«Применение дискретных неравенств в исследовании разностных динамических систем»

Ким Екатерина
Лян Анастасия
Ученицы 12С
НИШ
г. Талдыкорган

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

Получить различные дискретные неравенства и систематизировать различные типы дискретных неравенств, которые могут использоваться в теории устойчивости РДС.

Актуальность работы
и
Научная новизна исследования

Неравенства Беллмана, Бихари, Гронуолла

Лемма
о дискретном аналоге неравенства Беллмана

(1.1) $$x(n) \le \omega(n) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \cdot x(s) \quad , \qquad \forall\, n / n \in N_0$$

(1.2) $$x(n) \le \omega(n) \cdot \prod_{s=0}^{n-1} \left[1 + f(s)\right] \quad , \quad \forall\, n / n \in N_0$$

.

Гронуолла

Если $U(n) \le C + \sum_{s=0}^{n-1} v(s)U(s)$, **то**

$U(n) \le C * exp(\sum_{s=0}^{n-1} v(s))$

Бихари

Если $U(n) \le C + \sum_{s=0}^{n-1} v(s)[U(s)]^{\tau}$, **то**

$$U(n) \le C * \left[1 - (\tau - 1)C^{\tau-1}\sum_{s=0}^{n-1} v(s)\right]^{-\frac{1}{\tau-1}}$$

Применение дискретных неравенств к исследованию РДС

Оценки решения нелинейных разностных динамических систем

$$x_{n+1} = A(n) + f(n, x_n) \quad , n > 0, \quad x_n \in R^n$$

(2.1

$$y_{n+1} = A(n) y_n$$

$$y_n = A(n-1) \cdot A(n-2) \cdot \square \cdot A(0) y_0$$

- Обозначим

(2.1.4) $$y_n = A(n-1)\cdot A(n-2)\cdot \dots \cdot A(0)y_0 = \Phi(n,0)y_0$$

Теперь возьмем некоторую функцию $y_0(n) = y_0$, тогда получим

$$\Phi(n+1,0)y_0(n+1) = A(n)\Phi(n,0)y_0(n) + f(n,y_n)$$

так как

$$\Phi(n+1,0)y_0(n) = A(n)\Phi(n,0)y_0(n)$$

то

$$\Phi(n+1,0) = A(n)\Phi(n,0)$$

- Это даст

$$\Phi(n+1,0)y_0(n+1) = \Phi(n+1,0)y_0(n) + f(n, y_n)$$

$$\Phi(n+1,0)y_0(n+1) - \Phi(n+1,0)y_0(n) = f(n, y_n)$$

$$\Phi(n+1,0)\left[y_0(n+1) - y_0(n)\right] = f(n, y_n)$$

$$y_0(n+1) - y_0(n) = \Phi^{-1}(n+1,0)f(n, y_n)$$

- Варьируя по n получим

(2.1.5) $$y_0(n) = y_0(0) + \sum_{j=0}^{n} \Phi^{-1}(j+1,0) f(j, y_j)$$

где $$y_0(0) = const$$

Подставим (2.1.5) в (2.1.4), получим

$$y_n = \Phi(n,0)\left(y_0(0) + \sum_{j=0}^{n} \Phi^{-1}(j+1,0) f(j, y_j) \right) =$$

$$= \Phi(n,0) y_0(0) + \sum_{j=0}^{n} \Phi(n,0)\Phi^{-1}(j+1,0) f(j, y_j)$$

По свойству модуля имеем

$$\left|y_n\right| \leq \left|\Phi(n,0)y_0(0)\right| + \sum_{j=0}^{n}\left|\Phi(n,0)\Phi^{-1}(j+1,0)\right| \cdot \left|f(j,y_j)\right|$$

Пусть вектор функция удовлетворяет условию

(2.1.6) $\left|f(j,y_j)\right| < \gamma(j)\left|y_j\right|^{\alpha}$, $\forall j \geq 0$

где α некоторое положительное число,

$$\alpha \geq 1, \quad \gamma(j) < \varepsilon$$

ε - сколь угодно малое положительное число, тогда получим следующее неравенство

$$\left|y_n\right| \leq \left|\Phi(n,0)y_0(0)\right| + \sum_{j=0}^{n}\left|\Phi(j,0)\Phi^{-1}(j+1,0)\right| \cdot \gamma(j)\left|y_j\right|^{\alpha}$$

Введем обозначения

$$\varphi(n) = \left|\Phi(n,0)y_0(0)\right|$$, и $$\psi(j) = \left|\Phi(j,0)\Phi^{-1}(j+1,0)\right| \cdot \gamma(j)$$

получим

$$\left|y_n\right| \le \varphi(n) + \sum_{j=0}^{n} \psi(j)\left|y_j\right|^{\alpha}$$, где $$\varphi(n) = C$$

$$\left|y_n\right| \le C + \sum_{j=0}^{n} \psi(j)\left|y_j\right|^{\alpha}$$

Применяя лемму 1, получим следующую оценку

(2.1.7) $$\left|y_n\right| \le C \cdot \left[1 - (\alpha - 1)C^{\alpha-1}\sum_{s=0}^{n-1}\psi(s)\right]^{-\frac{1}{\alpha-1}}, \forall n \ge 0$$

где $$\psi(j) = \left|\Phi(j,0)\Phi^{-1}(j+1,0)\right| \cdot \gamma(j)$$

так как $\gamma(j) < \varepsilon$, то

(2.1.8) $$\left|y_n\right| \le C + \varepsilon$$

Теорема 2.1.1

- Если нелинейная часть РДС

(2.1.1) $x_{n+1} = A(n) + f(n, x_n) \quad n > 0, \quad x_n \in R^n$

в окрестности начала координат удовлетворяет условию

(2.1.6) $\left|f(j, y_j)\right| < \gamma(j)\left|y_j\right|^{\alpha} \quad \forall j \geq 0$

то ее решение оценивается сверху неравенством

(2.1.8)

$$\left|y_n\right| \leq C + \varepsilon$$

Получены некоторые новые дискретные неравенства, которые позволяют судить об устойчивости РДС

Теорема 2.1.2

- Пусть, $U_n, \varphi(n), f(n)$ - неотрицательные функции. Если при $a > 0,\ p > 1$ выполняется неравенство

(2.1.9) $$U_n \le a + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(j) U_j + \sum_{j=0}^{n-1} f(j) U_j^{\,p}$$

тогда

(2.1.10) $$U_n \le \prod_{j=0}^{n-1} \left(1+\varphi(j)\right)^{-1} \left\{ a^{1-p} + (1-p) \sum_{j=0}^{n-1} f(j) \left(\prod_{j=0}^{n} \left(1+\varphi(j)\right)^{-1} \right)^{q} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство: Отметим

$$(2.1.11) \qquad \prod_{j=0}^{n}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}-\prod_{j=0}^{n-1}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}=-\varphi(n)\prod_{j=0}^{n}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}$$

$$\prod_{j=0}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}=1$$

Положим $z_0 = a$, тогда

$$(2.1.12) \qquad z_n = a+\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(j)U_j+\sum_{j=0}^{n-1}f(j)U_j^{\,p}, \quad n\geq 0$$

Очевидно, что $U_n \leq z_n$ при $n \geq 0$

.

Из того, что $z_{n+1}-z_n=\varphi(n)U_n+f(n)U_n^{\,p}$

находим

$$(2.1.13)\quad z_{n+1}-z_n-\varphi(n)z_n\le f(n){z_n}^p$$

Умножая обе части неравенства 2.1.13 на $\prod_{j=0}^{n}(1+\varphi(j))^{-1}$
и учитывая, 2.1.11 преобразуем его. Получим оценку

(2.1.14) $$z_{n+1}\prod_{j=0}^{n}(1+\varphi(j))^{-1}-z_n\prod_{j=0}^{n-1}(1+\varphi(j))^{-1}\le f(n)\prod_{j=0}^{n}(1+\varphi(j))^{-1}{z_n}^p$$

Далее, пусть $q=1-p$. Преобразуем левую часть неравенства (2.1.14) к виду

(2.1.15) $$\frac{\left(z_{n+1}\prod_{j=0}^{n}(1+\varphi(j))^{-1}\right)^p-\left(z_n\prod_{j=0}^{n-1}(1+\varphi(j))^{-1}\right)^q}{D}=$$

$$=q\left(z_n\prod_{j=0}^{n}(1+\varphi(j))^{-1}-z_n\prod_{j=0}^{n-1}(1+\varphi(j))^{-1}\right)$$

где D - некоторое значение, находящееся между

$z_{n+1}\prod_{j=0}^{n}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}$ и $z_n\prod_{j=0}^{n-1}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}$

Из того, что z_n- неубывающая, а

$\prod_{j=0}^{n-1}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}\leftrightarrow$ - невозрастающая, следует

$$D > z_n\prod_{j=0}^{n-1}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1} \geq z_n\prod_{j=0}^{n}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}$$

если

$$z_n\prod_{j=0}^{n-1}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1} < z_{n+1}\prod_{j=0}^{n}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}$$

и $D > z_{n+1}\prod_{j=0}^{n}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1} \geq z_n\prod_{j=0}^{n}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}$

если $$z_{n+1}\prod_{j=0}^{n}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1} < z_n\prod_{j=0}^{n-1}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}$$

Из 2.1.13 и 2.1.15 получаем

(2.1.16) $$\left(z_n\prod_{j=0}^{n}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}\right)^p - \left(z_n\prod_{j=0}^{n-1}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}\right)^q \leq qf(n)\left(\prod_{j=0}^{n}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}\right)^q$$

при $q < 0, (p > 1)$

Учитывая, что $z_0 = a$, и суммируя (2.1.16) по n от 0 до n+1 находим

(2.1.17) $$\left(z_n\prod_{j=0}^{n}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}\right)^p \leq a^q + q\sum_{j=0}^{n-1} f(j)\left(\prod_{j=0}^{n}\left(1+\varphi(j)\right)^{-1}\right)^q$$

при $q < 0, (p > 1)$

Теорема 2.1.3

- Пусть функции U_n, g_n непрерывны и функции a_n, b_n - суммируемы, предположим, что b_n, g_n неотрицательны на N и удовлетворяют неравенству

(2.1.26) $$U_n \le a_n + b_n \sum_{k=n_0}^{n-1} g_k U_k \, , \quad n \in N \, ,$$

тогда справедливо неравенство

(2.1.27) $$U_n \le a_n + b_n \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k g_k \prod_{s=k+1}^{n-1} \left[1 + b_s g_s \right]$$

Рассмотрим разностную динамическую систему

(2.1.32) $$x_{n+1} = A(n)x_n + f(n, x_n) \qquad x_{n_0} = x_0$$

Представим решение $x(n, x_0)$ РДС (2.1.32)в следующем виде

(2.1.33) $$x_n = X(n, n_0)x_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} X^{-1}(n_0, k) f(k, x_k)$$

где $X(n, n_0)$ фундаментальная матрица линейной РДС:

$$x_{n+1} = A(n)x_n$$

Из соотношения

$$\left|f(k, x_k)\right| < \gamma(k)\left|x_k\right| \ , \ \forall k \geq 0$$

где α - некоторое положительное число,

$$\alpha \geq 1, \quad \gamma(k) < \varepsilon \ ,$$

ε - сколь угодно малое положительное число, получим следующее неравенство

$$\left|x_n\right| \leq \left|X(n, n_0)x_0\right| + \sum_{k=n_0}^{n-1}\left|X^{-1}(n_0, k)\right| \cdot \gamma(k)\left|x_k\right| \ , \ \forall k \geq 0$$

Введем обозначения, пусть

$$\left|X(n,n_0)x_0\right| = \omega(n)$$

и

$$\left|X^{-1}(n_0,k)\right|\cdot\gamma(k) = \psi(n)$$

Тогда получим

$$\left|x_n\right| \le \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1}\psi(n)\left|x_k\right|$$

Теорема 2.1.4

- Пусть функция $\psi(n)$ непрерывна и функция $\omega(n)$ - суммируема. Предположим, что $\psi(n)$ - неотрицательна на N и удовлетворяют неравенству

$$\left|x_n\right| \le \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \psi(n)\left|x_k\right|$$

тогда справедливо неравенство

$$\left|x_n\right| \le \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \omega(k)\psi(k)\prod_{s=k+1}^{n-1}\left[1+\psi(s)\right]$$

Доказательство:
Применяя теорему 2.1.3, получим оценку

$$|x_n| \le \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \omega(k)\psi(k) \prod_{s=k+1}^{n-1} [1+\psi(s)]$$

Из этого неравенства следует утверждение теоремы.

Результаты исследования:

- некоторые новые дискретные неравенства, которые позволяют судить об устойчивости РДС;
- одно неравенство типа Гронуолла, которое применяется для оценки решения нелинейных разностно-динамических систем с помощью фундаментальных решений линейного приближения.

Вывод:

- В работе проведено исследование, при котором решение оценивается функциями, зависящими от известных параметров, входящих в правые части РДС. При этом были систематизированы различные типы дискретных неравенств, которые могут быть использованы в теории устойчивости РДС. Эти задачи до сих пор не были проработаны и поэтому полученные результаты представляют теоретическую и практическую ценность и важны в приложениях.