Тема урока

- Приложения определенного интеграла к решению физических задач

Цель урока

- Познакомиться с историей развития интегрального и дифференциального исчисления
- Научиться применять интеграл для решения физических задач

Вычисление площади криволинейной трапеции

- На отрезке $\left[a;\hat{a}\right]$ функция $f(x) \geq 0$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Вычисление объемов тел с помощью определенного интеграла.

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

Вычисление пути

- Перемещение точки, движущейся по прямой со скоростью v = v (t), за промежуток времени $\left[a;b\right]$, вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b v(t)dt$$

Вычисление массы неоднородного стержня и координаты центра масс

- а) суммарная масса М стержня равна

$$m = \int_a^b \rho(x)dx$$

- в) координата центра масс равна

$$x \;= \frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)dx$$

Интеграл

БЕРНУЛЛИ Якоб

- **Слово интеграл**
- **Внес существенный вклад в разработку основ дифференциального и интегрального исчислений, аналитической геометрии, теории вероятностей и вариационного исчисления. Решил проблему Лейбница об изохронной кривой, исследовал логарифмическую спираль, ввел полярные координаты.**

БЕРНУЛЛИ Иоганн

- В 1697 опубликовал работу по экспоненциальному исчислению, в которой впервые сформулировал задачу о брахистохроне;
- Ряд открытий в области интегрального и дифференциального исчислений

ЛЕЙБНИЦ Готфрид Фридрих

- **Наряду с Ньютоном и независимо от него, создал дифференциальное и интегральное исчисления.**
- **Ввёл применяемое и сегодня обозначение производной df/dx.**
- **Ввёл бинарную систему счисления с цифрами 0 и 1, на котором базируется современная компьютерная**

Фурье

- **Доказал теорему о числе действительных корней алгебраического уравнения, лежащих между данными пределами**
- **Нашел формулу представления функции с помощью интеграла, играющую важную роль в современной математике.**
- **Доказал, что всякую произвольно начерченную линию, составленную из отрезков дуг разных**

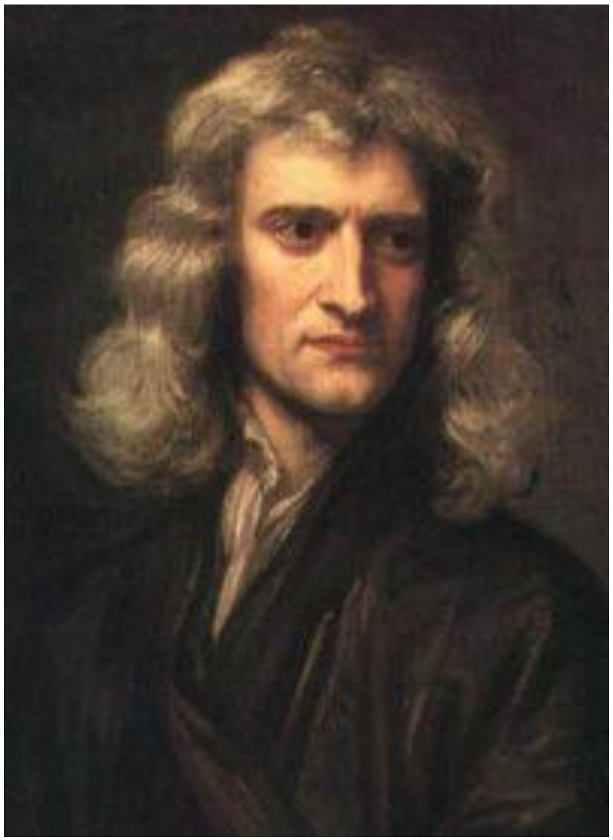
КЕПЛЕР Иоганн

- В своих сочинениях «Новая астрономия» и «Стереометрия винных бочек» правильно вычислил ряд площадей и объемов.

Барроу Исаак

- Оставил способы изучения криволинейных фигур и метод касательных, в чём многие видели предвестника дифференциального исчисления.

НЬЮТОН Исаак



- Одновременно с Г. Лейбницем, но независимо от него, создал дифференциальное и интегральное исчисления.
- Вместе с Г. В. Лейбницем считается основоположником дифференциальног

БУНЯКОВСКИЙ Виктор

- **Сделал перевод сочинений Коши о дифференциальном и интегральном исчислениях, причём присоединил к этому переводу свои примечания, а также составил, по поручению министерства народного просвещения, несколько учебных**

ОСТРОГРАДСКИЙ Михаил

- Метод выделения рациональной части неопределенного интеграла от рациональной дроби

ЧЕБЫШЕВ Пафнутий Львович

- **По интегральному исчислению особенно замечателен мемуар 1860 г.: «Sur l'intégration de la différentielle», в котором даётся способ узнать при помощи конечного числа действий, в случае рациональных коэффициентов подкоренного полинома, возможно ли определить число А так, чтобы данное выражение интегрировалось в логарифмах и, в случае**

РИМАН Бердхард

- **Предложил исследовать внутреннюю геометрию пространств, тем самым заложил основы дифференциальной геометрии и подготовив фундамент для общей теории относительности**
- **Рассмотрел формализацию понятия интеграла и ввёл своё определение — интеграл**

Вычисление площади криволинейной трапеции

- На отрезке $\left[a;\hat{a}\right]$ функция $f(x) \geq 0$

$$S = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Вычисление объемов тел с помощью определенного интеграла.

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

Вычисление пути

- Перемещение точки, движущейся по прямой со скоростью v = v (t), за промежуток времени $[a;b]$, вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b v(t)dt$$

Вычисление массы неоднородного стержня и координаты центра масс

- а) суммарная масса М стержня равна

$$m = \int_a^b \rho(x)dx$$

- в) координата центра масс равна

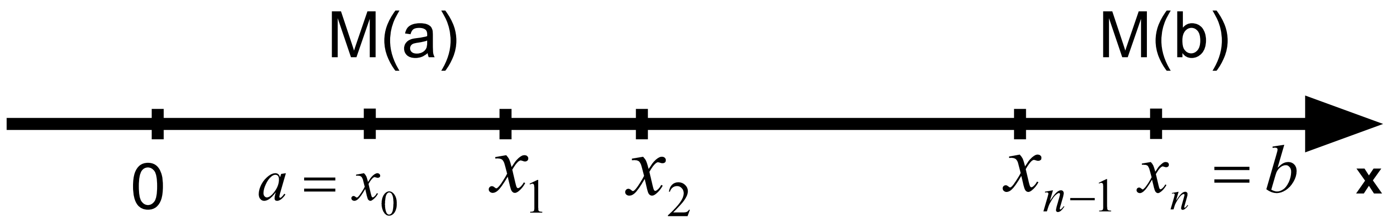
$$x \ = \frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)dx$$

Работа переменной силы

Пусть точка движется по оси Ох под действием силы, проекция которой на ось Ох есть функция f от x. При этом мы будем предполагать, что f есть непрерывная функция. Под действием этой силы материальная точка переместилась из точки М(a) в точку М(b). Покажем, что в этом случае работа А подсчитывается по формуле

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Работа переменной силы



Разобьём отрезок [a;b] на n отрезков одинаковой длины

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Т. к. f (x) – непрерывная функция от x, при достаточно малом отрезке [a;b] работа силы на этом отрезке приближенно равна f(a)(x_1-a). Т. О. работа силы на n-м отрезке приближенно равна f(x_{n-1})(b - x_{n-1}).

Работа переменной силы

Значит, работа силы на всем отрезке

$$A \approx A_n = f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x =$$

$$= \frac{b-a}{n}(f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))$$

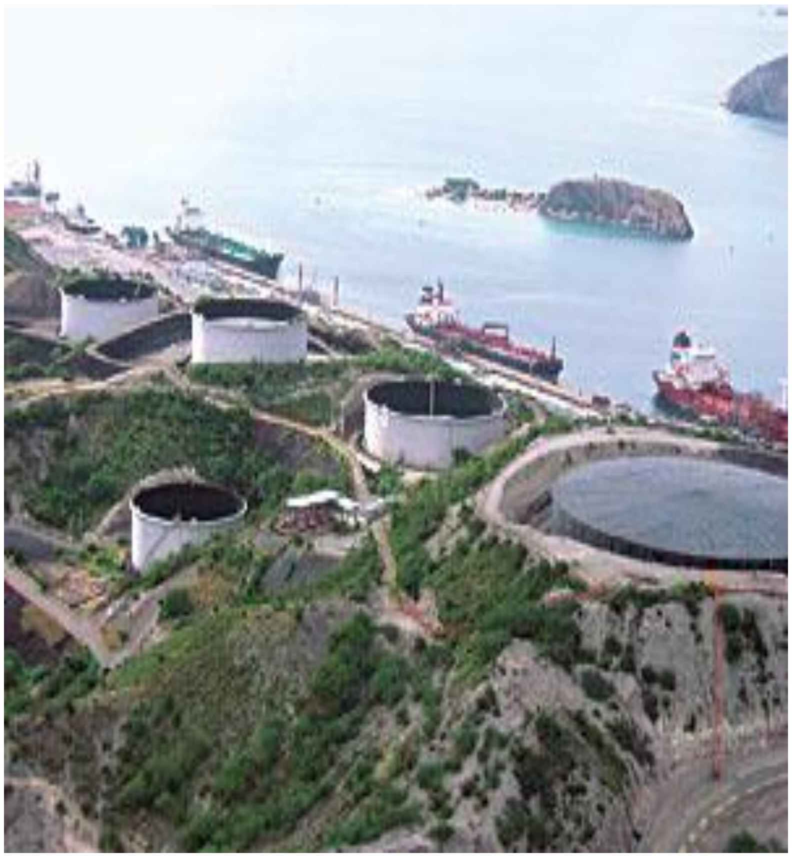
Приближенное равенство переходит в точное, если считать , что $n \to \infty$

$$A_n = \frac{b-a}{n}(f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})) \to A$$

Этапы работы над задачей

- Исследовать физическую ситуацию
- Перевести содержание задачи на язык функций
- Применить математические методы для решения задачи
- Проанализировать полученный результат

Задача 1



Нефть, подаваемая в цилиндрический бак через отверстие в дне, заполняет весь бак. Определите затраченную при этом работу. Высота бака – h, а радиус основания R.

Задача 2

Канал имеет в разрезе форму равнобедренной трапеции высотой *h* с основаниями *a* и *b*.

Найдите силу, с которой вода, заполняющая канал, давит на плотину.

Задача 3

- Вычислите работу, которую необходимо совершить, чтобы поднять тело массой m с поверхности Земли на высоту h

Слово интеграл от латинского **integer** – целый.

Интеграция – восстановление, восполнение, воссоединение.

Интегрирование – процесс объединения отдельных частей в целое.

Задача.

Пружина жёсткостью K=1000 Н/м растянута на 6 см. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть эту пружину дополнительно еще на 8 см?

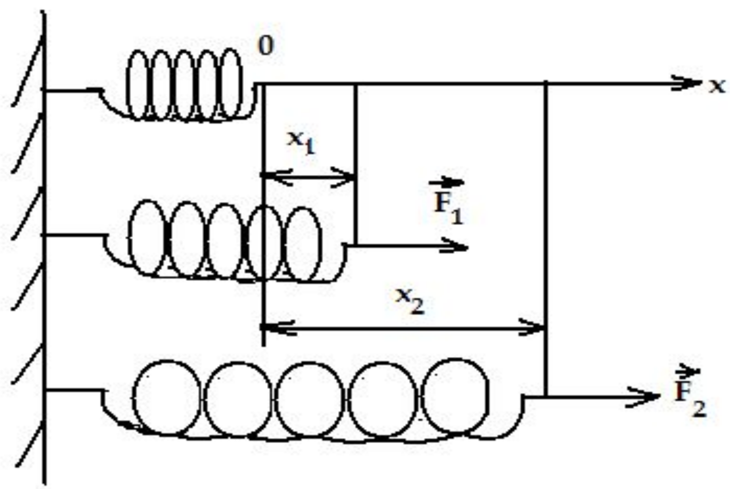
Первый способ решения

Пусть x_1 – начальное удлинение пружины, тогда x_2 – удлинение ее после дополнительного растяжения, тогда $x_2 = x_1 + \Delta x$ и изменение длины пружины $\Delta x = x_2 - x_1$.

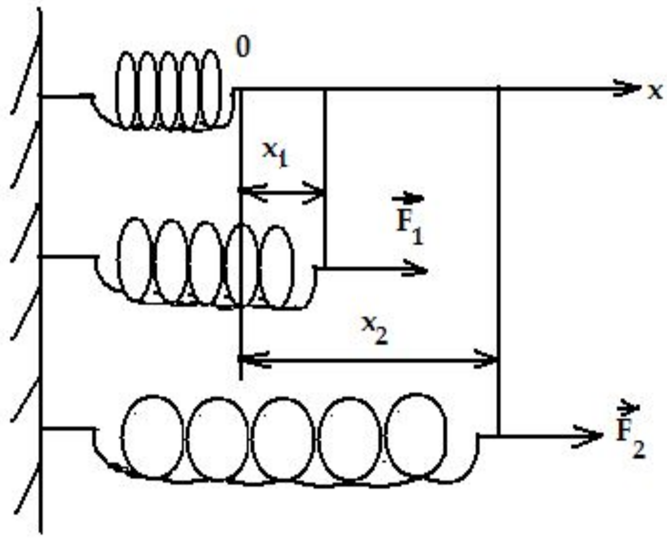
Учитывая закон Гука: $F_{упр} = k\ x$, и то, что сила упругости при деформации

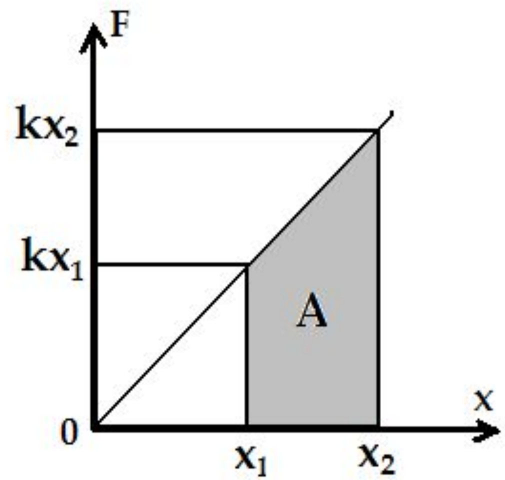
пружины изменяется, вычисляем работу $A = F_{сред} \cdot \Delta x = F_{сред}\ (x_2 - x_1) = (F_1 + F_2) \cdot$

$\cdot (x_2 - x_1)\ /2 = (k$ $= k(x_1 + \Delta x)^2 /2 - kx_1^2 /2 = 8Дж$



Второй способ решения





Из курса математики известно, что работа вычисляется с помощью интеграла:

$A=\int_{s_1}^{s_2} F_s\,ds$

Учитывая закон Гука F=kx, найдем работу силы при растяжении от x_1 до x_2

$$A=\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = kx_2^2/2 - kx_1^2/2 = k(x_1^2+\Delta x)2\ /2 - kx_1^2/2 = 8Дж$$