С Т А Т И К А

10. Пространственная система сил

10.1.Вычисление модулей главного вектора и главного момента

<u>Теорема о приведении системы сил:</u>

Любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно выбранному центру О заменяется одной силой $\vec{R}$, равной главному вектору системы сил и приложенной в центре приведения О, и одной парой с моментом $\vec{M}_0$, равным главному моменту системы сил относительно центра О.

Главный момент системы сил относительно центра О -

$$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k).$$

Главный вектор системы сил $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$.

Пусть силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ заданы аналитически, т.е. известны проекции сил на оси координат: $F_{1x}, F_{2x}, \ldots, F_{nx}$; $F_{1y}, F_{2y}, \ldots, F_{ny}$; $F_{1z}, F_{2z}, \ldots, F_{nz}$.

Тогда проекции главного вектора на оси координат определятся по формулам

$$R_x = \sum F_{\kappa x}, \quad R_y = \sum F_{\kappa y}, \quad R_z = \sum F_{\kappa z}. \qquad (1)$$

Проекции главного момента - по формулам

$$M_{Ox} = \sum m_{Ox}(\bar{F}_\kappa), M_{Oy} = \sum m_{Oy}(\bar{F}_\kappa), , M_{Oz} = \sum m_{Oz}(\bar{F}_\kappa). \qquad (2)$$

Модули главного вектора и главного момента

$$\left|\overline{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \qquad \left|\overline{M_0}\right| = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2}; \qquad (3)$$

10.2.Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

В случае равновесия произвольной пространственной системы сил главный вектор и главный момент равны нули, то есть $\overline{R} = 0$ ***и*** $\overline{M}_O = 0$.

Следовательно, равны нулю и их модули: $|\overline{R}| = 0,\ |\overline{M}_O| = 0$,

то есть $\left|\overline{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0,\ \left|\overline{M}_o\right| = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} = 0.$ **(4)**

Так как подкоренные выражения не могут быть отрицательными, то условия **(4)** ***могут выполнятся только в случаях, если***

$R_x = 0,\quad R_y = 0,\quad R_z = 0.$ **(5)**

$$M_{Ox} = 0, \quad M_{Oy} = 0, \quad M_{Oz} = 0\,. \qquad (6)$$

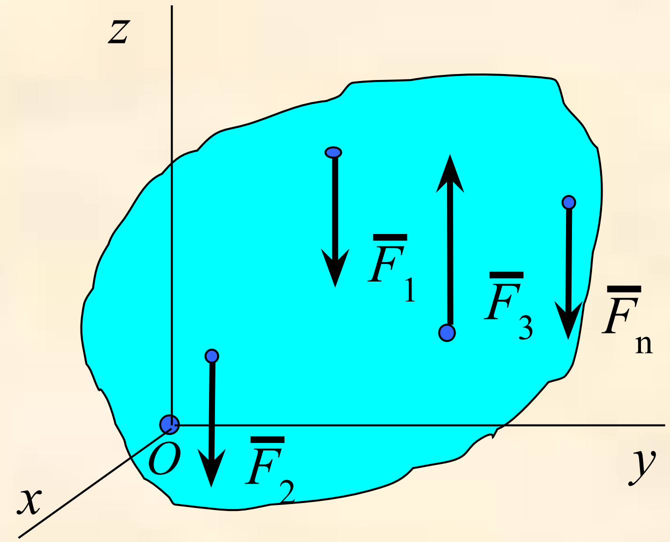
или, с учетом формул (1) и (2)

$$\sum F_{\kappa x} = 0\,,$$
$$\sum F_{\kappa y} = 0\,,$$
$$\sum F_{\kappa z} = 0,$$

$$\sum m_{Ox}(\vec{F}_k) = 0,$$
$$\sum m_{Oy}(\vec{F}_k) = 0,$$
$$\sum m_{Oz}(\vec{F}_k) = 0.$$

<u>Вывод.</u> Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.

10.3. Случай параллельных сил



Если все действующие силы параллельны друг другу, то можно выбрать координатные оси так, что ось Oz , будет параллельна силам.

Тогда проекции каждой из сил на оси Ox и Oy и их моменты относительно оси Oz будут равны нулю и система (7) даст три условия равновесия:

$$\sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum m_{Oy}(\vec{F}_k) = 0,$$

$$\sum m_{Oz}(\vec{F}_k) = 0.$$

Остальные равенства обратятся в тождества (0 ≡ 0).

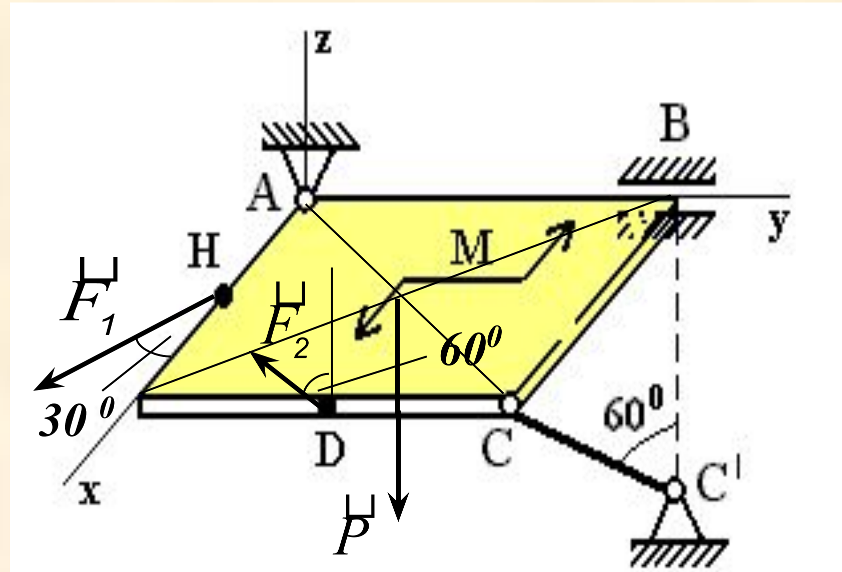
<u>Вывод.</u> ***Для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось параллельную силам, и сумма их моментов относительно двух других координатных осей были равны нулю.***

10.4. Пример решения задач на равновесие произвольной пространственной системы сил.

Однородная прямоугольная плита весом $P = 5$ кН со сторонами $AB = 4a$, $BC = 3a$ закреплена в точке A сферическим шарниром, а в точке B цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC'.

На плиту действуют пара сил с моментом $M = 5$кН·м, лежащая в плоскости плиты, и две силы: $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$;

$$F_1 = F_2 = 2 \text{ кН}.$$



Сила □F_1 лежат в плоскости, параллельной плоскости xy, а сила □F_2 – в плоскости, параллельной xz. Точки приложения сил (D, H) находятся в серединах сторон плиты.

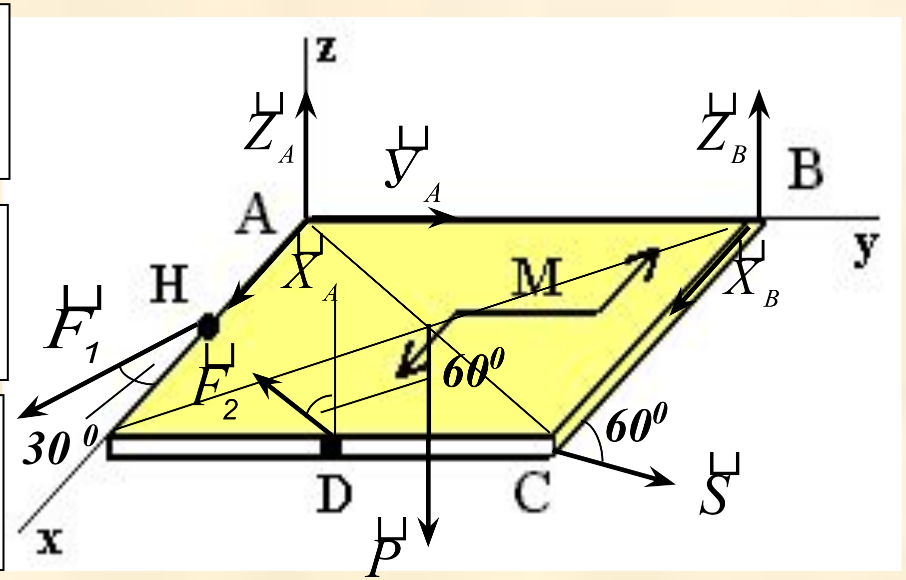
Определить реакции связей в точках А, В и С. Принять $a = 0{,}8$м.

Решение .

1.Выберем объект равновесия.

Плита.

2. Приложим к объекту равновесия заданные силы.



Силы $\vec{P}$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ***и пара сил с моментом*** M.

3. Освободимся от связей.

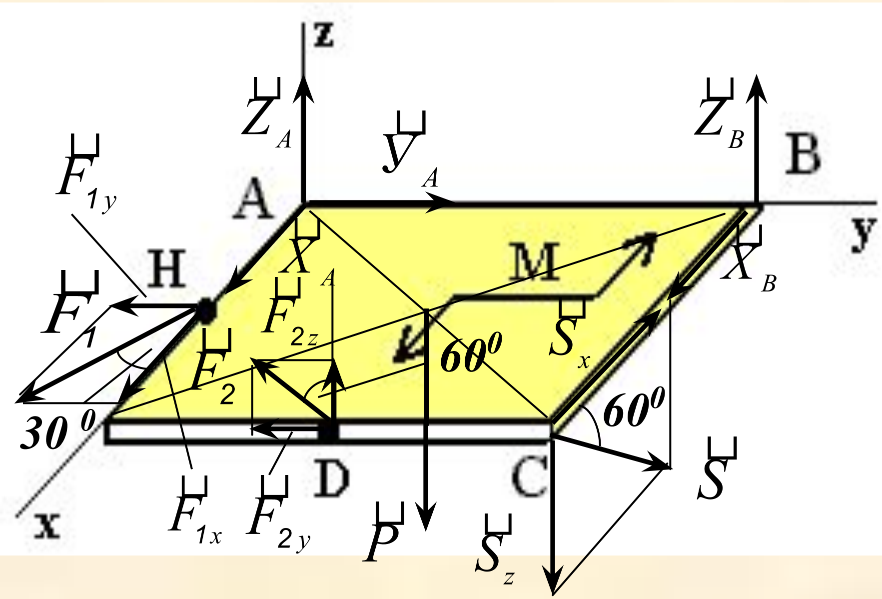
В точке А сферический шарнир, который заменяется тремя реакциями $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и $\vec{Z}_A$.

В точке В цилиндрический шарнир, который заменяется двумя реакциями $\vec{X}_B$, и $\vec{Z}_B$.

Усилие в невесомом стержне CC′ - $\vec{S}$ ***направлено вдоль стержня.***

4. Составим уравнения равновесия.

Предварительно, в целях применения теоремы Вариньона о моменте равнодействующей, разложим наклонные силы на составляющие, направленные параллельно осям координат.



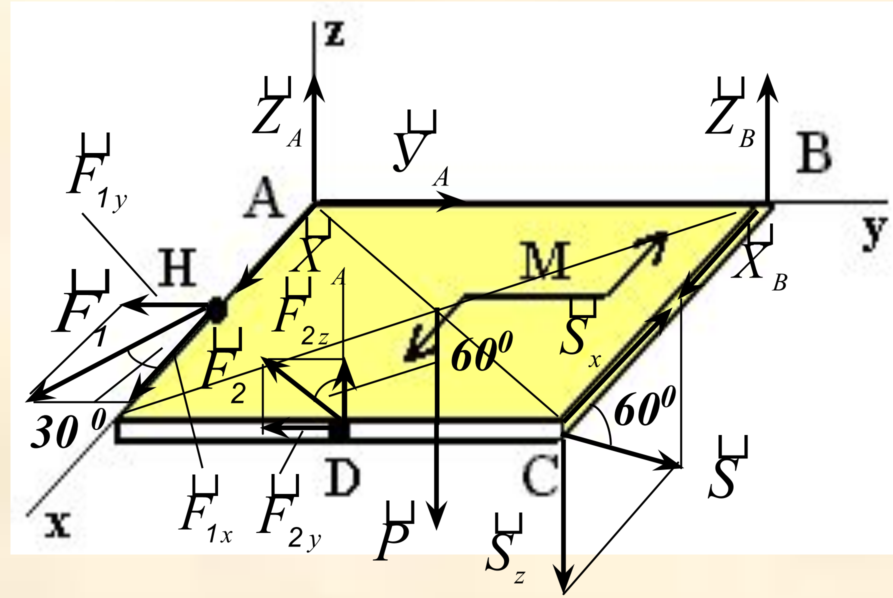
А) Уравнения проекций.

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B + F_1 \cdot \cos 30^0 - S \cdot \cos 60^0 = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = У_A - F_1 \cdot \cos 60^0 - F_2 \cdot \cos 30^0 = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + Z_B + F_2 \cdot \cos 60^0 - S \cdot \cos 30^0 - P = 0. \quad (3)$$

В) Уравнения моментов.



$$\sum M_{Ox}(\vec{F}_k) = F_2 \cdot cos60^0 \cdot 2a - S \cdot cos30^0 \cdot 4a + Z_B \cdot 4a - P \cdot 2a = 0, \qquad (4)$$

$$\sum M_{Oy}(\vec{F}_k) = -F_2 \cdot cos60^0 \cdot 3a + S \cdot cos30^0 \cdot 3a + P \cdot 1{,}5a = 0, \qquad (5)$$

$$\sum M_{Oz}(\vec{F}_k) = -F_1 cos60^0 \cdot 1{,}5a - F_2 \cdot cos30^0 \cdot 3a + S \cdot cos60^0 \cdot 4a - X_B \cdot 4a + M = 0. \qquad (6)$$

4. Решение системы уравнений (1) – (6).

Из уравнения (2) *найдем* $У_A$ = 2,73 *кН.*

Из уравнения (5) найдем **S** = - 2,89 *кН.*

Из уравнения (4) найдем Z_B = - 0,5 *кН.*

Из уравнения (6) найдем X_B = - 1,56 *кН.*

Из уравнения (1) найдем X_A = - 1,6 *кН.*

Из уравнения (3) найдем Z_A = 1,0 *кН.*

Реакции S, Z_B, X_B, X_A *в стороны противоположные изображенным на рисунке.*