

# Тема урока

- Приложения определенного интеграла к решению физических задач

# Цель урока

- Познакомиться с историей развития интегрального и дифференциального исчисления
- Научиться применять интеграл для решения физических задач

# Вычисление площади криволинейной трапеции

- На отрезке  $[a; \hat{a}]$  функция  $f(x) \geq 0$

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

**Вычисление объемов тел с  
помощью  
определенного интеграла.**

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

# Вычисление пути

- Перемещение точки, движущейся по прямой со скоростью  $v = v(t)$ , за промежуток времени  $[a; b]$ , вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b v(t) dt$$

# Вычисление массы неоднородного стержня и координаты центра масс

- а) суммарная масса  $M$  стержня равна

$$m = \int_a^b \rho(x) dx$$

- в) координата центра масс равна

$$x = \frac{1}{M} \int_a^b x \rho(x) dx$$

Интеграл

# БЕРНУЛЛИ Якоб



- Слово интеграл
- Внес существенный вклад в разработку основ дифференциального и интегрального исчислений, аналитической геометрии, теории вероятностей и вариационного исчисления. Решил проблему Лейбница об изохронной кривой, исследовал логарифмическую спираль, ввел полярные координаты.



# БЕРНУЛЛИ

## Иоганн



- В 1697 опубликовал работу по экспоненциальному исчислению, в которой впервые сформулировал задачу о брахистохроне;
- Ряд открытий в области интегрального и дифференциального исчисления

# ЛЕЙБНИЦ

Готфрид

Фридрих



Фридриху с Ньютоном и независимо от него, создал дифференциальное и интегральное исчисления.

- Ввёл применяемое и сегодня обозначение производной  $df/dx$ .
- Ввёл бинарную систему счисления с цифрами 0 и 1, на котором базируется современная компьютерная

# Фурье



- Доказал теорему о числе действительных корней алгебраического уравнения, лежащих между данными пределами
- Нашел формулу представления функции с помощью интеграла, играющую важную роль в современной математике.
- Доказал, что всякую произвольно начерченную линию, составленную из отрезков двух разных

# КЕПЛЕР Иоганн



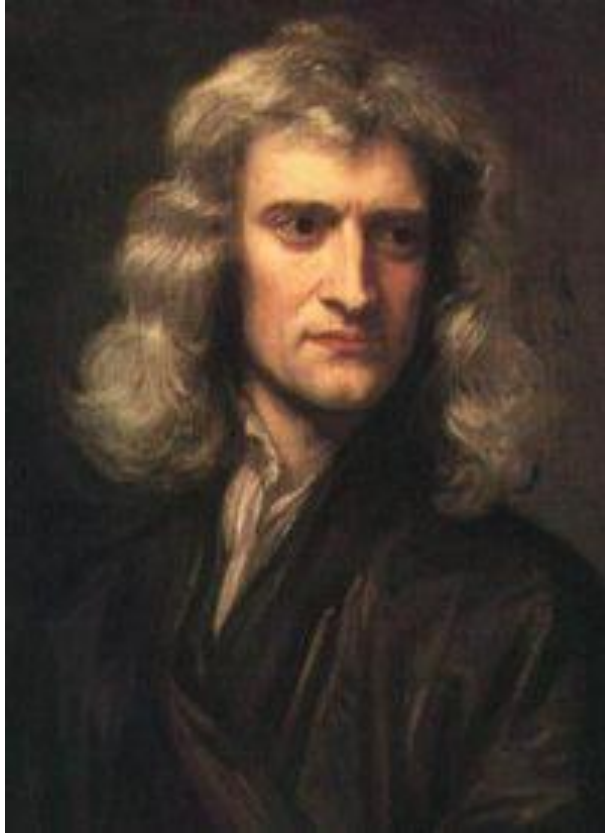
- В своих сочинениях «Новая астрономия» и «Стереометрия винных бочек» правильно вычислил ряд площадей и объемов.

# Барроу Исаак



- Оставил способы изучения криволинейных фигур и метод касательных, в чём многие видели предвестника дифференциального исчисления.

# НЬЮТОН Исаак



- Одновременно с Г. Лейбницем, но независимо от него, создал дифференциальное и интегральное исчисления.
- Вместе с Г. В. Лейбницем считается основоположником дифференциальног

# БУНЯКОВСКИЙ Виктор



- Сделал перевод сочинений Коши о дифференциальном и интегральном исчислениях, причём присоединил к этому переводу свои примечания, а также составил, по поручению министерства народного просвещения, несколько учебных

# ОСТРОГРАДСКИЙ Михаил



- Метод выделения рациональной части неопределенного интеграла от рациональной дроби



# ЧЕБЫШЕВ

## Пафнутий Львович



- По интегральному исчислению особенно замечателен мемуар 1860 г.: «*Sur l'intégration de la différentielle*», в котором даётся способ узнать при помощи конечного числа действий, в случае рациональных коэффициентов подкоренного полинома, возможно ли определить число  $A$  так, чтобы данное выражение интегрировалось в логарифмах и, в случае

# РИМАН Бердхард



- Предложил исследовать внутреннюю геометрию пространств, тем самым заложил основы дифференциальной геометрии и подготовив фундамент для общей теории относительности
- Рассмотрел формализацию понятия интеграла и ввёл своё определение — интеграл

# Вычисление площади криволинейной трапеции

- На отрезке  $[a; \hat{a}]$  функция  $f(x) \geq 0$

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Вычисление объемов тел с  
помощью  
определенного интеграла.

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

## Вычисление пути

- Перемещение точки, движущейся по прямой со скоростью  $v = v(t)$ , за промежуток времени  $[a; b]$ , вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b v(t) dt$$

# Вычисление массы неоднородного стержня и координаты центра масс

- а) суммарная масса  $M$  стержня равна

$$m = \int_a^b \rho(x) dx$$

- в) координата центра масс равна

$$x = \frac{1}{M} \int_a^b x \rho(x) dx$$

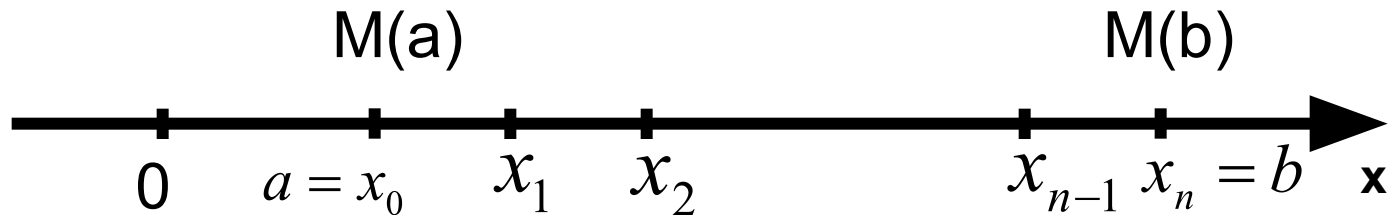
# Работа переменной силы



Пусть точка движется по оси  $Ox$  под действием силы, проекция которой на ось  $Ox$  есть функция  $f$  от  $x$ . При этом мы будем предполагать, что  $f$  есть непрерывная функция. Под действием этой силы материальная точка переместилась из точки  $M(a)$  в точку  $M(b)$ . Покажем, что в этом случае работа  $A$  подсчитывается по формуле

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

# Работа переменной силы



Разобьём отрезок  $[a;b]$  на  $n$  отрезков  
одинаковой длины

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Т. к.  $f(x)$  – непрерывная функция от  $x$ , при достаточно малом отрезке  $[a;b]$  работа силы на этом отрезке приближенно равна  $f(a)(x_1 - a)$ . Т. О. работа силы на  $n$ -м отрезке приближенно равна  $f(x_{n-1})(b - x_{n-1})$ .



# Работа переменной силы

Значит, работа силы на всем отрезке

$$\begin{aligned} A \approx A_n &= f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = \\ &= \frac{b-a}{n} (f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) \end{aligned}$$

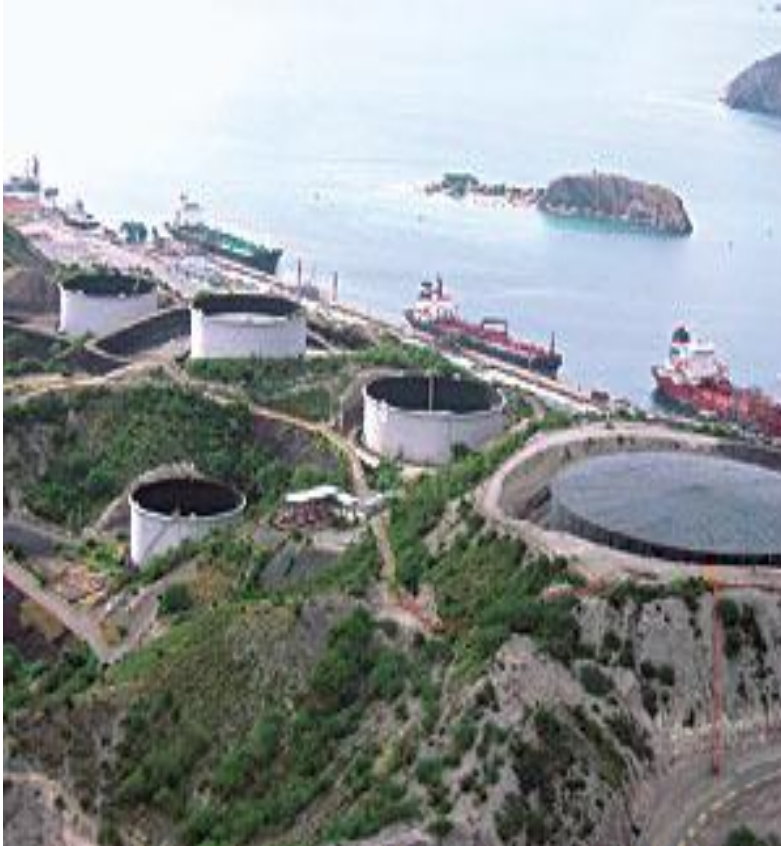
Приближенное равенство переходит в точное,  
если считать, что  $n \rightarrow \infty$

$$A_n = \frac{b-a}{n} (f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) \rightarrow A$$

## Этапы работы над задачей

- Исследовать физическую ситуацию
- Перевести содержание задачи на язык функций
- Применить математические методы для решения задачи
- Проанализировать полученный результат

# Задача 1



Нефть, подаваемая в цилиндрический бак через отверстие в дне, заполняет весь бак. Определите затраченную при этом работу. Высота бака –  $h$ , а радиус основания  $R$ .

# Задача 2



Канал имеет в разрезе форму равнобедренной трапеции высотой  $h$  с основаниями  $a$  и  $b$ .  
Найдите силу, с которой вода, заполняющая канал, давит на плотину.

# Задача 3



- Вычислите работу, которую необходимо совершить, чтобы поднять тело массой  $m$  с поверхности Земли на высоту  $h$

Слово интеграл от латинского **integer** – целый.

**Интеграция** – восстановление, восполнение, воссоединение.

**Интегрирование** – процесс объединения отдельных частей в целое.

## Задача.

**Пружина жёсткостью  $K=1000$  Н/м растянута на 6 см. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть эту пружину дополнительно еще на 8 см?**

### Первый способ решения

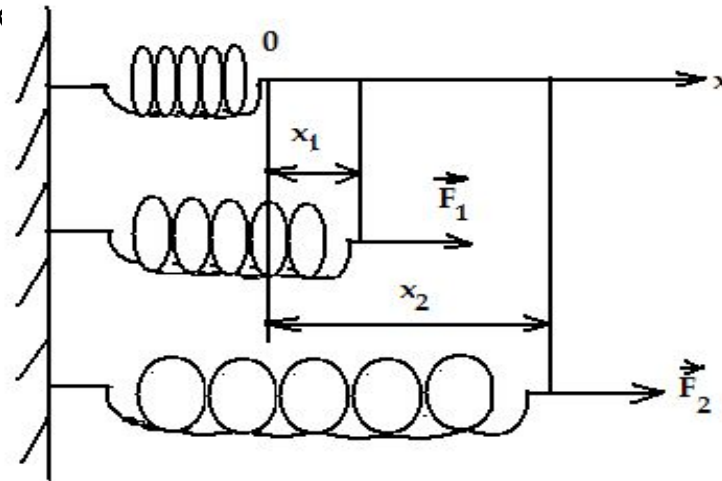
Пусть  $x_1$  – начальное удлинение пружины, тогда  $x_2$  – удлинение ее после дополнительного растяжения, тогда  $x_2 = x_1 + \Delta x$  и изменение длины пружины  $\Delta x = x_2 - x_1$ .

Учитывая закон Гука:  $F_{\text{упр}} = k x$ , и то, что сила упругости при деформации

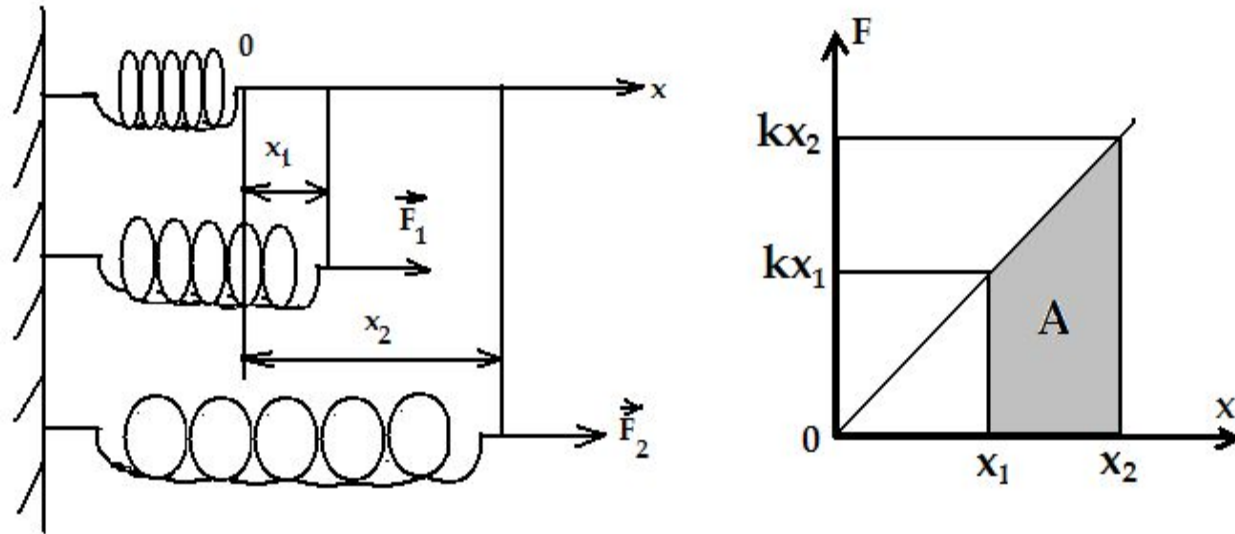
пружины изменяется, вычисляем работу  $A = F_{\text{сред}} \cdot \Delta x = F_{\text{сред}} (x_2 - x_1)$   
 $= (F_1 + F_2) \cdot$

$$\cdot (x_2 - x_1) / 2 = (k$$
$$= 8 \text{ Дж}$$

$$= k(x_1 + \Delta x)^2 / 2 - kx_1^2 / 2$$



## Второй способ решения



Из курса математики известно, что работа вычисляется с помощью интеграла:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds$$

Учитывая закон Гука  $F=kx$ , найдем работу силы при растяжении от  $x_1$  до  $x_2$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = kx_2^2/2 - kx_1^2/2 = k(x_1^2 + \Delta x)^2/2 - kx_1^2/2 = 8 \text{ Дж}$$