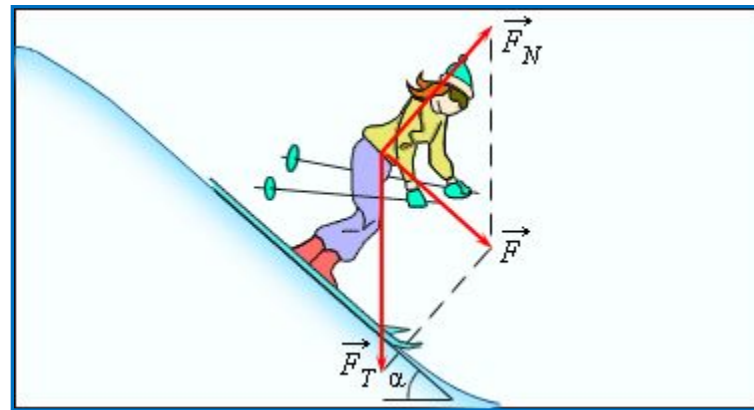


## **Лекция 3а.**

# Работа и механическая энергия



Равнодействующая сил

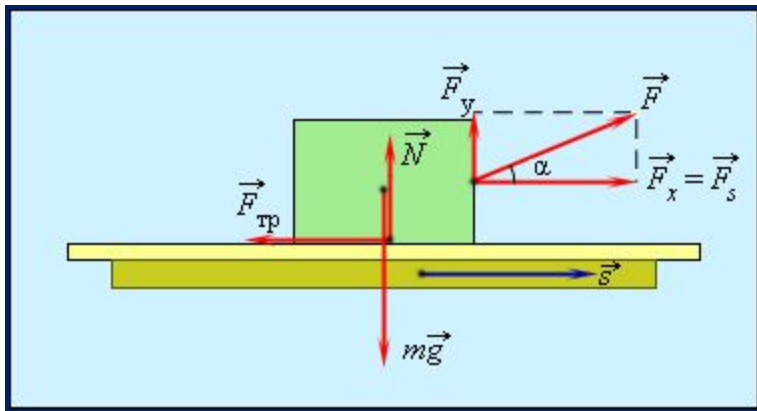
# Работа постоянной силы

- **Работа** – это количественная характеристика процесса обмена энергией между взаимодействующими телами.

Рассмотрим вариант, когда **тело движется прямолинейно** и на него действует **постоянная сила**.

- Работой  $A$ , совершаемой постоянной силой  $F$ , называется физическая величина, равная **произведению** модулей силы и перемещения  $s$ , умноженному на косинус угла  $\alpha$  между векторами силы и перемещения:

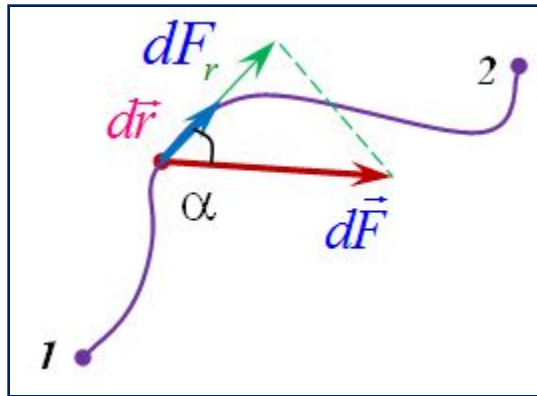
$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$



- Работа – **скалярная** величина (число):
  - может быть как **положительной** ( $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ ),
  - так и **отрицательной** ( $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ );
  - при  $\alpha = 90^\circ$  работа, совершаемая силой, равна нулю.

- В системе СИ работа измеряется в **джоулях (Дж)**.
- Джоуль равен работе  $A$ , совершаемой силой  $F$  в 1 Н на перемещении  $s$  тела на 1 м в направлении действия силы ( $\alpha = 0^\circ$ ).

# Работа переменной силы



- В случае переменной силы вводится понятие элементарной работы  $\delta A$ .
- Элементарной работой  $\delta A$ , совершаемой переменной силой  $dF$ , называется физическая величина, равная **скалярному произведению** векторов силы и элементарного перемещения  $dr$ :

$$\delta A = d\vec{F} \cdot d\vec{r} = dF \cdot ds \cdot \cos\alpha$$

$dF_r$  – проекция силы  $dF$  на касательную к траектории.

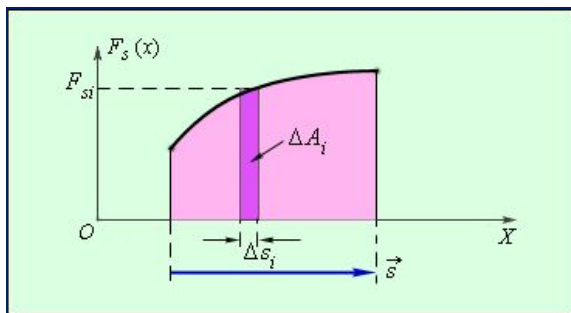
## Работа, совершаемая силой на конечном участке пути 1–2:

равна сумме элементарных работ  $\Delta A_i$  на **отдельных малых участках пути**  $\Delta s_i$ :

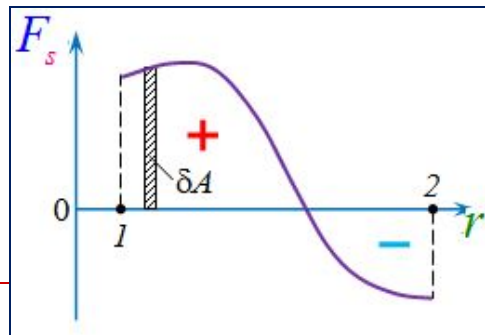
$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_{i=1}^n F_{si} \Delta s_i$$

равна сумме элементарных работ  $\delta A$  на **отдельных бесконечно малых участках пути**  $dr$ :

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_{r_1}^{r_2} F dr \cos\alpha$$



ия 4.

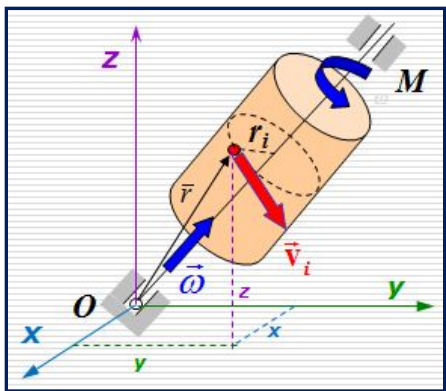


ергия

При сильных изменениях силы  $dF$ :

$$A = \int_{F_1}^{F_2} dF \int_{r_1}^{r_2} dr \cos\alpha$$

# Работа силы при вращении



- Найдем работу силы при вращательном движении вокруг оси **OM**.
- Воспользуемся тем, что скорость точки при вращательном движении связана с угловой скоростью вращения соотношением:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Вращение тела вокруг оси OM

Тогда перемещение:  $d\vec{r} = \vec{v}dt = (\vec{\omega} \times \vec{r})dt$

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})dt = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})dt$$

так как смешанное произведение векторов допускает их циклическую перестановку:

$$\vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

Причем момент силы, действующий на тело:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Тогда:  $\delta A = \vec{\omega} \cdot \vec{M} dt$

Угловая скорость направлена вдоль оси вращения **OM**, значит скалярное произведение векторов:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{M} = \omega M \cos \beta \quad \text{причем: } M \cos \beta = M_{OM}$$

проекция момента силы на ось вращения.

$$\delta A = \omega M_{OM} dt = \frac{d\varphi}{dt} M_{OM} dt = M_{OM} \cdot d\varphi$$

если  $M_z = \text{const}$

$$A = M_z \varphi$$

Чаще ось обозначают **z**:  $\delta A = M_z d\varphi$

Работа силы при повороте тела на конечный угол  $\varphi$ :

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi$$

# МОЩНОСТЬ

---

- Для характеристики **скорости совершения работы** вводят понятие мощности.
- **Средняя мощность** равна работе за единицу времени:

$$N_{cp} = \frac{A}{t}$$

- **Мгновенная мощность** - мощность в данный момент времени равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы.

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$$

**При вращательном движении** мощность силы определяется моментом этой силы и угловой скоростью:

$$A = M_z \varphi \quad \text{и} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$P = M_z \omega = \vec{M}\vec{\omega}$$

- В Международной системе (СИ) единица мощности называется **ватт (Вт)**.
- Ватт равен мощности силы, совершающей работу в 1 Дж за время 1 с:

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$$

# Кинетическая энергия.

## Теорема об изменении кинетической энергии

**Кинетическая энергия тела** или системы тел - это энергия, которой обладает тело или система **вследствие своего движения**.

Пусть тело массой  $m$  движется поступательно под действием некоторой силы (или результирующей нескольких сил):

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{на элементарном перемещении} \quad d\vec{r} = \vec{v} dt$$

- Тогда элементарная работа, которую совершает эта сила на элементарном перемещении:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \vec{v} d\vec{v} = md \left( \frac{v^2}{2} \right) = d \left( \frac{mv^2}{2} \right)$$

- **Вывод:** работа силы идет на приращение некоторой величины (стоящей в скобках), которую называют кинетической энергией тела.

- Таким образом, **кинетическая энергия** – это энергия тела, обусловленная его механическим движением.
- Для тела массой  $m$  движущегося поступательно со скоростью кинетическая энергия определяется соотношением:

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

$$A = K_2 - K_1 = \Delta K$$

- Интегрируем от начальной до конечной скорости и получим теорему об изменении кинетической энергии:

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 d \left( \frac{mv^2}{2} \right) = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$



**Приращение кинетической энергии** тела при некотором перемещении равно работе результирующей всех сил, действующих на тело на том же перемещении.

# Кинетическая энергия при вращении тела

- При вращательном движении тела скорости точек тела связаны с угловой скоростью вращения соотношением:  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} r_i$ , где  $r_i$  - расстояние от точек тела до оси вращения. Тогда кинетическая энергия тела **при вращательном движении**:

$$K = \sum \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}$$

где  $I_z = \sum m_i r_i^2$  - момент инерции тела относительно оси вращения Z

Любое движение твердого тела может быть представлено как **сумма** поступательного и вращательного движений.

Как следствие, **кинетическая энергия плоского движения тела** будет складываться из кинетической энергии поступательного движения со скоростью  $\mathbf{v}$  центра масс и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$K = \frac{m \mathbf{v}^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2}$$

# Сравнение характеристик поступательного и вращательного движения

**Сопоставим** основные величины и уравнения, определяющие поступательное движение тела и его вращение вокруг неподвижной оси:

| Поступательное движение тела              | Вращательное движение тела                                       |
|---|--|
| Масса $m$                                 | Момент инерции $I$   |
| Скорость $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  | Угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$      |
| Ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ | Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ |
| Сила $\vec{F}$ или $F$                    | Момент силы $\vec{M}$ или $M_z$                                  |
| Импульс $p = m\vec{v}$                    | Момент импульса $L_z = I_z\omega$                                |

| Важные формулы              | Поступательное движение тела                     | Вращательное движение тела                                 |
|-----------------------------|--|--|
| Основное уравнение динамики | $\vec{F} = m\vec{a}$ или $F_x = \frac{dp_x}{dt}$ | $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ или $M_z = \frac{dL_z}{dt}$ |
| Работа                      | $dA = F_s ds$                                    | $dA = M_z d\varphi$  |
| Кинетическая энергия        | $K = \frac{m\vec{v}^2}{2}$                       | $K = \frac{I_z\omega^2}{2}$                                |



# Консервативные и неконсервативные силы

Все силы в механике делятся на:

## Консервативные силы

Силы, работа которых **не зависит** от формы траектории, а зависит только от начального и конечного положения движущейся точки.

их работа по замкнутому контуру **равна** нулю

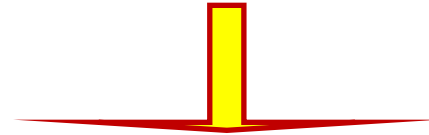
$$\oint dA = 0$$

**Примеры таких сил:** тяготения, тяжести, упругости, электростатические и др., которые являются **центральными**.

## Неконсервативные силы

Силы, работа которых **зависит** от формы траектории, описываемой точкой приложения силы.

их работа по замкнутому контуру **не равна** нулю  $\oint dA \neq 0$



**Среди неконсервативных сил выделяют диссипативные и гироскопические силы.**

- 1) **Диссипативные силы.** К ним относятся, в частности, силы трения и силы сопротивления среды. Полная работа этих сил является отрицательной.
  - При наличии сил трения и сопротивления энергия механической системы уменьшается, переходя во внутреннюю энергию тел, что приводит к их **нагреванию**. Такой процесс называют **диссипацией энергии**, а силы называют диссипативными.
- 2) **Гироскопические силы.** Эти силы зависят от скорости движения материальной точки и действуют **перпендикулярно** к этой скорости. Работа таких сил всегда равна нулю, однако от консервативных сил они отличаются тем, что определяются не только положением точки, но и ее скорости.
  - Примером такой силы является сила Лоренца. Сила Лоренца – это сила, действующая на заряженную частицу  $q$ , движущуюся со скоростью  $\mathbf{v}$ , в магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ :

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

# Понятия потенциальной энергии и потенциального поля

- **Потенциальная энергия  $\Pi$**  (или  $W_p$ ) – часть общей механической энергии системы, зависящей от взаимного расположения материальных точек системы и их положения во внешнем силовом поле.
  - Из определения следует, что потенциальная энергия системы не должна зависеть от того, каким образом данная конфигурация частиц системы возникла.
  - Это значит, что **понятие потенциальной энергии** имеет смысл лишь в том случае, когда на материальные точки системы действуют **только консервативные силы**.
  - Изменение потенциальной энергии системы должно определяться только работой консервативных сил. Другими словами, **работа консервативных сил** при переходе из состояния 1 в состояние 2 равна **убыли потенциальной энергии**:  $A = -(\Pi_2 - \Pi_1) = -\Delta\Pi$
  
- Таким образом, силовое поле консервативных сил является **потенциальным полем**.
  
- **Поле силы** – это область пространства, в каждой точке которого на помещенную туда частицу действует сила, закономерно меняющаяся от точки к точке.
  - Примером может служить поле силы тяжести Земли или поле сил сопротивления в потоке жидкости (газа).
  - Если сила в каждой точке силового поля не зависит от времени, то такое поле называют **стационарным**. Ясно, что силовое поле, стационарное в одной системе отсчета, в другой системе может оказаться и нестационарным. В стационарном силовом поле сила зависит только от положения частицы.
  
- **Потенциальное поле** – это стационарное силовое поле, в котором работа силы поля на пути между двумя любыми точками не зависит от формы пути, а зависит только от положения этих точек.
  - Силы потенциального поля обязательно **консервативные**. Если это условие не выполняется, то силовое поле не является потенциальным.
  - **Силовое поле** представляет собой особую форму существования материи, посредством которой осуществляются гравитационное, электромагнитное, ядерное и другие взаимодействия.

# Связь между силой и энергией потенциального поля

- Взаимодействие в консервативной системе может быть описано с помощью потенциальной энергии  $\Pi$  либо с помощью сил  $\mathbf{F}$  взаимодействия точек системы.
  - Поэтому между потенциальной энергией и силой, действующей на материальную точку, должна существовать определенная взаимосвязь.
- Потенциальная энергия системы является функцией координат  $\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ .

- Пусть силы, действующие на систему, выполнили элементарную работу:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

С другой стороны:

$$dA = -d\Pi = -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Pi}{\partial z} dz\right)$$

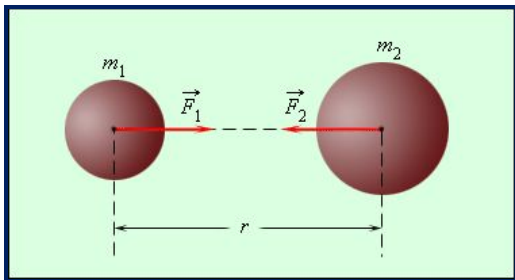
- Сравнивая выражения, получим выражения для проекций сил поля:
- Для вектора силы получаем следующее выражение:

$$F_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}$$
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\Pi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\Pi}{\partial z} \vec{k}\right) = -\text{grad}\Pi$$

**Эквипотенциальная поверхность** – поверхность, во всех точках которой потенциальная энергия  $\Pi$  имеет одно и то же значение.

- Градиент  $\Pi$  – это вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциальной энергии  $\Pi$ .
- Вектор силы  $\mathbf{F}$  направлен в сторону уменьшения  $\Pi$  и противоположен по направлению вектору  $\text{grad}\Pi$ .

## Примеры нахождения потенциальной энергии: гравитационная сила



□ Найдем **потенциальную энергию** тела массы  $m$ , находящегося в гравитационном поле Земли.

- На тело действует гравитационная сила при  $F_r = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$  направленная к центру Земли. Учитывая направление силы, ее вектор можно записать в виде:

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^3} \vec{r}$$

где  $M$  - масса Земли,  $r$  - радиус-вектор, направленный от центра Земли к телу.

Пусть тело перемещается по произвольному пути от точки 1 до точки 2.

**Работа гравитационной силы** по перемещению тела:

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = -GmM \int_1^2 \frac{\vec{r} d\vec{r}}{r^3} = -GmM \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -GmM \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = -\frac{GmM}{r_1} - \left( -\frac{GmM}{r_2} \right)$$

Но работа  **$A = -\Delta\Pi$** .

Поэтому потенциальная энергия гравитационных сил:

$$\Pi = -G \frac{mM}{r}$$

# Примеры нахождения потенциальной энергии: сила упругости и сила тяжести

- Найдем потенциальную энергию тела массы  $m$ , находящегося в поле **силы упругости** (пружины).
- Для этого рассмотрим колебания пружины вдоль оси  $x$  и вычислим работу силы упругости при деформации пружины от  $x_1$  до  $x_2$ . Учитывая, что сила упругости направлена в сторону, **противоположную деформации**, элементарная работа силы упругости:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_x dx = -kx dx$$

где  $F_x = -kx$  - проекция силы упругости на ось  $x$ ,  $r$  - радиус-вектор, направленный по оси  $x$ .

Пусть тело перемещается по пути от точки 1 до точки 2.

**Работа силы упругости** по перемещению тела:

$$A = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$$

Но работа  $A = -\Delta\Pi$ . Поэтому **потенциальная энергия сил упругости**:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}$$

**Сила тяжести.** Найдем потенциальную энергию тела, находящегося в поле силы тяжести Земли. **Работа силы тяжести** ( $F=mg$ ) по перемещению тела из точки 1 в точку 2:

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 mg d\vec{r} = -mg \int_{h_1}^{h_2} dh = mgh_1 - mgh_2$$

Поэтому **потенциальная энергия силы тяжести**:

$$\Pi = mgh$$

где  $h$  - высота тела над поверхностью Земли.

# Закон сохранения механической энергии

- Пусть на материальные точки системы действуют только консервативные силы.
  - Тогда при переходе системы из одного состояния работа консервативных сил равна:

$$A = K_2 - K_1 \text{ или } A = -(\Pi_2 - \Pi_1).$$

- Тогда  $K_2 - K_1 = -(\Pi_2 - \Pi_1)$ , значит:  $K_2 + \Pi_2 = K_1 + \Pi_1 = \text{const}$

- Величину  $E = K + \Pi$  называют **полной механической энергией системы**.

- Отсюда следует **закон сохранения полной механической энергии**: полная механическая энергия системы, на материальные точки которой действуют **только консервативные силы**, с течением времени не изменяется:  $E = \text{const}$ .

- Если на систему действуют помимо консервативных сил еще и неконсервативные силы, то:

$$A_{\text{конс}} + A_{\text{неконс}} = K_2 - K_1$$

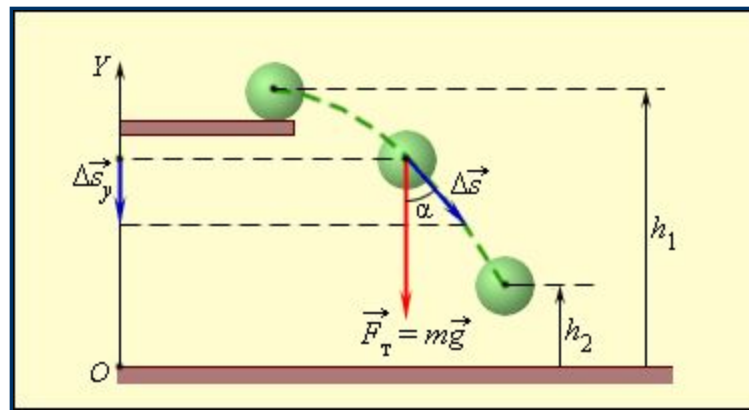
- Работа консервативных сил равна:  $A_{\text{конс}} = -(\Pi_2 - \Pi_1)$

- В этом случае изменение полной механической энергии системы равно работе неконсервативных сил:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{неконс}}$$

- **Вывод:** в системе, в которой кроме консервативных сил, действуют также неконсервативные силы, **полная механическая энергия системы не сохраняется**, и **закон сохранения механической энергии не выполняется**. Но всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида взамен механической энергии. Таким образом, выполняется фундаментальный закон сохранения и превращения энергии. Энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.

# Спасибо за внимание!



Сила тяжести **консервативная** и совершила работу:

$$A = -mg(h_2 - h_1) = -(mgh_2 - mgh_1) = -\Delta\Pi$$