

СТАТИКА



10. Пространственная система сил

10.1. Вычисление модулей главного вектора и главного момента

Теорема о приведении системы сил:

Любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно выбранному центру O заменяется одной силой \vec{R} , равной главному вектору системы сил и приложенной в центре приведения O , и одной парой с моментом \vec{M}_O , равным главному моменту системы сил относительно центра O .

Главный момент системы сил относительно центра O -

$$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k).$$

Главный вектор системы сил $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$.

Пусть силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ заданы аналитически, т.е. известны проекции сил на оси координат: $F_{1x}, F_{2x}, \dots, F_{nx}$; $F_{1y}, F_{2y}, \dots, F_{ny}$; $F_{1z}, F_{2z}, \dots, F_{nz}$.

Тогда проекции главного вектора на оси координат определяются по формулам

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R_z = \sum F_{kz}. \quad (1)$$

Проекции главного момента - по формулам

$$M_{Ox} = \sum m_{Ox} (\bar{F}_k), \quad M_{Oy} = \sum m_{Oy} (\bar{F}_k), \quad M_{Oz} = \sum m_{Oz} (\bar{F}_k). \quad (2)$$

Модули главного вектора и главного момента

$$|\bar{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$

$$|\bar{M}_O| = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2};$$

(3)

10.2. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

В случае равновесия произвольной пространственной системы сил главный вектор и главный момент равны нулю, то есть $\bar{R} = 0$ и $\bar{M}_O = 0$.

Следовательно, равны нулю и их модули: $|\bar{R}| = 0$, $|\bar{M}_O| = 0$, то есть $|\bar{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0$, $|\bar{M}_O| = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} = 0$. (4)

Так как подкоренные выражения не могут быть отрицательными, то условия (4) могут выполняться только в случаях, если

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0. \quad (5)$$

$$M_{Ox} = 0, \quad M_{Oy} = 0, \quad M_{Oz} = 0. \quad (6)$$

или, с учетом формул (1) и (2)

$$\sum F_{kx} = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum m_{Ox} (F_k) = 0,$$

$$\sum m_{Oy} (F_k) = 0,$$

$$\sum m_{Oz} (F_k) = 0.$$

Вывод. Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.

10.3. Случай параллельных сил

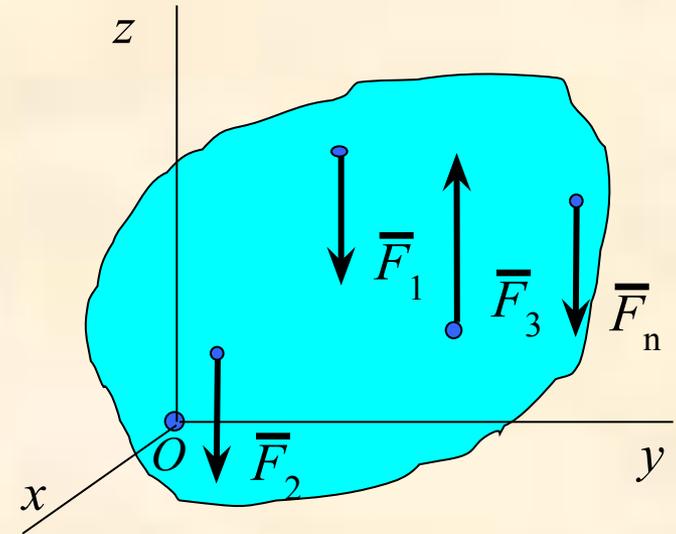
Если все действующие силы параллельны друг другу, то можно выбрать координатные оси так, что ось Oz , будет параллельна силам.

Тогда проекции каждой из сил на оси Ox и Oy и их моменты относительно оси Oz будут равны нулю и система (7) даст три условия равновесия:

$$\sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum m_{Oy} (F_k) = 0,$$

$$\sum m_{Oz} (F_k) = 0.$$



Остальные равенства обратятся в тождества ($0 \equiv 0$).

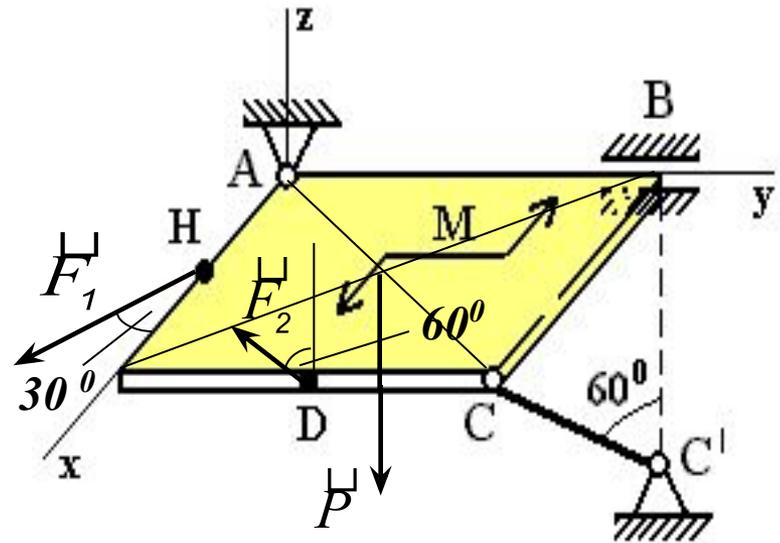
Вывод. Для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось параллельную силам, и сумма их моментов относительно двух других координатных осей были равны нулю.

10.4. Пример решения задач на равновесие произвольной пространственной системы сил.

Однородная прямоугольная плита весом $P = 5 \text{ кН}$ со сторонами $AB = 4a$, $BC = 3a$ закреплена в точке A сферическим шарниром, а в точке B цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC' .

На плиту действуют пара сил с моментом $M = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, лежащая в плоскости плиты, и две силы: F_1 и F_2 ;

$$F_1 = F_2 = 2 \text{ кН}.$$



Сила F_1 лежит в плоскости, параллельной плоскости xu , а сила F_2 – в плоскости, параллельной xz . Точки приложения сил (D , H) находятся в серединах сторон плиты.

Определить реакции связей в точках A , B и C . Принять $a = 0,8 \text{ м}$.

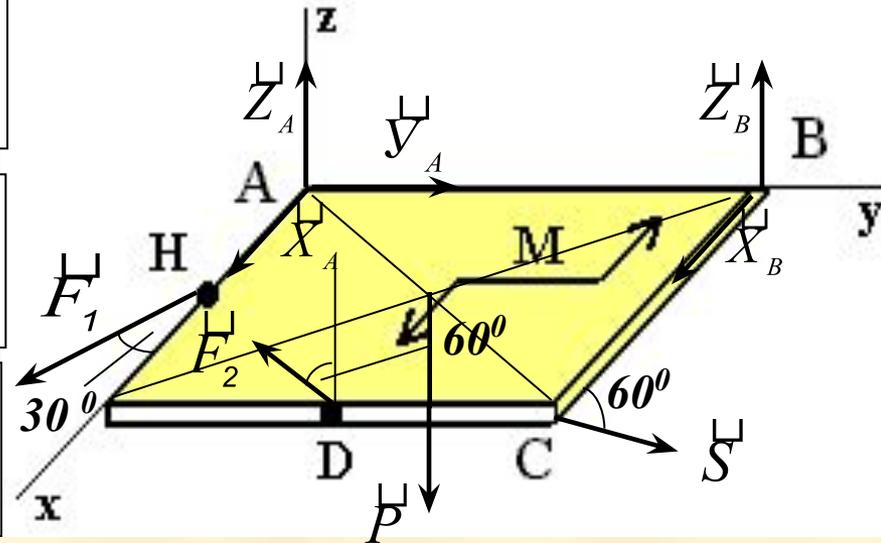
Решение .

1. Выберем объект равновесия.

Плита.

2. Приложим к объекту равновесия заданные силы.

Силы P , F_1 , F_2 и пара сил с моментом M .



3. Освободимся от связей.

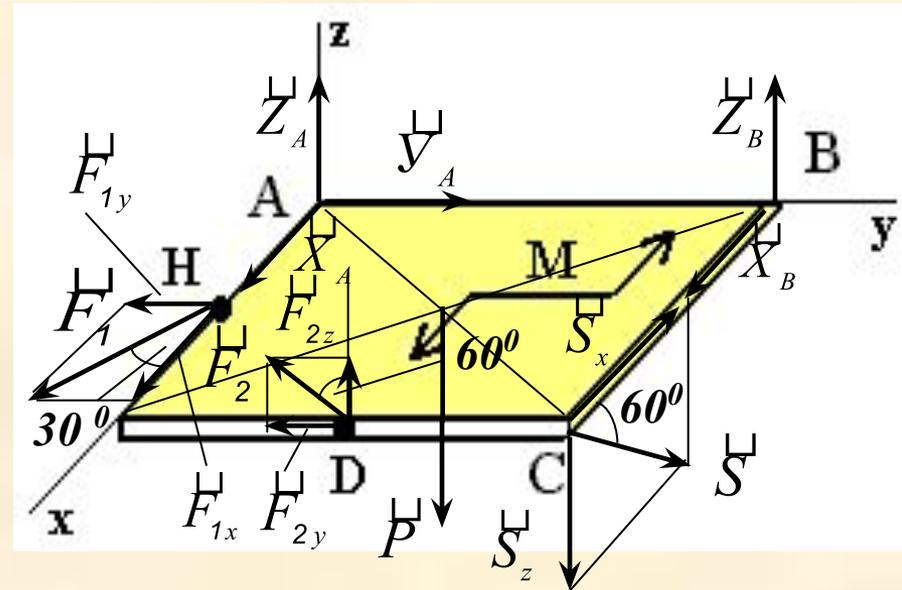
В точке A сферический шарнир, который заменяется тремя реакциями X_A , Y_A и Z_A .

В точке B цилиндрический шарнир, который заменяется двумя реакциями X_B , и Z_B .

Усилие в невесомом стержне CC' - S направлено вдоль стержня.

4. Составим уравнения равновесия.

Предварительно, в целях применения теоремы Вариньона о моменте равнодействующей, разложим наклонные силы на составляющие, направленные параллельно осям координат.



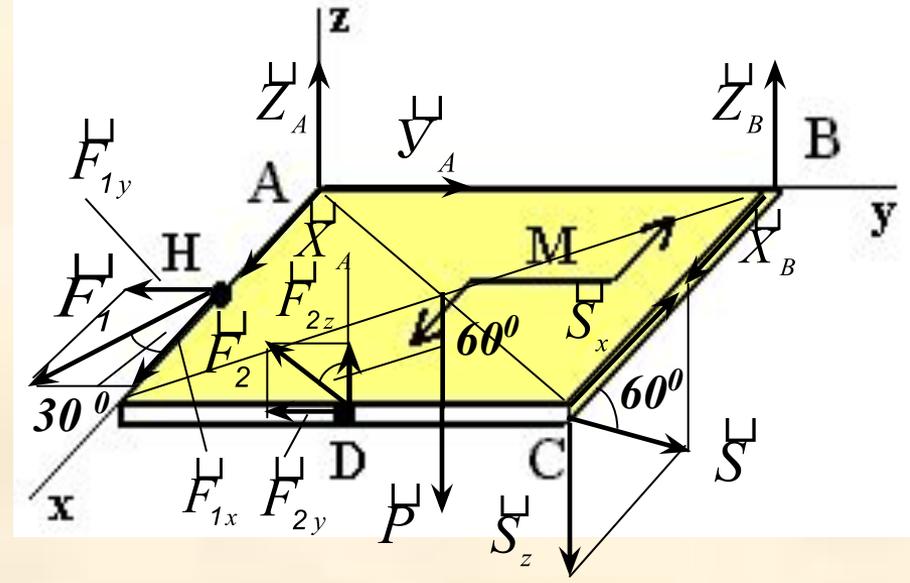
А) Уравнения проекций.

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B + F_1 \cdot \cos 30^\circ - S \cdot \cos 60^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F_1 \cdot \cos 60^\circ - F_2 \cdot \cos 30^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + Z_B + F_2 \cdot \cos 60^\circ - S \cdot \cos 30^\circ - P = 0. \quad (3)$$

В) Уравнения моментов.



$$\sum M_{Ox}(F_k) = F_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2a - S \cdot \cos 30^\circ \cdot 4a + Z_B \cdot 4a - P \cdot 2a = 0, \quad (4)$$

$$\sum M_{Oy}(F_k) = -F_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 3a + S \cdot \cos 30^\circ \cdot 3a + P \cdot 1,5a = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_{Oz}(F_k) = -F_1 \cos 60^\circ \cdot 1,5a - F_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot 3a + S \cdot \cos 60^\circ \cdot 4a - X_B \cdot 4a + M = 0. \quad (6)$$

4. Решение системы уравнений (1) – (6).

Из уравнения (2) найдем $Y_A = 2,73$ кН.

Из уравнения (5) найдем $S = - 2,89$ кН.

Из уравнения (4) найдем $Z_B = - 0,5$ кН.

Из уравнения (6) найдем $X_B = - 1,56$ кН.

Из уравнения (1) найдем $X_A = - 1,6$ кН.

Из уравнения (3) найдем $Z_A = 1,0$ кН.

Реакции S, Z_B, X_B, X_A в стороны противоположные изображенным на рисунке.