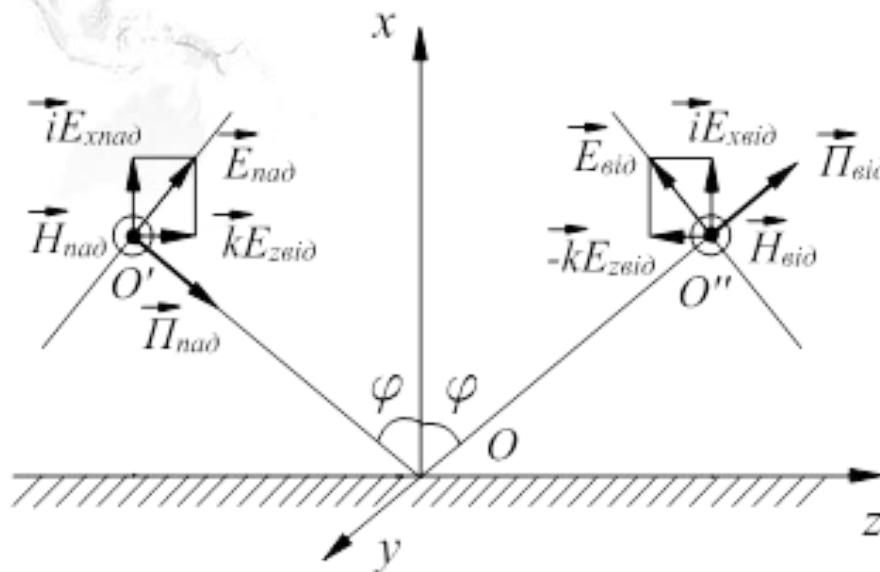


Рисунок 9.8. Складники поля за умови, якщо вектор  $\vec{E}$  паралельний площині падіння



Нагадаємо – *площина падіння* є площиною з вектором *Пойнтин-га* та нормаллю до межі середовищ. В цій ситуації вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  хвилі, що падає, мають такі складники:

$$\vec{H}_{\text{пад}} = \vec{j}H_y, \quad (9.25)$$

$$\vec{E}_{\text{пад}} = \vec{i}E_x + \vec{k}E_z. \quad (9.26)$$

У цьому випадку вектор  $\vec{H}$  на підставі граничних умов ( $H_x \neq 0$ ) на межі поділу має не нульове значення, його напрям після відбиття не змінюється (рис. 9.9). Тому у формулі для  $H_{y\text{рез}}$  за віссю  $x$  повинна бути функція  $\cos$ , адже  $\cos 0 = 1$ ; за часом функція може бути будь-яка, наприклад також  $\cos$ :

$$H_{y\text{рез}} = 2H_m \cos\left(\frac{2\pi \cos\varphi}{\lambda}x\right) \cos(\omega t - \beta z). \quad (9.27)$$

Складники електричного поля  $E_{x\text{рез}}$  разом з  $H_{y\text{рез}}$  формують рухому хвилю уздовж осі  $z$ , вони є у «фазі» ( $\vec{P}_{\text{ср}} \neq 0$ ), тобто знову використовуємо функцію  $\cos$ :

$$E_{x\text{рез}} = 2E_{m_x} \cos\left(\frac{2\pi \cos\varphi}{\lambda}x\right) \cos(\omega t - \beta z), \quad (9.28)$$

де  $E_{m_x} = E_m \sin\varphi$ .

$$E_{z\text{рез}} = -2E_{m_z} \sin\left(\frac{2\pi \cos\varphi}{\lambda}x\right) \sin(\omega t - \beta z), \quad (9.29)$$

де  $E_{m_z} = E_m \cos\varphi$ .

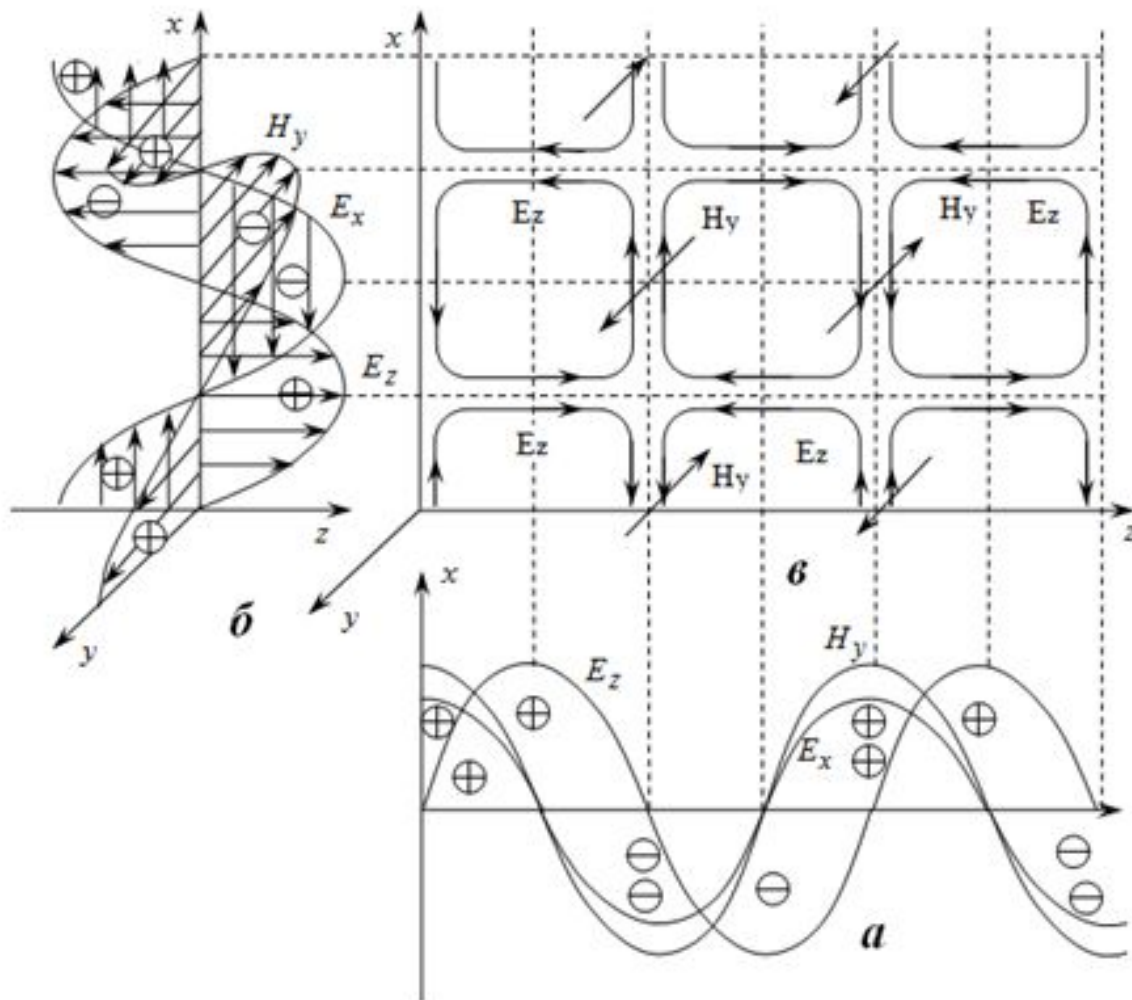


Рисунок 9.9. Структура поля за умови, що  $\vec{E}$  паралельний площині падіння:

*a* – вздовж осі *z*; *б* – вздовж осі *x*; *в* – результуюча





# Висновки

- 1. Електромагнітні хвилі можна розділити на дві групи. До першої групи належать ті, що мають лише поперечні складники - це пари  $E_x - H_y$  та  $E_y - H_x$ , а поздовжні відсутні. Така хвиля має назву хвиля типу  $T$  або поперечна електромагнітна ( $TEM$ ).
- 2. Однак, як впливає з рівнянь Максвелла в замкнутому просторі можуть існувати і хвилі іншої групи, тобто хвилі, до складу яких входять складники  $E_z$  та  $H_z$ : якщо  $H_z \neq 0 \rightarrow E_z = 0$ , або  $E_z \neq 0 \rightarrow H_z = 0$ . Ці хвилі, відповідно, мають назву хвилі типу  $TE$ , або поперечні електричні ( $TE$ ) та хвилі типу  $TM$ , або поперечні магнітні ( $TM$ ).
- 3. За умов падіння електромагнітної хвилі типу  $T$  на ідеально провідну поверхню утворюється відбита хвиля, при цьому результувне поле спрямовано вздовж ідеальної провідної поверхні.
- 4. Результивний вектор  $\vec{\Pi}$  має два складники:
  - уздовж осі  $x$  (характеризує режим стоячої хвилі);
  - уздовж осі  $y$  (характеризує режим рухомої хвилі).



- 5. За довільних значень кута  $\varphi$  результитивне поле має два складники: рухому, яка поширюється у додатному напрямку осі  $z$ , та стоячу вздовж осі  $x$ .
- 6. У напівобмеженому просторі електромагнітна хвиля характеризується трьома швидкостями: фронту  $v_{\text{фр}}$ , фази  $v_{\text{фз}} = \frac{v_{\text{фр}}}{\sin\varphi}$  та групової  $v_{\text{гр}} = v_{\text{фр}} \sin\varphi$  (зауважимо, що  $v_{\text{фз}} v_{\text{гр}} = v_{\text{фр}}^2$ ). У вільному просторі  $v_{\text{фр}} = c$ .
- 7. За умов падіння ЕМХ на ідеальну провідну поверхню доцільно ввести поняття характеристичного опору  $R_{ch}$ , який визначають через хвильовий імпеданс  $Z_w$  та кут падіння:  $R_{ch} = Z_w / \sin\varphi$ .
- 8. Структури полів електричних та магнітних векторів різні за умов різної орієнтації вектора  $\vec{E}$  хвилі типу  $T$ , що падає:
  - якщо вектор  $\vec{E}$ , перпендикулярний до площини падіння - в результаті утворюється хвиля типу  $H (TE)$ ;
  - якщо вектор  $\vec{E}$ , паралельний до площини падіння - в результаті утворюється хвиля типу  $E (TH)$ .



# Контрольні питання та завдання

- 1. Охарактеризуйте поняття і параметри фазової та групової швидкості хвилі.
- 2. Охарактеризуйте поняття і параметри рухомої і стоячої хвилі.
- 3. Назвіть види електромагнітних хвиль, в залежності від складників поля  $H_z$  та  $E_z$ .
- 4. Дайте визначення коливальному та хвильовому режиму, за яким напрямком здійснюється перенесення енергій під час поширення хвиль?
- 5. Наведіть вектори Пойнтинга для падаючої та відбитої хвилі в проєкціях на координатні осі.
- 6. Дайте визначення поняттю «довжина хвилі».
- 7. Наведіть співвідношення, які описують залежність між довжинами стоячої  $\lambda_c$ , рухомої  $\lambda_p$  та падаючої хвиль  $\lambda$ .
- 8. Сформулюйте зв'язок між режимом хвилі та кутом її падіння.
- 9. Охарактеризуйте явище падіння однорідної плоскої хвилі на ідеально провідну поверхню.