

## Лекция 5

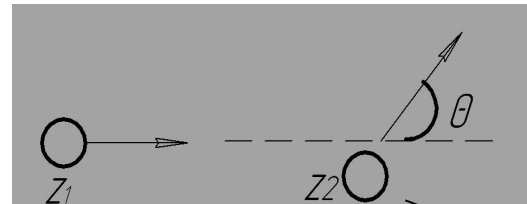
### «Процесс многократного рассеяния»

1. Упругое рассеяние частиц на ядрах
2. Сопоставление рассеяние тяжелой частицы на электроне и на ядре
3. Процесс многократного рассеяния в слое вещества
4. Оценка среднего значения квадрата угла рассеяния
5. Среднеквадратичный угол многократного рассеяния
6. Движение заряженных частиц в магнитном поле
7. Влияние многократного рассеяния

## Упругое рассеяние частиц на ядрах

Прохождение заряженной частицы  $Z_1$  через вещество сопровождается электромагнитным взаимодействием не только с электронами среды, но также происходит **упругое рассеяние на ядрах**

$$Z_1 + Z_2 \rightarrow Z_1 + Z_2$$



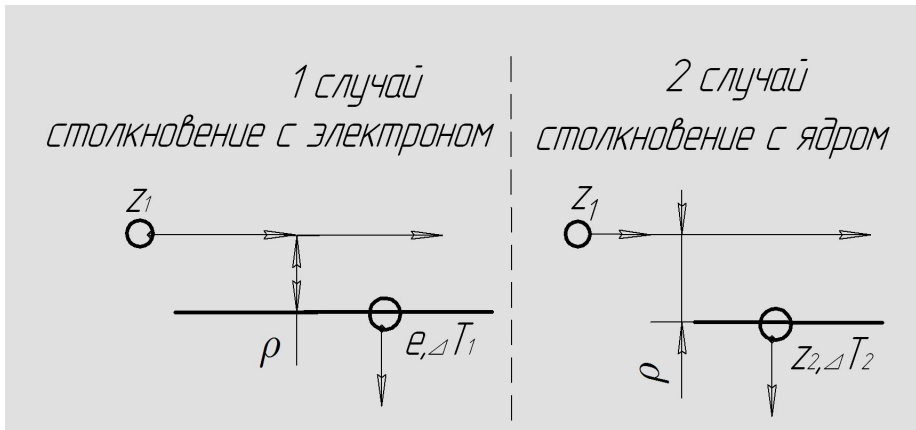
ядро вещества  
мишени

Отдельное столкновение частицы  $Z_1$  с тяжелым ядром  $Z_2$  вызывает небольшое рассеяние (угол  $\theta$ ). На толщине  $x$  постепенно накапливается заметное отклонение от первоначального направления движения за счет повторных процессов рассеяния (**многократное рассеяние**).

Сопоставим упругое взаимодействие тяжелой частицы  $Z_1$  на электроне ( $m_e$ ) и на ядре ( $Z_2, M_2$ ). Определим, какая из частиц получит большую энергию от частицы  $Z_1$ : электрон ( $\Delta T_e$ ) или ядро ( $\Delta T_2$ ). **Где потеря энергии больше ?**

## Упругое рассеяние тяжелой частицы на электроне и на ядре

Сопоставим упругое взаимодействие тяжелой частицы  $Z_1$  на электроне ( $m_e$ ) и на ядре ( $Z_2, M_2$ ). Определим, какая из частиц получит большую энергию от частицы  $Z_1$ : электрон ( $\Delta T_e$ ) или ядро ( $\Delta T_2$ ).



частица  $Z_1$  пролетает мимо электрона и ядра с одинаковым прицельным параметром  $\rho$  и с одинаковой скоростью  $V_1$

переданный импульс  $\Delta p = \Delta p_{\perp}$  и энергию  $\Delta T = \frac{(\Delta p_{\perp})^2}{2m_{\text{мишень}}}$

за счет кулоновского взаимодействия можно выразить в виде:

$$\Delta p_{\perp} = F \Delta t = \left( \frac{z_1 z_2 e^2}{\rho^2} \right) \left( \frac{2\rho}{V_1} \right); \quad \Delta T = \frac{4z_1^2 z_2^2 e^4}{\rho^2 V_1^2} \cdot \frac{1}{2m_{\text{мишень}}}$$

## Упругого рассеяния тяжелой частицы на электроне и на ядре

В результате получим  $\left[ \Delta T = \frac{4z_1^2 z_2^2 e^4}{\rho^2 V_1^2} \cdot \frac{1}{2m_{\text{мишень}}} \right]$ :

для электрона -  $\Delta T_e = \frac{2z_1^2 \cdot 1 \cdot e^4}{\rho^2 V_1^2} \cdot \frac{1}{m_e}$ , для ядра -  $\Delta T_2 = \frac{2z_1^2 z_2^2 e^4}{\rho^2 V_1^2} \cdot \frac{1}{M_2}$

Отношение приобретенных энергий равно  $\frac{\Delta T_2}{\Delta T_e} = \frac{z_2^2}{M_2} / \frac{1}{m_e}$ .

Масса ядра  $M_2 \approx A_2 m_{\text{вязи}} - E$ ; величиной  $E_{\text{связи}}$  можно пренебречь (менее 1% от массы ядра). Число протонов и нейтронов в ядре почти одинаково, то  $A_2 \approx 2z_2$ .

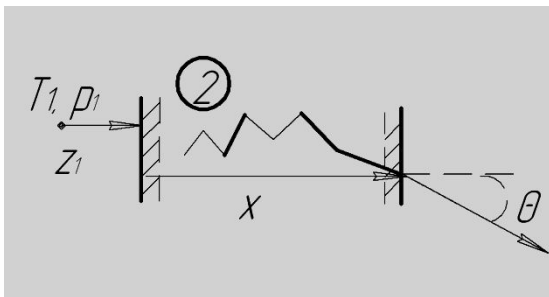
Отношение энергий получается в виде  $\frac{\Delta T_2}{\Delta T_e} \approx \frac{z_2^2}{2z_2} \frac{m_e}{m_N} = \frac{z_2 m_e}{2m_N}$ ;  $\frac{\Delta T_2}{\Delta T_e} = \frac{1}{2} \frac{1}{2000} z_2$

Величина  $z$  лежит в диапазоне  $1 < z_2 < 100$ .

Окончательно получаем  $\Delta T_2 \ll \Delta T_e$ ;  $\frac{1}{4000} < \frac{\Delta T_2}{\Delta T_e} < \frac{1}{40}$

## Процесс многократного рассеяния в слое вещества

Условия расчета:



Частица, проходя толстый слой, не должна заметно терять энергию:  $T_1(x=0) \approx T_1(x)$ . Импульс частицы  $p_1$  при этом остается практически постоянным по глубине.

Это ограничивает верхнее значение толщины вещества и применимость используемых приближений.

Суммарный угол  $\theta = \sum \theta_i$ , где  $\theta_i$  – рассеяние в  $i$ -ом взаимодействии, не может служить мерой рассеяния. Его величина, с учетом знака углов отклонений  $\theta_i$ , равна нулю.

Принято оценивать квадратичный угол:  $\bar{\theta}^2 = \sum \theta_i^2$

Для учета взаимодействия частицы  $Z_1$  с отдельным ядром  $i$  можно использовать формулу Резерфорда

$$f(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{z_1 z_2 e^2}{4T_1 \sin^2(\theta/2)} \right)^2 \sim \frac{z_1^2 z_2^2}{4p_1^2 V_1^2 \sin^4(\theta/2)} \quad \text{где } T_1 = m_1 V_1^2 / 2 = p_1 V_1 / 2$$

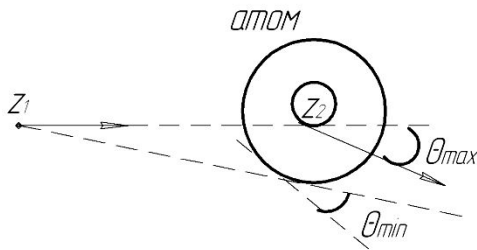
## Оценка среднего значения квадрата угла рассеяния

Для отдельного столкновения с ядром  $\overline{\theta_i^2} = \int \theta^2 f(\theta) d\Omega$

Расчет в приближении малых углов - в расчетах взято  $\sin \theta \approx \theta$  .

$$\overline{\theta_i^2} \sim \frac{z_1^2}{p_1^2 V_1^2} \frac{z_2^2}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} \frac{\int \theta^2 d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} \sim \left[ \frac{z_1^2}{\sigma} \frac{z_2^2}{p_1^2 V_1^2} \right] \int \frac{\theta^2 \sin \theta d\theta \cdot 2\pi}{\left( \frac{\theta^4}{2} \right)} = \left[ \int \frac{\theta^2 \theta d\theta}{\theta^4} = \int \frac{d\theta}{\theta} = \ln \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \right]$$

Значения предельных углов связаны с размерами ядра ( $R_{яд}$ ) и атома ( $R_{ам}$ ) и зависят от материала вещества-мишени



$$\theta^{\min} \sim \frac{1}{R_{ам}} = \varphi_{ам}(z_2)$$

$$\theta^{\max} \sim \frac{1}{R_{яд}} = \varphi_{яд}(z_2)$$

## Среднеквадратичный угол многократного рассеяния

$$\overline{\theta^2} = \sum_i \overline{\theta_i^2} \approx m \overline{\theta_i^2}$$

$$m = \sigma \cdot n \cdot X$$

$$[m] = \text{см}^2 \cdot \frac{1}{\text{см}^3} \cdot \text{см}$$

$$m = x / L; L = 1 / \sigma n$$

Суммарный среднеквадратичный угол многократного рассеяния получается как сумма значений по полному числу отдельных  $i$  независимых столкновений  $m$  на толщине  $x$ .

$\sigma(\text{см}^2)$  – полное резерфордское сечение рассеяния

$n(1/\text{см}^3)$  – концентрация ядер мишени

$X(\text{см})$  – толщина мишени

$L$  - длина взаимодействия

Получается функциональная зависимость вида:

$$\overline{\theta^2} = \frac{z_1^2 z_2^2 n_2 x}{p_1^2 V_1^2} \varphi(z_2)$$

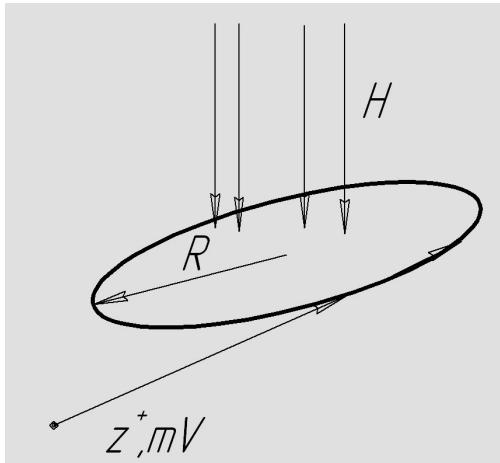
Заряженная частица ( $Z_1$ ), движущаяся с импульсом  $p_1$  (скорость  $v_1$ ) через вещество толщиной  $x$ , приобретает среднеквадратичный угол

$$\Theta = \sqrt{\overline{\theta^2}} \sim \frac{z_1 \sqrt{x}}{p_1 V_1}$$

Точные расчеты дают подобную зависимость:

$$\Theta = \frac{z_1 E_s \sqrt{x/x_0}}{p_1 V_1} \quad M_s \approx B 21$$

## Движение заряженных частиц в магнитном поле



Заряженная частица  $q$  с импульсом  $p_1$ , попадает в однородное магнитное поле перпендикулярно вектору  $H$ . Частица будет двигаться равномерно по окружности с радиусом  $R$ . На эту частицу действует сила Лоренца (запись в системе единиц CGSE) и центробежная сила

$$F = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{H} \qquad F_{\text{цент}} = \frac{mV^2}{R}$$

$pc = ze \cdot H \cdot R$  Их равенство позволяет вычислить величину радиуса вращения в магнитном поле

Эта запись справедлива и для релятивистского случая  $pc = \sqrt{T(T + 2mc^2)}$

Получаем:  $pc = 300zHR$   $[pB] = z \text{ см} [H]$ ;  $[Гс] = R$ ;  $[ ] =$



## Влияние многократного рассеяния



$$\chi = \frac{d}{R} = \frac{300HR}{pc}$$

Пусть, например заряженная частица попадает в магнитный спектрометр (заполненный веществом) и проходит расстояние  $d$  перпендикулярно направлению поля  $H$  по дуге окружности. При этом она поворачивается на угол  $\chi$

На толщине спектрометра  $d$  отношение угла многократного рассеяния  $\Theta$  к углу поворота в магнитном поле  $\chi$  запишется в виде

$$\frac{\Theta}{\chi} = \frac{21}{300} \cdot \frac{z}{H\beta\sqrt{x_0d}}$$

Скорость частицы  $\beta$  выражается через импульс

$$\beta = \frac{V}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{pc}{\sqrt{p^2c^2 + (mc^2)^2}}$$

При определенных сочетаниях параметров частицы, поля и характеристик среды искажающее влияние многократного рассеяния может быть минимизировано.