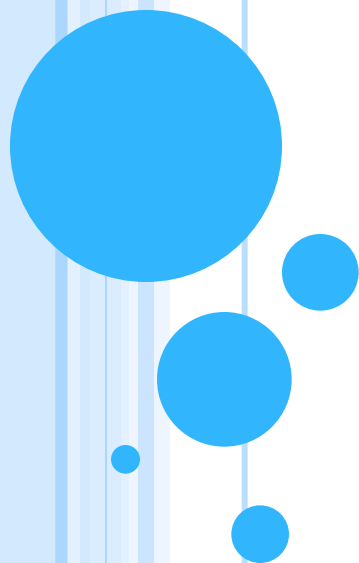


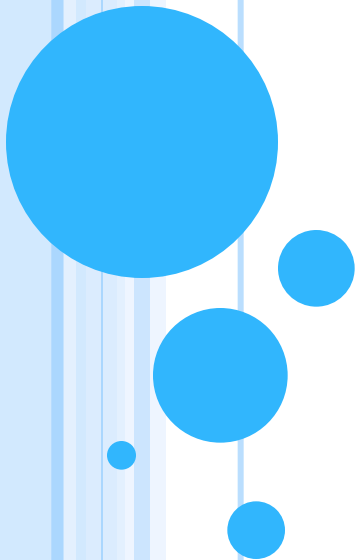
# **«Применение дискретных неравенств в исследовании разностных динамических систем»**

**Ким Екатерина  
Лян Анастасия  
Ученицы 12С  
НИШ  
г. Талдыкорган**

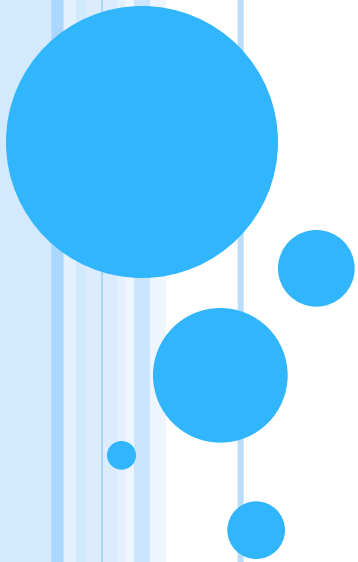


## **ЦЕЛЬ РАБОТЫ:**

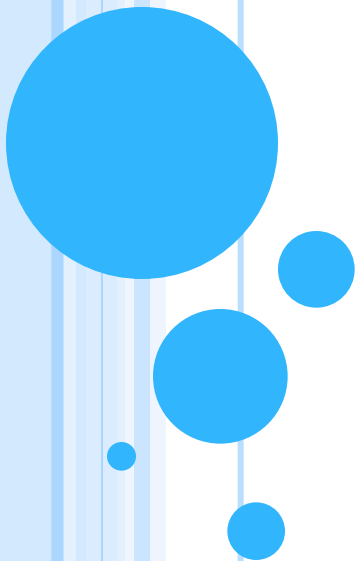
**Получить различные дискретные неравенства и систематизировать различные типы дискретных неравенств, которые могут использоваться в теории устойчивости РДС.**



**Актуальность работы  
и  
Научная новизна исследования**



# Неравенства Беллмана, Бихари, Гронуолла



## Лемма

### о дискретном аналоге неравенства Беллмана

$$(1.1) \quad x(n) \leq \omega(n) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \cdot x(s), \quad \forall n/n \in N_0$$

(

$$1.2) \quad x(n) \leq \omega(n) \cdot \prod_{s=0}^{n-1} [1 + f(s)] \quad , \quad \forall n/n \in N_0$$



## Гронуолла

Если  $U(n) \leq C + \sum_{s=0}^{n-1} v(s)U(s)$ , то

$$U(n) \leq C * \exp(\sum_{s=0}^{n-1} v(s))$$

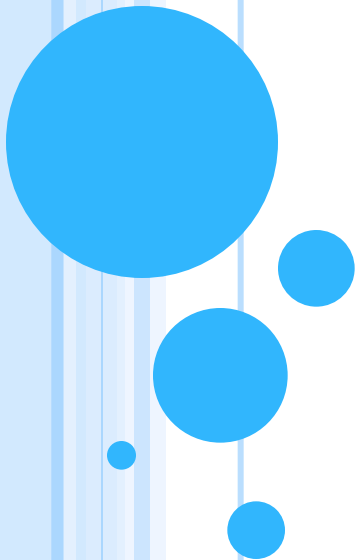
## Бихари

Если  $U(n) \leq C + \sum_{s=0}^{n-1} v(s)[U(s)]^\tau$ , то

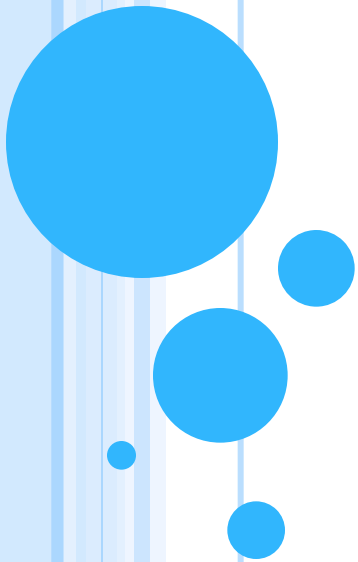
$$U(n) \leq C * \left[ 1 - (\tau - 1)C^{\tau-1} \sum_{s=0}^{n-1} v(s) \right]^{-\frac{1}{\tau-1}}$$



**Применение  
дискретных неравенств  
к исследованию РДС**



**Оценки решения  
нелинейных разностных  
динамических систем**





$$x_{n+1} = A(n) + f(n, x_n), \quad n > 0, \quad x_n \in R^n$$

**(2.1**

$$y_{n+1} = A(n)y_n$$

$$y_n = A(n-1) \cdot A(n-2) \cdot \square \cdot A(0)y_0$$



□ Обозначим

$$(2.1.4) \quad y_n = A(n-1) \cdot A(n-2) \cdot \dots \cdot A(0)y_0 = \Phi(n,0)y_0$$

Теперь возьмем некоторую функцию  $y_0(n) = y_0$ , тогда получим

$$\Phi(n+1,0)y_0(n+1) = A(n)\Phi(n,0)y_0(n) + f(n, y_n)$$

так как

$$\Phi(n+1,0)y_0(n) = A(n)\Phi(n,0)y_0(n)$$

то

$$\Phi(n+1,0) = A(n)\Phi(n,0)$$



□ Это даст

$$\Phi(n+1,0)y_0(n+1) = \Phi(n+1,0)y_0(n) + f(n, y_n)$$

$$\Phi(n+1,0)y_0(n+1) - \Phi(n+1,0)y_0(n) = f(n, y_n)$$

$$\Phi(n+1,0)[y_0(n+1) - y_0(n)] = f(n, y_n)$$

$$y_0(n+1) - y_0(n) = \Phi^{-1}(n+1,0)f(n, y_n)$$



□ Варьируя по  $n$  получим

$$(2.1.5) \quad y_0(n) = y_0(0) + \sum_{j=0}^n \Phi^{-1}(j+1,0) f(j, y_j)$$

где  $y_0(0) = \text{const}$

Подставим (2.1.5) в (2.1.4), получим

$$\begin{aligned} y_n &= \Phi(n,0) \left( y_0(0) + \sum_{j=0}^n \Phi^{-1}(j+1,0) f(j, y_j) \right) = \\ &= \Phi(n,0) y_0(0) + \sum_{j=0}^n \Phi(n,0) \Phi^{-1}(j+1,0) f(j, y_j) \end{aligned}$$



По свойству модуля имеем

$$|y_n| \leq |\Phi(n,0)y_0(0)| + \sum_{j=0}^n |\Phi(n,0)\Phi^{-1}(j+1,0)| \cdot |f(j, y_j)|$$

Пусть вектор функция удовлетворяет условию

$$(2.1.6) \quad |f(j, y_j)| < \gamma(j)|y_j|^\alpha, \quad \forall j \geq 0$$

где  $\alpha$  некоторое положительное число,

$$\alpha \geq 1, \quad \gamma(j) < \varepsilon$$

$\varepsilon$  - сколь угодно малое положительное число, тогда получим следующее неравенство

$$|y_n| \leq |\Phi(n,0)y_0(0)| + \sum_{j=0}^n |\Phi(j,0)\Phi^{-1}(j+1,0)| \cdot \gamma(j)|y_j|^\alpha$$



Введем обозначения

$$\varphi(n) = |\Phi(n,0)y_0(0)|, \text{ и } \psi(j) = |\Phi(j,0)\Phi^{-1}(j+1,0)| \cdot \gamma(j)$$

получим

$$|y_n| \leq \varphi(n) + \sum_{j=0}^n \psi(j) |y_j|^\alpha, \text{ где } \varphi(n) = C$$

$$|y_n| \leq C + \sum_{j=0}^n \psi(j) |y_j|^\alpha$$

Применяя лемму 1, получим следующую оценку

$$(2.1.7) \quad |y_n| \leq C \cdot \left[ 1 - (\alpha - 1) C^{\alpha-1} \sum_{s=0}^{n-1} \psi(s) \right]^{-\frac{1}{\alpha-1}}, \forall n \geq 0$$

$$\text{где } \psi(j) = |\Phi(j,0)\Phi^{-1}(j+1,0)| \cdot \gamma(j)$$

так как  $\gamma(j) < \varepsilon$ , то

$$(2.1.8) \quad |y_n| \leq C + \varepsilon$$



## Теорема 2.1.1

- Если нелинейная часть РДС

$$(2.1.1) \quad x_{n+1} = A(n) + f(n, x_n) \quad n > 0, \quad x_n \in R^n$$

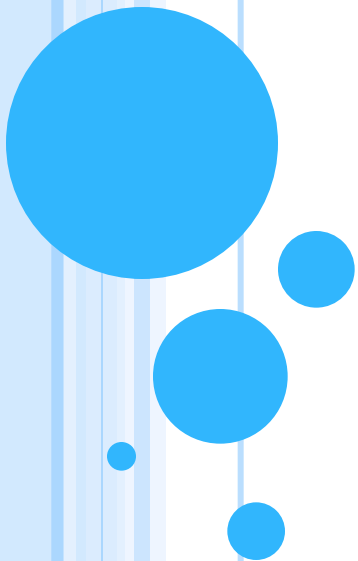
в окрестности начала координат удовлетворяет условию

$$(2.1.6) \quad |f(j, y_j)| < \gamma(j) |y_j|^\alpha \quad \forall j \geq 0$$

то ее решение оценивается сверху неравенством

$$(2.1.8) \quad |y_n| \leq C + \varepsilon$$

Получены некоторые новые  
дискретные неравенства, которые  
позволяют судить об устойчивости РДС





## ТЕОРЕМА 2.1.2

- Пусть,  $U_n, \varphi(n), f(n)$ - неотрицательные функции.  
Если при  $a > 0, p > 1$  выполняется неравенство

$$(2.1.9) \quad U_n \leq a + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(j)U_j + \sum_{j=0}^{n-1} f(j)U_j^p$$

**Тогда**  $(2.1.10) \quad U_n \leq \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} \left\{ a^{1-p} + (1-p) \sum_{j=0}^{n-1} f(j) \left( \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^q \right\}^{\frac{1}{p}}$



Доказательство: Отметим

$$(2.1.11) \quad \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} - \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} = -\varphi(n) \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1}$$

$$\prod_{j=0} (1 + \varphi(j))^{-1} = 1$$

Положим  $z_0 = a$ , тогда

$$(2.1.12) \quad z_n = a + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(j)U_j + \sum_{j=0}^{n-1} f(j)U_j^p, \quad n \geq 0$$

Очевидно, что  $U_n \leq z_n$  при  $n \geq 0$

Из того, что  $z_{n+1} - z_n = \varphi(n)U_n + f(n)U_n^p$



находим

$$(2.1.13) \quad z_{n+1} - z_n - \varphi(n)z_n \leq f(n)z_n^p$$

Умножая обе части неравенства 2.1.13 на  $\prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1}$  и учитывая, 2.1.11 преобразуем его. Получим оценку

$$(2.1.14) \quad z_{n+1} \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} - z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} \leq f(n) \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} z_n^p$$

Далее, пусть  $q = 1 - p$ . Преобразуем левую часть неравенства (2.1.14) к виду

$$(2.1.15) \quad \frac{\left( z_{n+1} \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^p - \left( z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^q}{D} = \\ = q \left( z_n \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} - z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} \right)$$



где  $D$  - некоторое значение, находящееся между

$$z_{n+1} \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \quad \text{и} \quad z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1}$$

Из того, что  $z_n$  - неубывающая, а

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} \leftrightarrow \quad - \text{невозрастающая, следует}$$

$$D > z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} \geq z_n \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1}$$

если

$$z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} < z_{n+1} \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1}$$



$$\text{и } D > z_{n+1} \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \geq z_n \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1}$$

$$\text{если } z_{n+1} \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} < z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1}$$

Из 2.1.13 и 2.1.15 получаем

$$(2.1.16) \quad \left( z_n \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^p - \left( z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^q \leq qf(n) \left( \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^q$$

$$\text{при } q < 0, (p > 1)$$

Учитывая, что  $z_0 = a$ , и суммируя (2.1.16) по  $n$  от 0 до  $n+1$  находим

$$(2.1.17) \quad \left( z_n \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^p \leq a^q + q \sum_{j=0}^{n-1} f(j) \left( \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^q$$

$$\text{при } q < 0, (p > 1)$$



## Теорема 2.1.3

- Пусть функции  $U_n$  и  $g_n$  непрерывны и функции  $a_n$ ,  $b_n$  - суммируемы, предположим, что  $a_n$ ,  $b_n$  неотрицательны на  $N$  и удовлетворяют неравенству

$$(2.1.26) \quad U_n \leq a_n + b_n \sum_{k=n_0}^{n-1} g_k U_k, \quad n \in N,$$

тогда справедливо неравенство

$$(2.1.27) \quad U_n \leq a_n + b_n \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k g_k \prod_{s=k+1}^{n-1} [1 + b_s g_s]$$

## Рассмотрим разностную динамическую систему

$$(2.1.32) \quad x_{n+1} = A(n)x_n + f(n, x_n) \quad x_{n_0} = x_0$$

Представим решение  $x(n, x_0)$  РДС (2.1.32) в следующем виде

$$(2.1.33) \quad x_n = X(n, n_0)x_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} X^{-1}(n_0, k)f(k, x_k)$$

где  $X(n, n_0)$  — фундаментальная матрица  
линейной РДС:

$$x_{n+1} = A(n)x_n$$



Из соотношения

$$|f(k, x_k)| < \gamma(k)|x_k|, \quad \forall k \geq 0$$

где  $\alpha$  - некоторое положительное число,

$$\alpha \geq 1, \quad \gamma(k) < \varepsilon,$$

$\varepsilon$  - сколь угодно малое положительное число, получим следующее неравенство

$$|x_n| \leq |X(n, n_0)x_0| + \sum_{k=n_0}^{n-1} |X^{-1}(n_0, k)| \cdot \gamma(k)|x_k|, \quad \forall k \geq 0$$





Введем обозначения, пусть

$$|X(n, n_0)x_0| = \omega(n)$$

**и**

$$|X^{-1}(n_0, k) \cdot \gamma(k)| = \psi(n)$$

Тогда получим

$$|x_n| \leq \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \psi(n) |x_k|$$



## Теорема 2.1.4

- Пусть функция  $\psi(n)$  непрерывна и функция  $\omega(n)$  суммируема. Предположим, что  $\omega(n)$  неотрицательна на  $\mathbb{N}$  и удовлетворяют неравенству

$$|x_n| \leq \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \psi(k) |x_k|$$

тогда справедливо неравенство

$$|x_n| \leq \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \omega(k) \psi(k) \prod_{s=k+1}^{n-1} [1 + \psi(s)]$$

Доказательство:

Применяя теорему 2.1.3, получим оценку

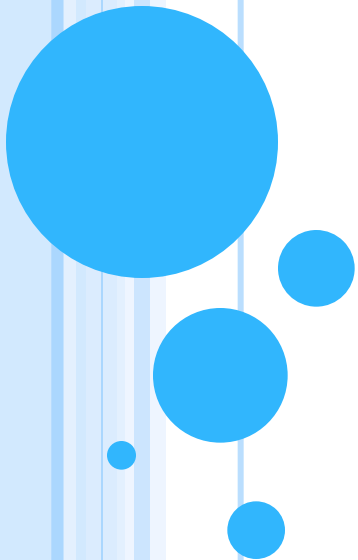
$$|x_n| \leq \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \omega(k) \psi(k) \prod_{s=k+1}^{n-1} [1 + \psi(s)]$$

Из этого неравенства следует утверждение теоремы.



# Результаты исследования:

- некоторые новые дискретные неравенства, которые позволяют судить об устойчивости РДС;
- одно неравенство типа Гронуолла, которое применяется для оценки решения нелинейных разностно-динамических систем с помощью фундаментальных решений линейного приближения.



## Вывод:

- В работе проведено исследование, при котором решение оценивается функциями, зависящими от известных параметров, входящих в правые части РДС. При этом были систематизированы различные типы дискретных неравенств, которые могут быть использованы в теории устойчивости РДС. Эти задачи до сих пор не были проработаны и поэтому полученные результаты представляют теоретическую и практическую ценность и важны в приложениях.