

Тема урока

- Приложения определенного интеграла к решению физических задач

Цель урока

- Познакомиться с историей развития интегрального и дифференциального исчисления
- Научиться применять интеграл для решения физических задач

Вычисление площади криволинейной трапеции

- На отрезке $[a; \hat{a}]$ функция $f(x) \geq 0$

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

**Вычисление объемов тел с
помощью
определенного интеграла.**

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

Вычисление пути

- Перемещение точки, движущейся по прямой со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени $[a; b]$, вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b v(t) dt$$

Вычисление массы неоднородного стержня и координаты центра масс

- а) суммарная масса M стержня равна

$$m = \int_a^b \rho(x) dx$$

- в) координата центра масс равна

$$x = \frac{1}{M} \int_a^b x \rho(x) dx$$

Интеграл

БЕРНУЛЛИ Якоб



- Слово интеграл
- Внес существенный вклад в разработку основ дифференциального и интегрального исчислений, аналитической геометрии, теории вероятностей и вариационного исчисления. Решил проблему Лейбница об изохронной кривой, исследовал логарифмическую спираль, ввел полярные координаты.

БЕРНУЛЛИ

Иоганн



- В 1697 опубликовал работу по экспоненциальному исчислению, в которой впервые сформулировал задачу о брахистохроне;
- Ряд открытий в области интегрального и дифференциального исчисления

ЛЕЙБНИЦ

Готфрид

Фридрих



Фридриху с Ньютоном и независимо от него, создал дифференциальное и интегральное исчисления.

- Ввёл применяемое и сегодня обозначение производной df/dx .
- Ввёл бинарную систему счисления с цифрами 0 и 1, на котором базируется современная компьютерная

Фурье



- Доказал теорему о числе действительных корней алгебраического уравнения, лежащих между данными пределами
- Нашел формулу представления функции с помощью интеграла, играющую важную роль в современной математике.
- Доказал, что всякую произвольно начерченную линию, составленную из отрезков двух разных

КЕПЛЕР Иоганн



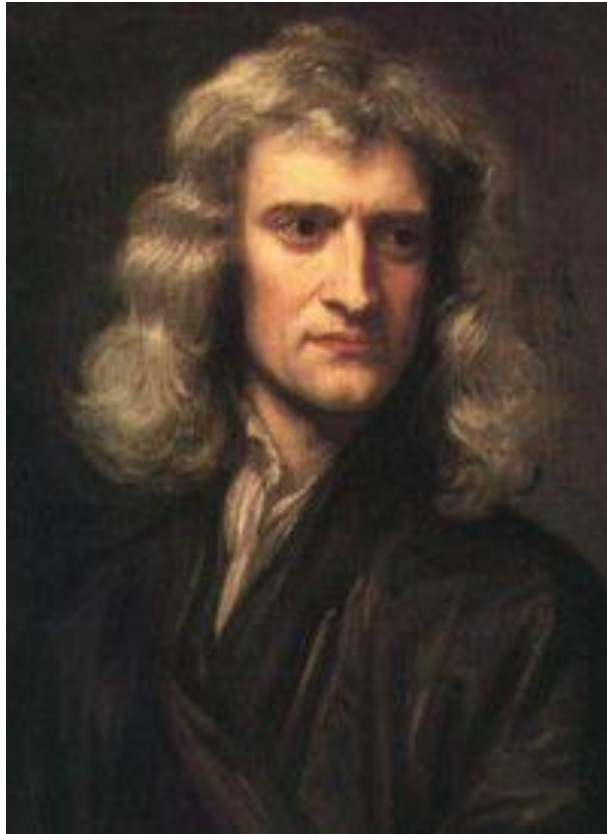
- В своих сочинениях «Новая астрономия» и «Стереометрия винных бочек» правильно вычислил ряд площадей и объемов.

Барроу Исаак



- Оставил способы изучения криволинейных фигур и метод касательных, в чём многие видели предвестника дифференциального исчисления.

НЬЮТОН Исаак



- Одновременно с Г. Лейбницем, но независимо от него, создал дифференциальное и интегральное исчисления.
- Вместе с Г. В. Лейбницем считается основоположником дифференциальног

БУНЯКОВСКИЙ Виктор



- Сделал перевод сочинений Коши о дифференциальном и интегральном исчислениях, причём присоединил к этому переводу свои примечания, а также составил, по поручению министерства народного просвещения, несколько учебных

ОСТРОГРАДСКИЙ Михаил



- Метод выделения рациональной части неопределенного интеграла от рациональной дроби

ЧЕБЫШЕВ

Пафнутий Львович



- По интегральному исчислению особенно замечателен мемуар 1860 г.: «Sur l'intégration de la différentielle», в котором даётся способ узнать при помощи конечного числа действий, в случае рациональных коэффициентов подкоренного полинома, возможно ли определить число A так, чтобы данное выражение интегрировалось в логарифмах и, в случае

РИМАН Бердхард



- Предложил исследовать внутреннюю геометрию пространств, тем самым заложил основы дифференциальной геометрии и подготовив фундамент для общей теории относительности
- Рассмотрел формализацию понятия интеграла и ввёл своё определение — интеграл

Вычисление площади криволинейной трапеции

- На отрезке $[a; \hat{a}]$ функция $f(x) \geq 0$

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Вычисление объемов тел с
помощью
определенного интеграла.

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

Вычисление пути

- Перемещение точки, движущейся по прямой со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени $[a; b]$, вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b v(t) dt$$

Вычисление массы неоднородного стержня и координаты центра масс

- а) суммарная масса M стержня равна

$$m = \int_a^b \rho(x) dx$$

- в) координата центра масс равна

$$x = \frac{1}{M} \int_a^b x \rho(x) dx$$

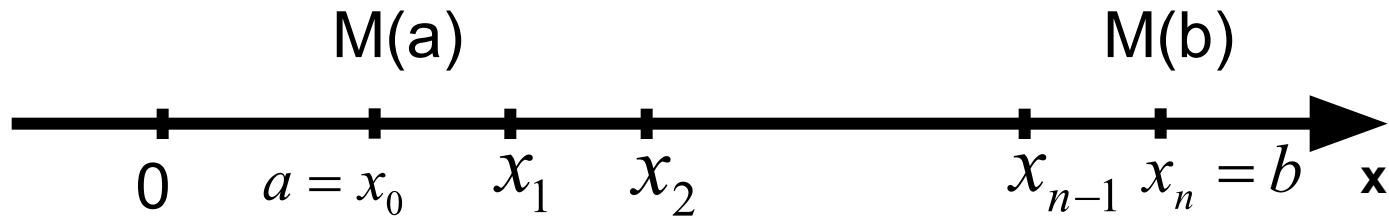
Работа переменной силы



Пусть точка движется по оси Ox под действием силы, проекция которой на ось Ox есть функция f от x . При этом мы будем предполагать, что f есть непрерывная функция. Под действием этой силы материальная точка переместилась из точки $M(a)$ в точку $M(b)$. Покажем, что в этом случае работа A подсчитывается по формуле

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Работа переменной силы



Разобьём отрезок $[a; b]$ на n отрезков
одинаковой длины

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Т. к. $f(x)$ – непрерывная функция от x , при достаточно малом отрезке $[a; b]$ работа силы на этом отрезке приближенно равна $f(a)(x_1 - a)$. Т. о. работа силы на n -м отрезке приближенно равна $f(x_{n-1})(b - x_{n-1})$.

Работа переменной силы

Значит, работа силы на всем отрезке

$$\begin{aligned} A &\approx A_n = f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = \\ &= \frac{b-a}{n} (f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) \end{aligned}$$

Приближенное равенство переходит в точное, если считать, что $n \rightarrow \infty$

$$A_n = \frac{b-a}{n} (f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) \rightarrow A$$

Этапы работы над задачей

- Исследовать физическую ситуацию
- Перевести содержание задачи на язык функций
- Применить математические методы для решения задачи
- Проанализировать полученный результат

Задача 1



Нефть, подаваемая в цилиндрический бак через отверстие в дне, заполняет весь бак. Определите затраченную при этом работу. Высота бака – h , а радиус основания R .

Задача 2



Канал имеет в разрезе форму равнобедренной трапеции высотой h с основаниями a и b .
Найдите силу, с которой вода, заполняющая канал, давит на плотину.

Задача 3



- Вычислите работу, которую необходимо совершить, чтобы поднять тело массой m с поверхности Земли на высоту h

Слово интеграл от латинского **integer** – целый.

Интеграция – восстановление, восполнение, воссоединение.

Интегрирование – процесс объединения отдельных частей в целое.

Задача.

Пружина жёсткостью $K=1000$ Н/м растянута на 6 см. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть эту пружину дополнительно еще на 8 см?

Первый способ решения

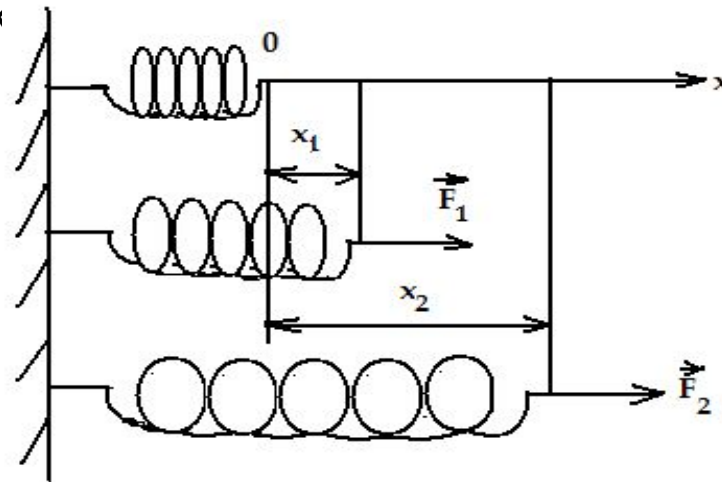
Пусть x_1 – начальное удлинение пружины, тогда x_2 – удлинение ее после дополнительного растяжения, тогда $x_2 = x_1 + \Delta x$ и изменение длины пружины $\Delta x = x_2 - x_1$.

Учитывая закон Гука: $F_{\text{упр}} = k x$, и то, что сила упругости при деформации

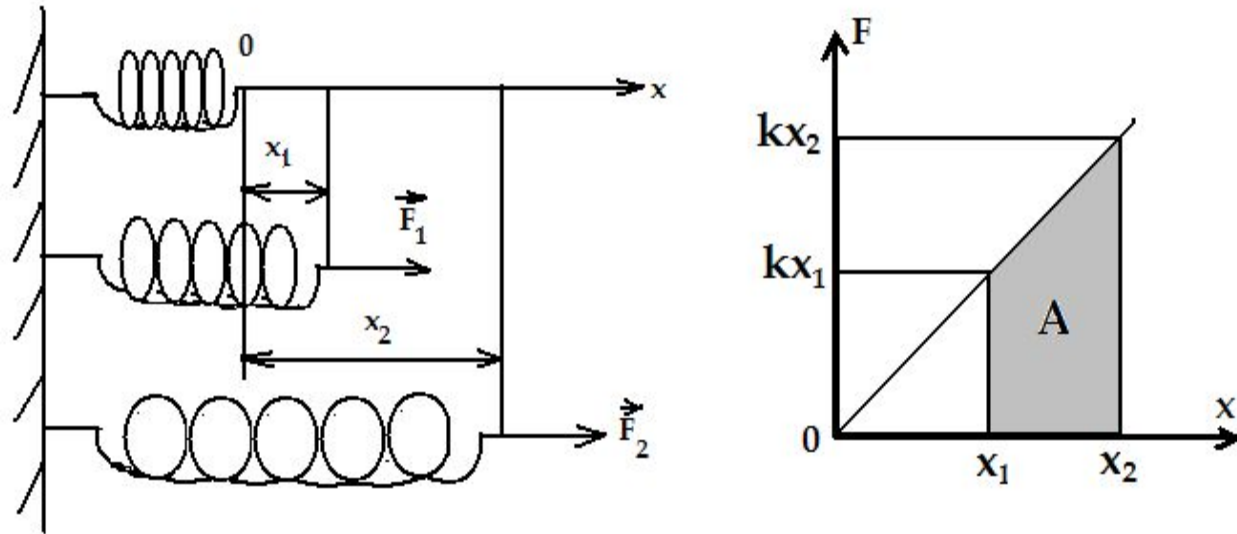
пружины изменяется, вычисляем работу $A = F_{\text{сред}} \cdot \Delta x = F_{\text{сред}} (x_2 - x_1)$
 $= (F_1 + F_2) \cdot$

$$\cdot (x_2 - x_1) / 2 = (k$$
$$= 8 \text{ Дж}$$

$$= k(x_1 + \Delta x)^2 / 2 - kx_1^2 / 2$$



Второй способ решения



Из курса математики известно, что работа вычисляется с помощью интеграла:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds$$

Учитывая закон Гука $F=kx$, найдем работу силы при растяжении от x_1 до x_2

$$A = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = kx_2^2/2 - kx_1^2/2 = k(x_1^2 + \Delta x)^2/2 - kx_1^2/2 = 8 \text{ Дж}$$