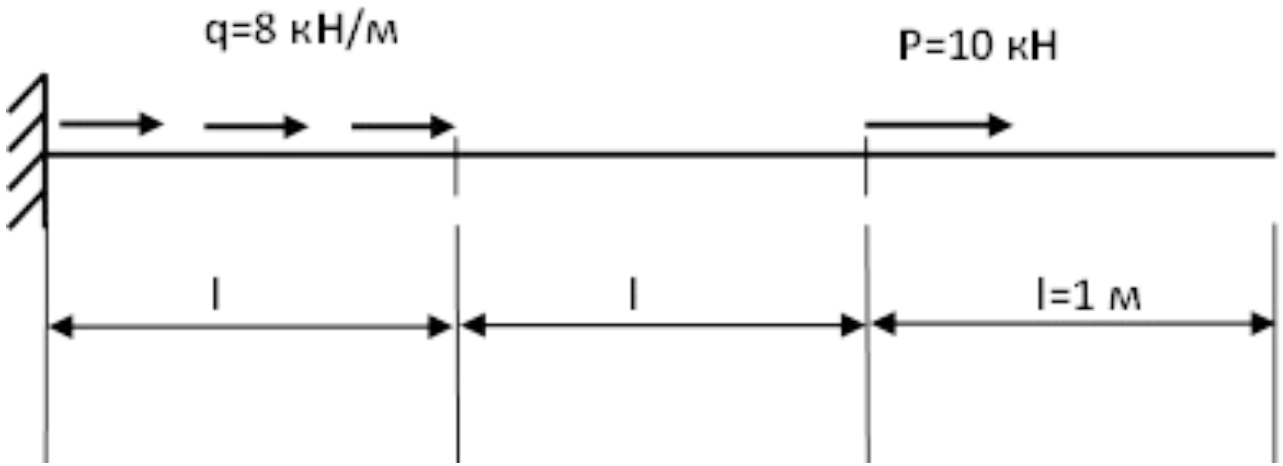
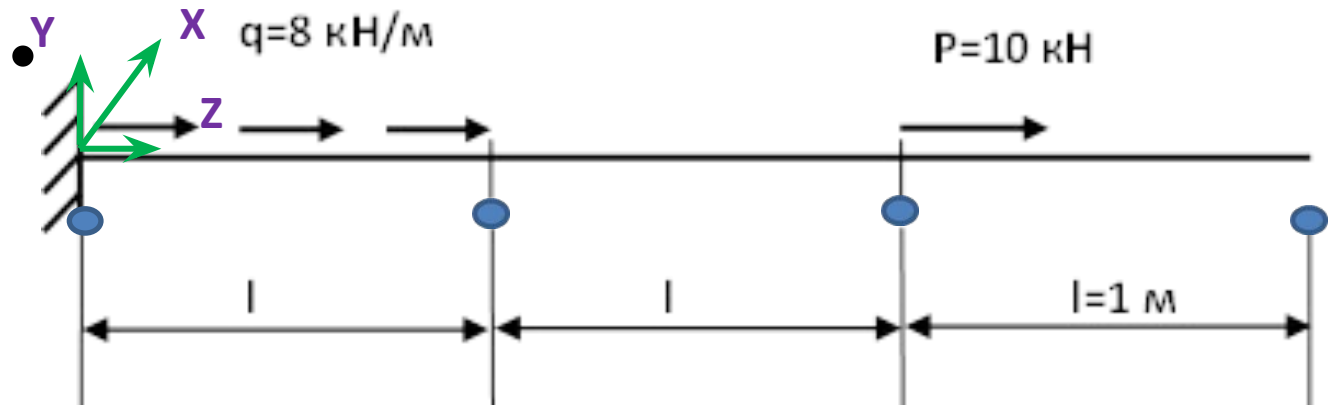
Расчеты на прочность при различных видах нагружения

Расчеты на прочность при растяжении-сжатии

Пример: из расчета на прочность определить размер квадратного сечения, [σ]=120 МПа





$$N(z) = N(0) - q\cdot z|_1 + q(z-l)|_2 - P|_3$$

ГУ: $N(3l)=0$

$$N(3l) = N(0) - q\cdot 3l + q(3l-l) - P = 0$$

$$N(0) = q\cdot 3l - q(3l-l) + P = 8\cdot 3\cdot 1 - 8\cdot(3-1) + 10 = 18 \text{ кН}$$

1 участок: $0 \le z \le l$

$$N(0) = N(0) - q\cdot 0 = 18 \text{ кН}$$

$$N(l) = N(0) - q\cdot l = 18 - 8\cdot 1 = 10 \text{ кН}$$

$N(z) = N(0) - q\cdot z|_1 + q(z-l)|_2 - P|_3$

2 участок: $l \le z \le 2l$

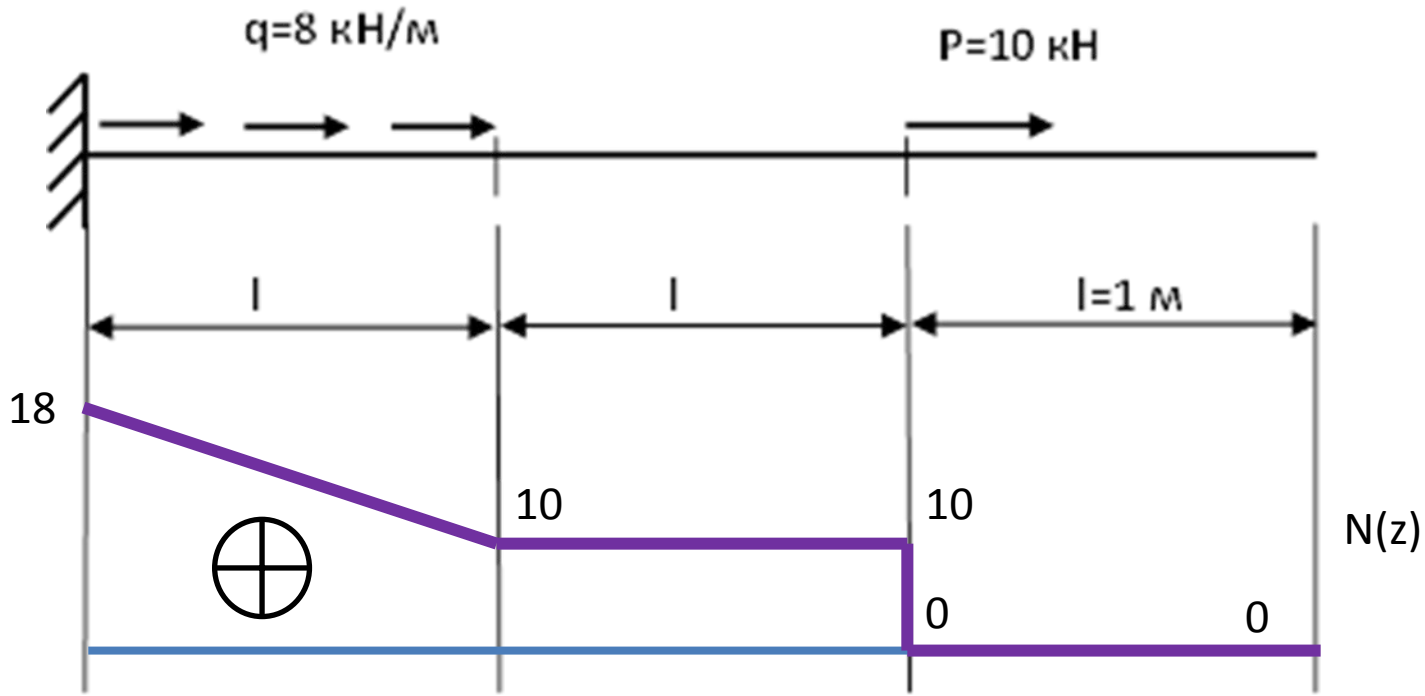
$N(l) = N(0) - q\cdot l + q(l-l) = 18 - 8\cdot 1 + 0 = 10$ кН

$N(2l) = N(0) - q\cdot 2l + q(2l-l) = 18 - 8\cdot 2 + 8\cdot 1 = 10$ кН

3 участок: $2l \le z \le 3l$

$N(2l) = N(0) - q\cdot 2l + q(2l-l) - P = 18 - 8\cdot 2 + 8\cdot 1 - 10 = 0$ кН

$N(3l) = N(0) - q\cdot 3l + q(3l-l) - P = 18 - 8\cdot 3 + 8\cdot 2 - 10 = 0$ кН



Условие прочности при растяжении сжатии:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F} \leq [\sigma]$$

$$F = \frac{N_{max}}{[\sigma]} = \frac{18 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6} = 0{,}0015 \text{ м}^2$$

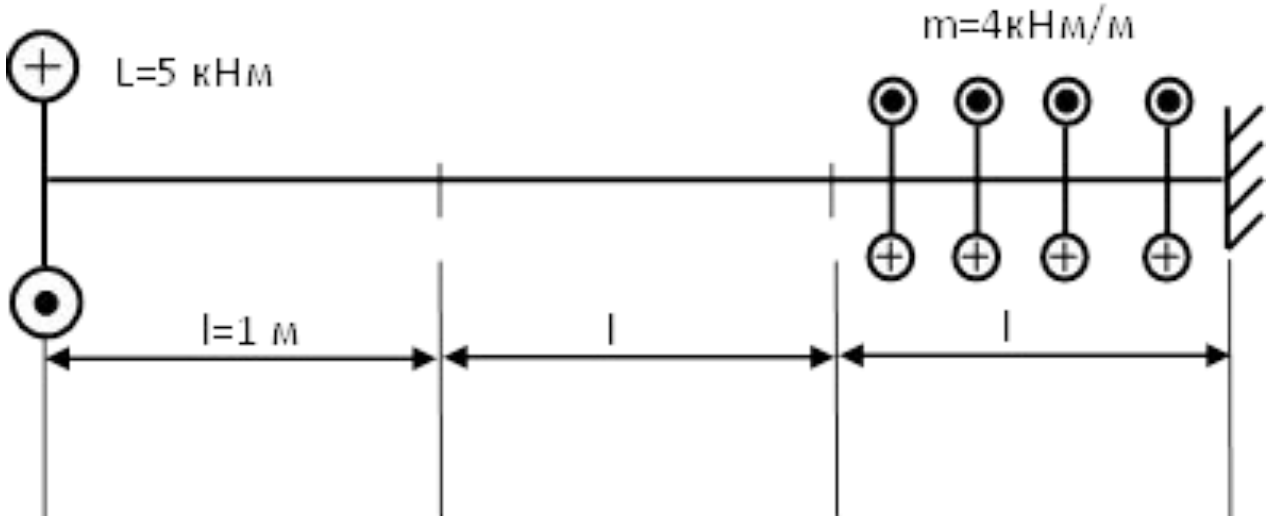
$$F = \text{a}^2$$

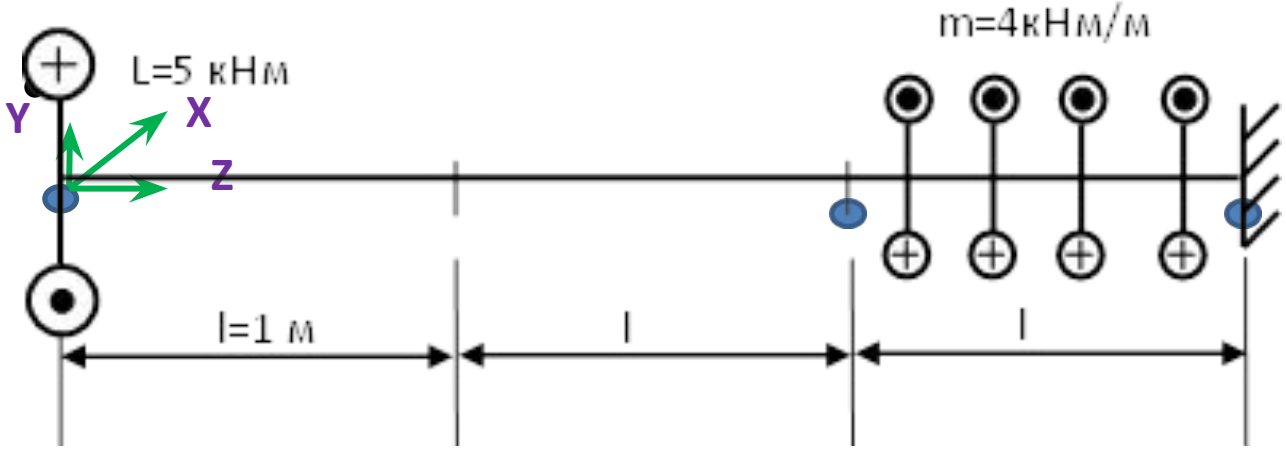
$$\text{a} = \sqrt{F} = \sqrt{0{,}0015} = 0{,}0387 \text{ м}$$

Принимаем $\text{a} = 40$ мм

Расчеты на прочность при кручении

Пример: из расчета на прочность определить размер круглого сечения, [т]=100 МПа





$$M_к(z) = M_к(0) + L|_1 - m(z-2l)|_2$$

ГУ: $M_к(0)=0$

1 участок: $0 \le z \le 2l$

$$M_к(0) = M_к(0) + L = 5 \text{ кН}$$

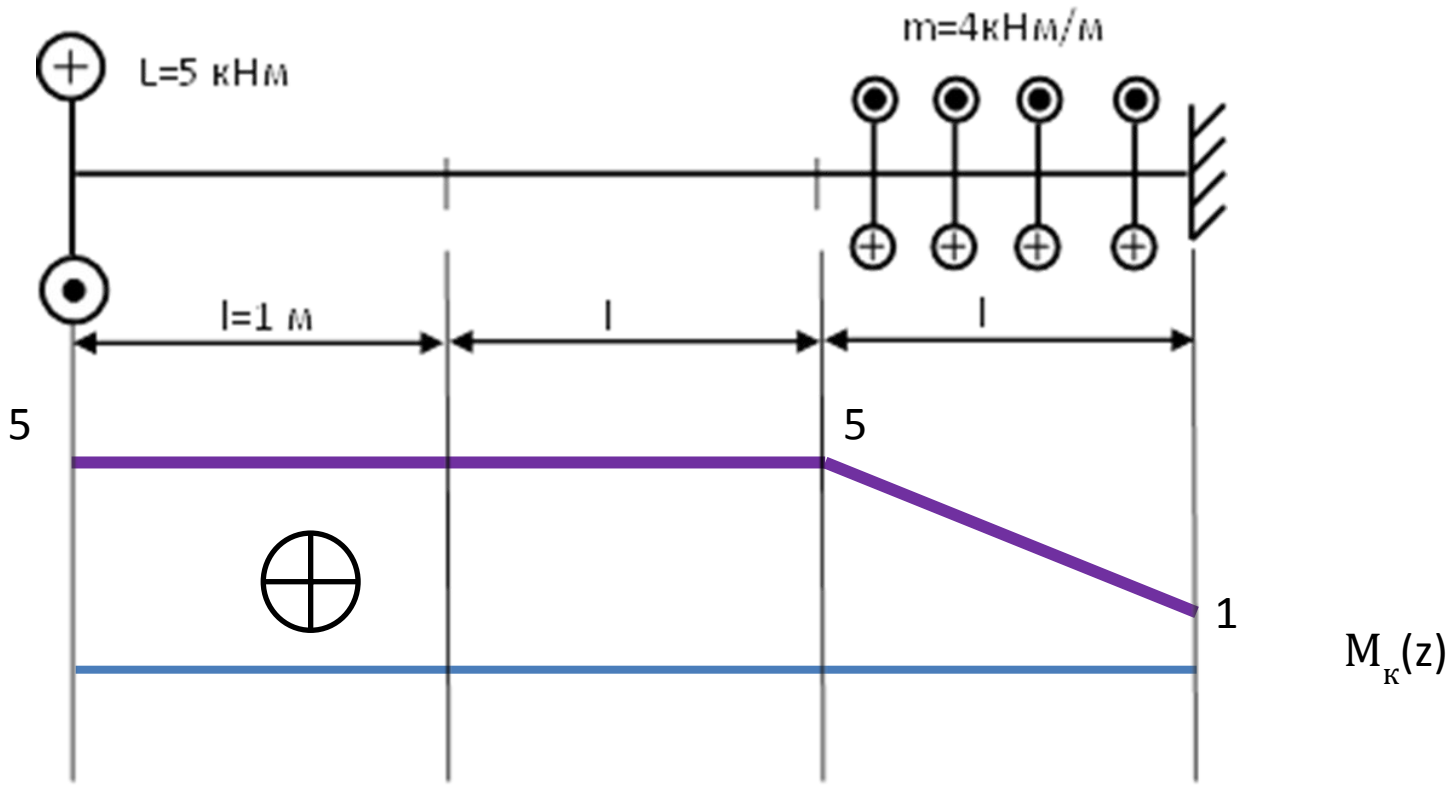
$$M_к(2l) = M_к(0) + L = 5 \text{ кН}$$

$$M_к(z) = M_к(0) + L|_1 - m(z-2l)|_2$$

2 участок: $2l \le z \le 3l$

$$M_к(2l) = M_к(0) + L - m(z-2l) = 5 - 0 = 5 \text{ кН}$$

$$M_к(3l) = M_к(0) + L - m(z-2l) = 5 - 4 \cdot 1 = 1 \text{ кН}$$



Условие прочности при кручении:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кmax}}{W_\rho} \leq [\tau]$$

$$W_\rho = \frac{M_{кmax}}{[\tau]} = \frac{5 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 0{,}00005 \text{ м}^3$$

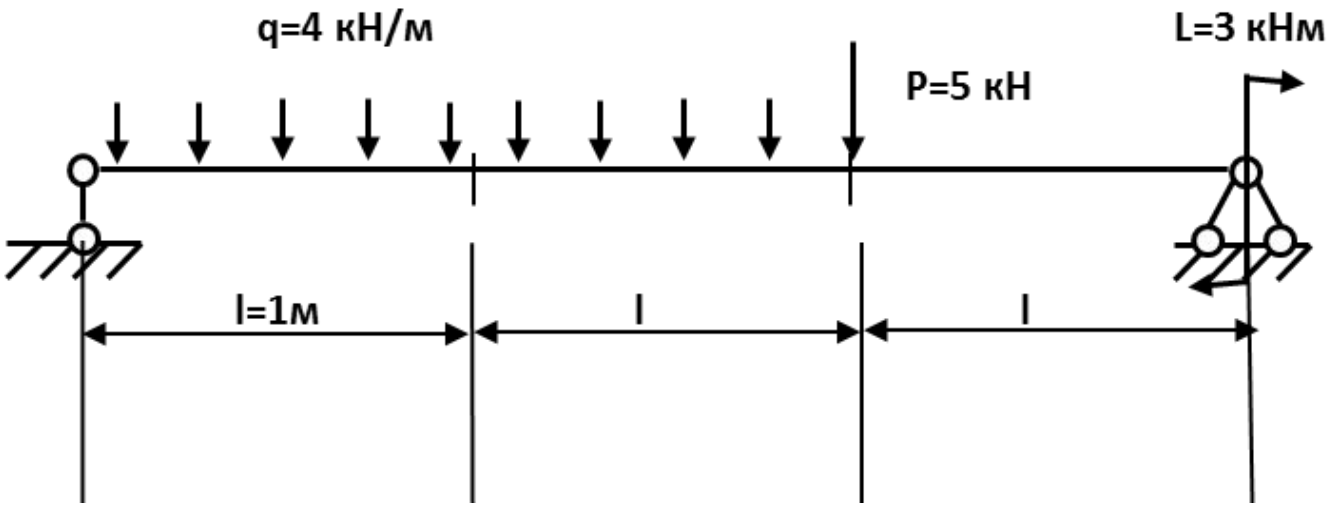
$$W_\rho = 0{,}2d^3$$

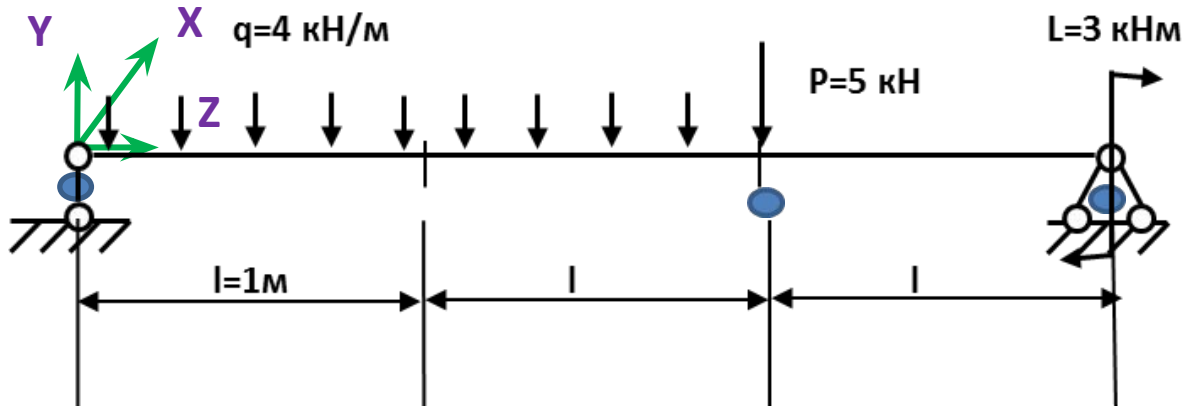
$$d = \sqrt[3]{\frac{W_\rho}{0{,}2}} = \sqrt[3]{\frac{0{,}00005}{0{,}2}} = 0{,}063 \text{ м}$$

Принимаем $d = 65$ мм

Расчеты на прочность при изгибе

Пример: из расчета на прочность определить размер двутаврового сечения, [σ]=160 МПа





$$Q_y(z) = Q_y(0) + q\cdot z|_1 - q(z-2l) + P|_2$$

$$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0)\cdot z + \frac{q(z)^2}{2}|_1 - \frac{q(z-2l)^2}{2} + P\cdot(z-2l)|_2$$

ГУ: $M_x(0) = 0;\ M_x(3l) = L$

$$M_x(3l) = Q_y(0)\cdot 3l + \frac{q(3l)^2}{2} - \frac{q(3l-2l)^2}{2} + P\cdot(3l-2l) = L$$

$$Q_y(0) = (-4{,}5ql + 0{,}5ql - Pl)/3l = (-4\cdot 4\cdot 1 - 5\cdot 1)/3\cdot 1 = -6 \text{ кН}$$

$Q_y(z) = Q_y(0) + q\cdot z|_1 - q(z-2l) + P|_2$

$M_x(z)=M_x(0) + Q_y(0)\cdot z + \frac{q(z)^2}{2}|_1 - \frac{q(z-2l)^2}{2} + P\cdot(z-2l)|_2$

1 участок: $0 \le z \le 2l$

$Q_y(0) = Q_y(0) + q\cdot 0 = -6$ кН

$Q_y(2l) = Q_y(0) + q\cdot 2l = -6 + 4\cdot 2 = 2$ кН

$M_x(0) = Q_y(0)\cdot 0 + \frac{q(0)^2}{2} = 0$ кНм

$M_x(2l) = Q_y(0)\cdot 2l + \frac{q(2l)^2}{2} = -6\cdot 2 + \frac{4(2)^2}{2} = -4$ кНм

2 участок: $2l \le z \le 3l$

$Q_y(2l) = Q_y(0) + q\cdot 2l - q(2l-2l) + P = -6 + 4\cdot 2 - 0 + 5 = 7$ кН

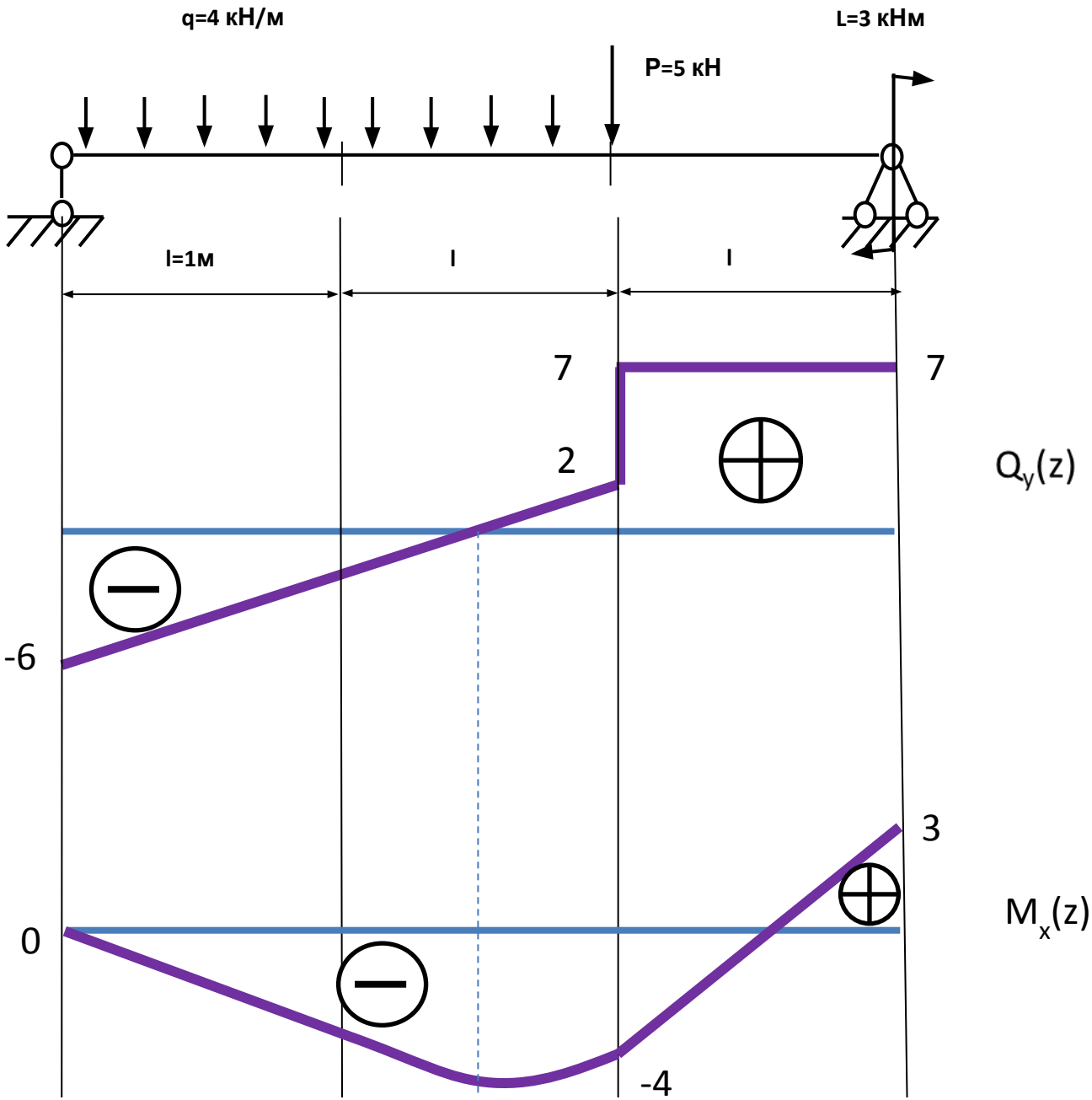
$Q_y(3l) = Q_y(0) + q\cdot 3l - q(3l-2l) - P = -6 + 4\cdot 3 - 4\cdot 1 + 5 = 7$ кН

$M_x(2l) = Q_y(0)\cdot 2l + \frac{q(2l)^2}{2} - \frac{q(2l-2l)^2}{2} + P\cdot(2l-2l) =$

$= -6\cdot 2 + \frac{4(2)^2}{2} - 0 + 0 = -4$ кНм

$M_x(3l) = Q_y(0)\cdot 3l + \frac{q(3l)^2}{2} - \frac{q(3l-2l)^2}{2} + P\cdot(3l-2l) =$

$= -6\cdot 3 + \frac{4(3)^2}{2} - \frac{4(1)^2}{2} + 5 = 3$ кНм


q=4 кН/м
L=3 кНм
P=5 кН
l=1м
l
l
7
7
2
-6
$Q_y(z)$
3
0
-4
$M_x(z)$

Расчет экстремума:

$Q_y(0) + q \cdot z = 0$

$Z = -Q_y(0) / q = -(-6)/4 = 1{,}5$ м

$M_x(1{,}5) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot 1{,}5 + \frac{4 \cdot (1{,}5)^2}{2} = -4{,}5$ кНм

Условие прочности при изгибе:

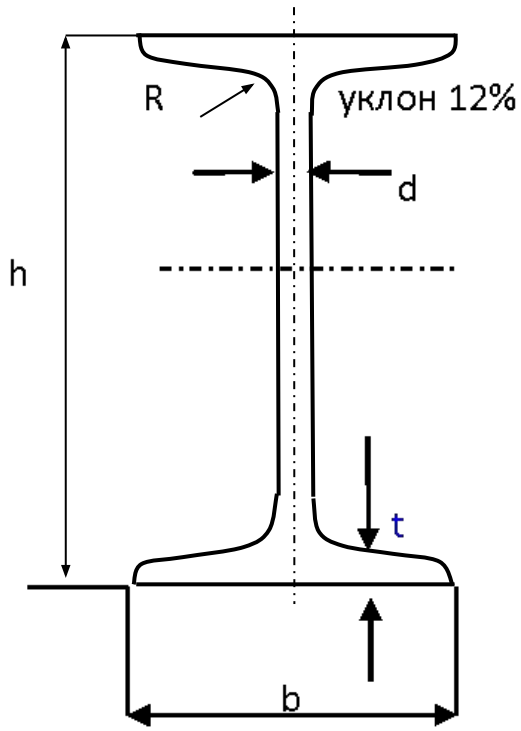
$$\sigma_{max} = \frac{M_{x\,max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

$$W_x = \frac{M_{x\,max}}{[\sigma]} = \frac{4{,}5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0{,}000028 \text{ м}^3 = 28 \text{ см}^3$$

Принимаем двутавр №10 $W_x = 39{,}7 \text{ см}^3$

y

СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ (ДВУТАВР).



сталь прокатная

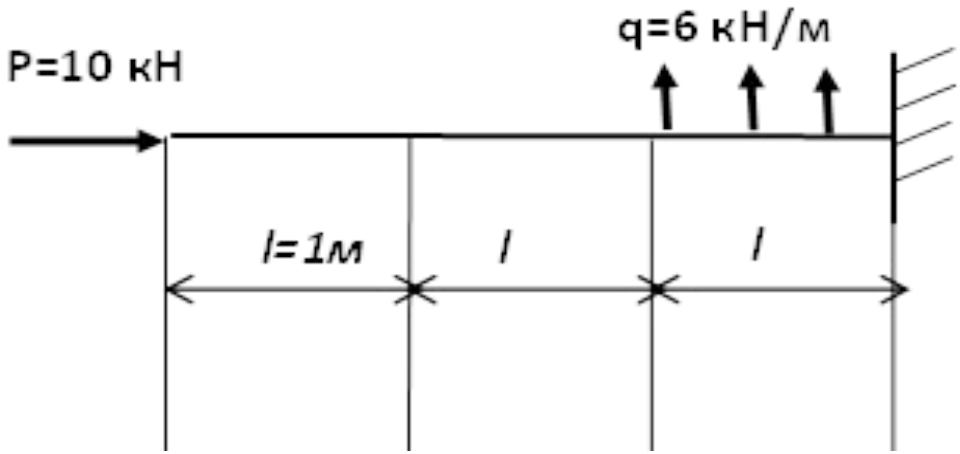
Балки двутавровые

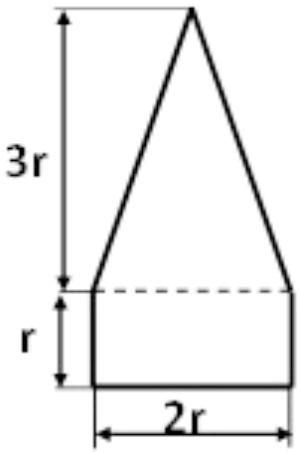
ГОСТ 8239-56

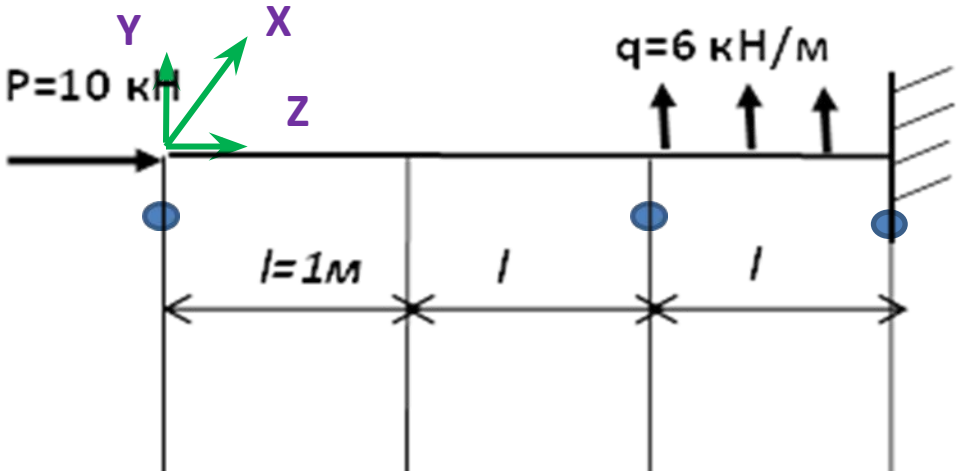
	h	b	d	t	R	r	Площадь сечения	J_x	W_x	i_x	S^*_x	J_y	W_y	i_y
	мм						$см^2$	$см^4$	$см^3$	см	$см^3$	$см^4$	$см^3$	см
10	100	55	4.5	7.2	7	2.5	12.0	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22
12	120	64	4.8	7.3	7.5	3	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38

Расчеты на прочность при растяжении с изгибом

Пример: проверить на прочность заданное сечение: r=8см, [σ]=140 МПа





- 

$$Q_y(z) = Q_y(0)|_1 - q(z-2l)|_2$$

$$M_x(z)=M_x(0) + Q_y(0)\cdot z|_1 - \frac{q(z-2l)^2}{2}|_2$$

$$N(z)= N(0)-P\,|_{1,2}$$

ГУ: $M_x(0) = 0;\ Q_y(0)= 0;\ N(0)=0.$

$Q_y(z) = Q_y(0)|_1 - q(z-2l)|_2$

$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z|_1 - \frac{q(z-2l)^2}{2}|_2$

$N(z) = N(0) - P|_{1,2}$

1 участок: $0 \le z \le 2l$

$Q_y(0) = 0$ кН; $N(0) = -P = -10$ кН;

$Q_y(2l) = 0$ кН; $N(2l) = -P = -10$ кН;

$M_x(0) = 0$ кНм;

$M_x(2l) = 0$ кНм;

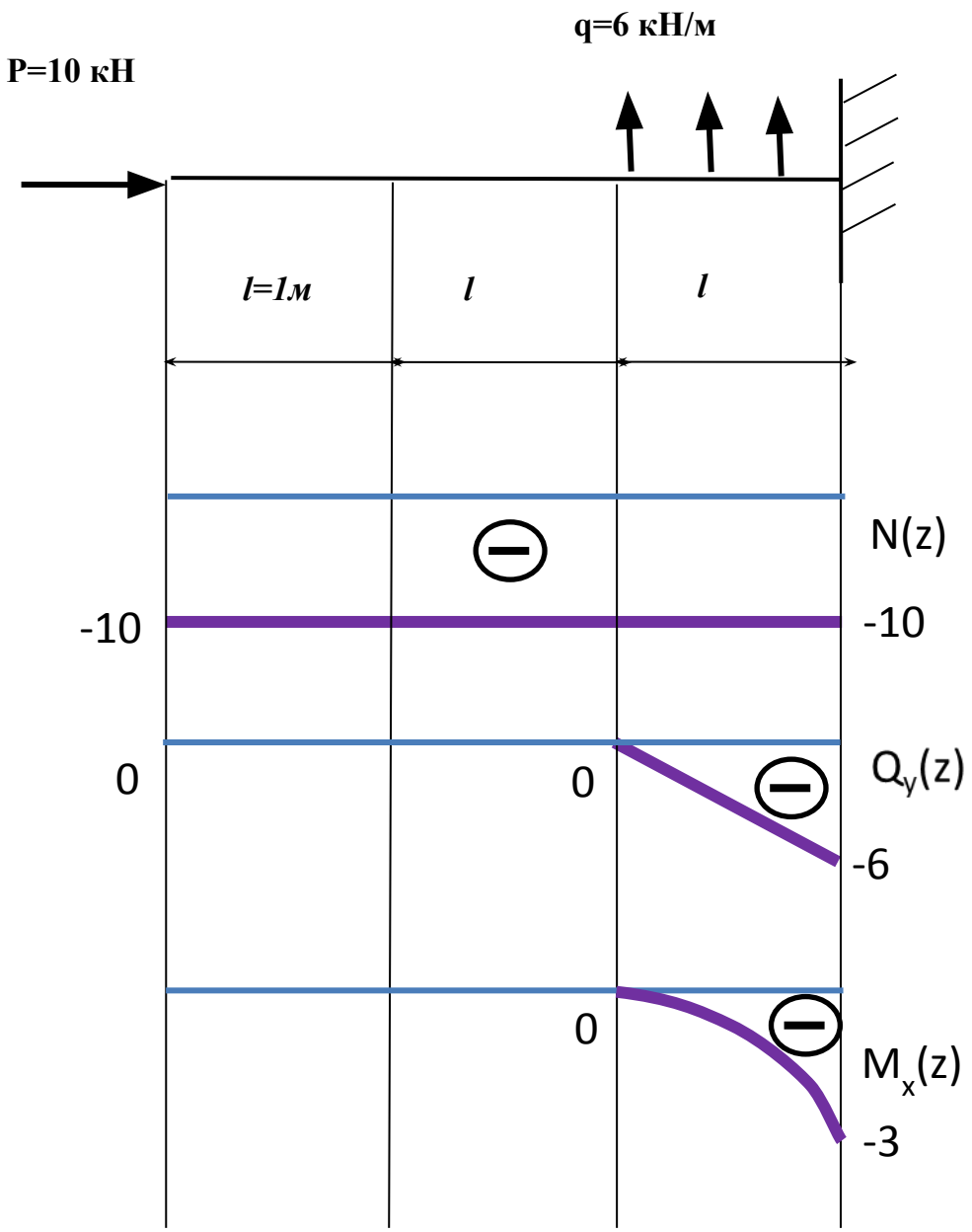
2 участок: $2l \le z \le 3l$

$Q_y(2l) = 0$ кН4 $N(2l) = -P = -10$ кН;

$Q_y(3l) = -q(z-2l) = -6 \cdot 1 = -6$ кН; $N(3l) = -P = -10$ кН;

$M_x(2l) = -\frac{q(z-2l)^2}{2} = -\frac{6(2-2)^2}{2} = 0$ кНм;

$M_x(3l) = -\frac{q(z-2l)^2}{2} = -\frac{6(3-2)^2}{2} = -3$ кНм;


q=6 кН/м
P=10 кН
l=1м
l
l
N(z)
-10
-10
0
0
Qy(z)
-6
0
Mx(z)
-3

1 фигура - треугольник

$F = b \cdot h/2 = 2r \cdot 3r\ /2 = 3r^2$

$J_{x1} = b \cdot h^3/36 = 2r \cdot (3r)^3/36 = 1{,}5r^4$

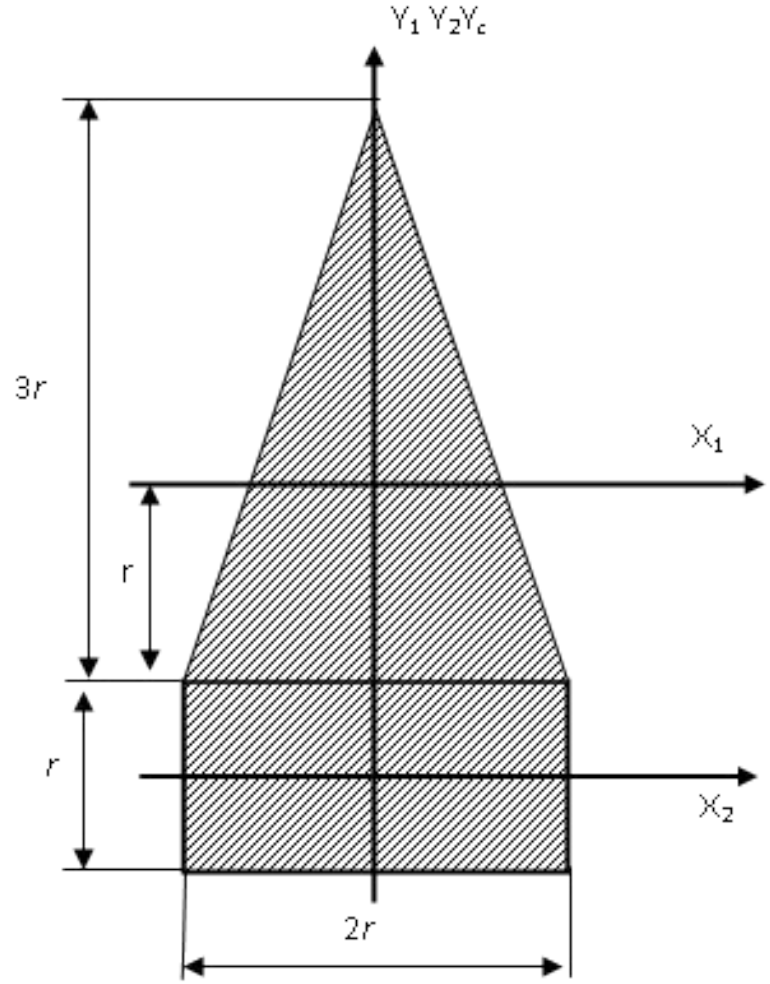
$J_{y1} = b^3 \cdot h/48 = (2r)^3 \cdot 3r/48 = 0{,}5r^4$

2 фигура – прямоугольник

$F_2 = b \cdot h = 2r \cdot r = 2r^2$

$J_{x2} = b \cdot h^3/12 = 2r \cdot (r)^3/12 = 0{,}17r^4$

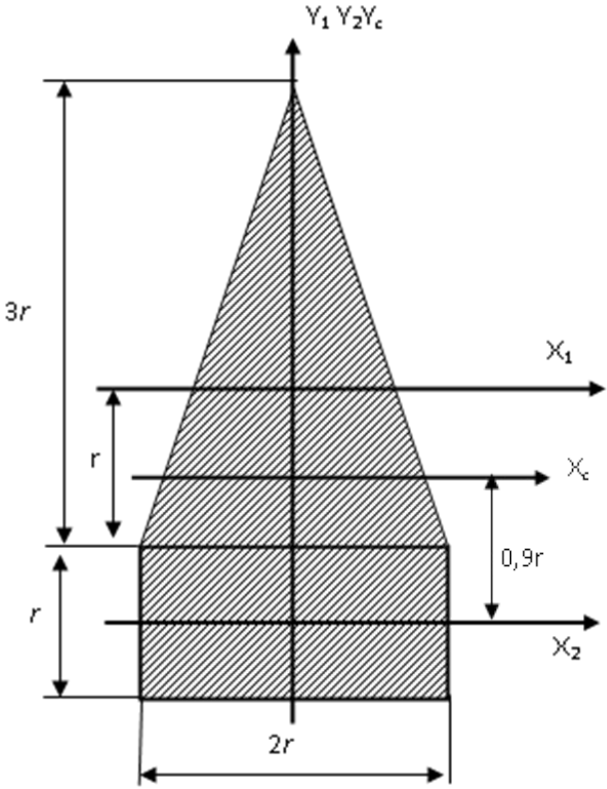
$J_{y2} = b^3 \cdot h/12 = (2r)^3 \cdot r\ /12 = 0{,}67r^4$



$X_2У_2$ – вспомогательные оси

У является осью симметрии фигуры, и поэтому она будет центральной, а центр тяжести фигуры находится на этой же оси, т.е. абсцисса $x_c = 0$.

$$y_c = \Sigma S_{xi}/\Sigma F_i = (S_{xc}{}^1 + S_{xc}{}^2)/(F_1+F_2) = (F_1y_1 + F_2y_2)/(F_1+F_2) =$$
$$=(1{,}5r\cdot 3r^2+0)/(3r^2+2r^2) = 0{,}9r$$



$$J_{xc} = J_{xc}{}^1 + J_{xc}{}^2 = (J_{x1} + a\,F_1) + (J_{x2} + a\,F_2) =$$
$$= (1{,}5r^4+(0{,}6r)^2\cdot 3r^2)+(0{,}17r^4+(0{,}9r)^2\cdot 2r^2)=$$
$$= 4{,}37\ r^4$$

$$J_{yc} = J_{yc}{}^1 + J_{yc}{}^2 = 0{,}5r^4 + 0{,}67r^4 = 1{,}17r^4$$

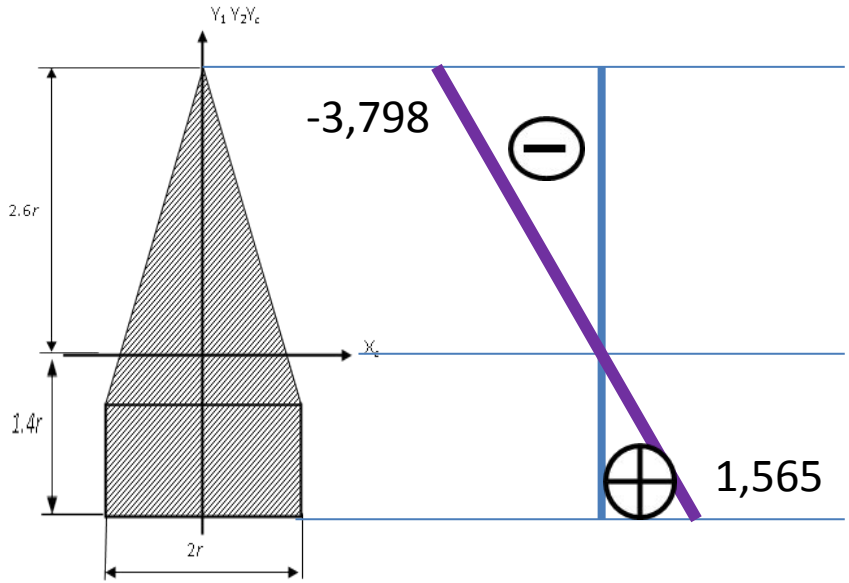
Нулевая линия при изгибе с растяжением

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y = 0$$

$$y = -\frac{N \cdot J_x}{F \cdot M_x} = -\frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 4{,}37 \cdot 0{,}08^4}{5 \cdot 0{,}08^2 \cdot (-3 \cdot 10^3)} = -0{,}0186 \text{ м}$$

$$\sigma_A = \frac{-10 \cdot 10^3}{5 \cdot 0{,}08^2} + \frac{(-3 \cdot 10^3)}{4{,}37 \cdot 0{,}08^4} \cdot (2{,}6 \cdot 0{,}08) = -3{,}798 \text{ МПа}$$

$$\sigma_B = \frac{-10 \cdot 10^3}{5 \cdot 0{,}08^2} + \frac{(-3 \cdot 10^3)}{4{,}37 \cdot 0{,}08^4} \cdot (-1{,}4 \cdot 0{,}08) = 1{,}565 \text{ Мпа}$$

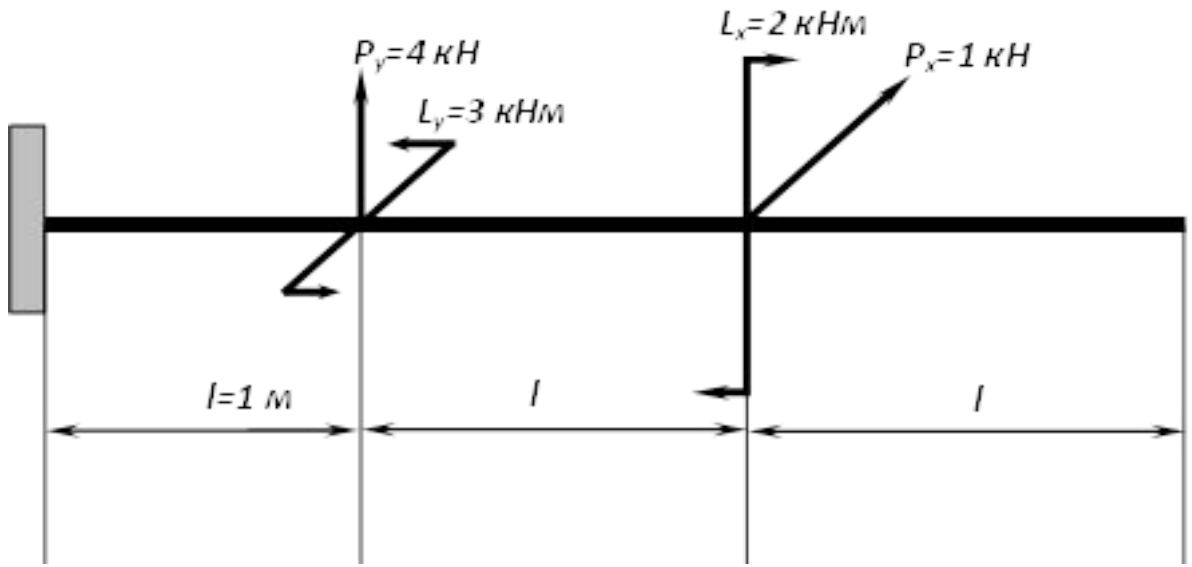


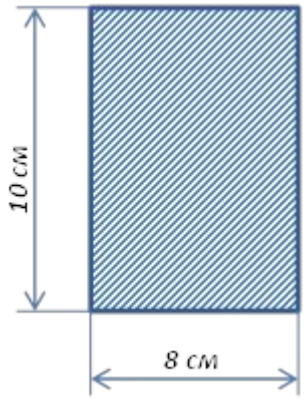
Условие прочности:

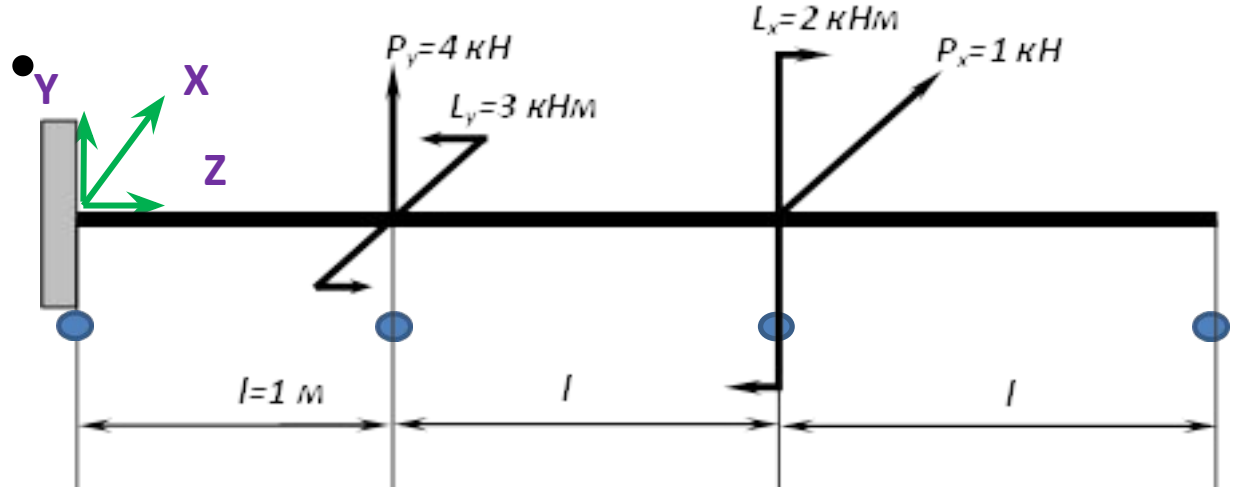
$$\sigma_{max} = 3{,}798 \leq [\sigma]$$

Расчеты на прочность при косом изгибе

Пример: проверить на прочность заданное сечение [σ]=120 МПа







$Q_y(z) = Q_y(0)|_1 - P_y|_{2,3}$

$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z|_1 - P_y \cdot (z-l)|_2 - L_x|_3$

$Q_x(z) = Q_x(0)|_{1,2} - P_x|_3$

$M_y(z) = M_y(0) - Q_x(0) \cdot z|_1 - L_y|_2 + P_x \cdot (z-2l)|_3$

ГУ: $M_x(3l) = 0$; $Q_y(3l) = 0$; $M_y(3l) = 0$; $Q_x(3l) = 0$;

$Q_y(3l) = Q_y(0) - P_y = 0$ $\qquad$ $Q_y(0) = P_y = 4$ кН

$M_x(3l) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot 3l - P_y \cdot (3l-l) - L_x = 0$

$M_x(0) = -Q_y(0) \cdot 3l + P_y \cdot (3l-l) + L_x = -4 \cdot 3 + 4 \cdot (3-1) + 2 = -2$ кНм

$Q_x(3l) = Q_x(0) - P_x = 0$ $\qquad$ $Q_x(0) = P_x = 1$ кН

$M_y(3l) = M_y(0) - Q_x(0) \cdot 3l - L_y + P_x \cdot (3l-2l) = 0$

$M_y(0) = Q_x(0) \cdot 3l + L_y - P_x \cdot (3l-2l) = 1 \cdot 3 + 3 - 1 \cdot (3-2) = 5$кНм

$Q_y(z) = Q_y(0)|_1 - P_y|_{2,3}$

$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z|_1 - P_y \cdot (z - l)|_2 - L_x|_3$

$Q_x(z) = Q_x(0)|_{1,2} - P_x|_3$

$M_y(z) = M_y(0) - Q_x(0) \cdot z|_1 - L_y|_2 + P_x \cdot (z - 2l)|_3$

1 участок: $0 \le z \le l$

$Q_y(0) = 4$ кН;

$Q_y(l) = 4$ кН;

$M_x(0) = -2 + 4 \cdot 0 = -2$ кНм;

$M_x(l) = -2 + 4 \cdot 1 = 2$ кНм;

$Q_x(0) = 1$ кН;

$Q_x(l) = 1$ кН;

$M_y(0) = 5 - 1 \cdot 0 = 5$ кНм;

$M_y(l) = 5 - 1 \cdot 1 = 4$ кНм;

2 участок: $l \le z \le 2l$

$Q_y(l) = 4 - 4 = 0$ кН;

$Q_y(2l) = 4 - 4 = 0$ кН;

$M_x(l) = -2 + 4 \cdot 1 - 4(1 - 1) = 2$ кНм;

$M_x(2l) = -2 + 4 \cdot 2 - 4(2 - 1) = 2$ кНм;

$Q_x(l) = 1$ кН;

$Q_x(2l) = 1$ кН;

$M_y(l) = 5 - 1 \cdot 1 - 3 = 1$ кНм;

$M_y(2l) = 5 - 1 \cdot 2 - 3 = 0$ кНм;

$Q_y(z) = Q_y(0)|_1 - P_y|_{2,3}$

$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z|_1 - P_y \cdot (z - l)|_2 - L_x|_3$

$Q_x(z) = Q_x(0)|_{1,2} - P_x|_3$

$M_y(z) = M_y(0) - Q_x(0) \cdot z|_1 - L_y|_2 + P_x \cdot (z - 2l)|_3$

3 участок: $2l \le z \le 3l$

$Q_y(2l) = 4-4=0$ кН; $Q_x(2l) = 1-1=0$ кН;

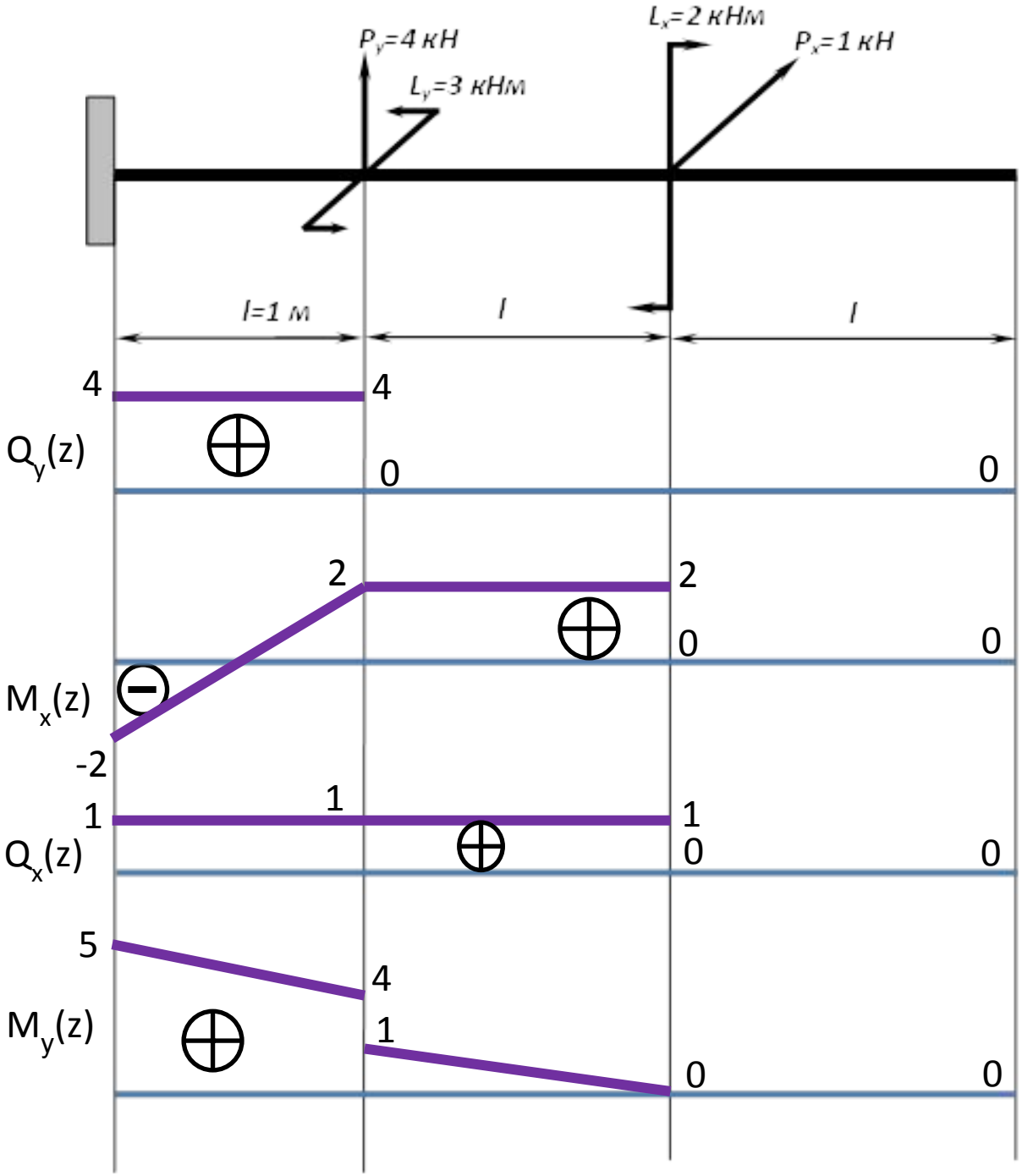
$Q_y(3l) = 4-4=0$ кН; $Q_x(3l) = 1-1=0$ кН;

$M_x(2l) = -2+4\cdot2-4(2-1)-2=0$ кНм;

$M_x(3l) = -2+4\cdot3-4(3-1)-2=0$ кНм;

$M_y(2l) = 5-1\cdot2-3+1(2-2)=0$ кНм;

$M_y(3l) = 5-1\cdot3-3+1(3-2)=0$ кНм;


P_y=4 кН
L_y=3 кНм
L_x=2 кНм
P_x=1 кН
l=1 м
l
l
4
4
$Q_y(z)$
0
0
2
2
0
0
$M_x(z)$
-2
1
1
1
$Q_x(z)$
0
0
5
4
$M_y(z)$
1
0
0

прямоугольник

$F = b \cdot h = 8 \cdot 10 = 80$ см^2

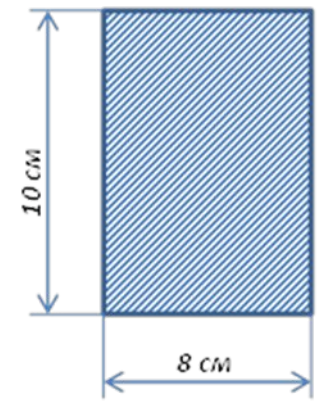
$J_x = b \cdot h^3/12 = 8 \cdot (10)^3/12 = 667$ см^4

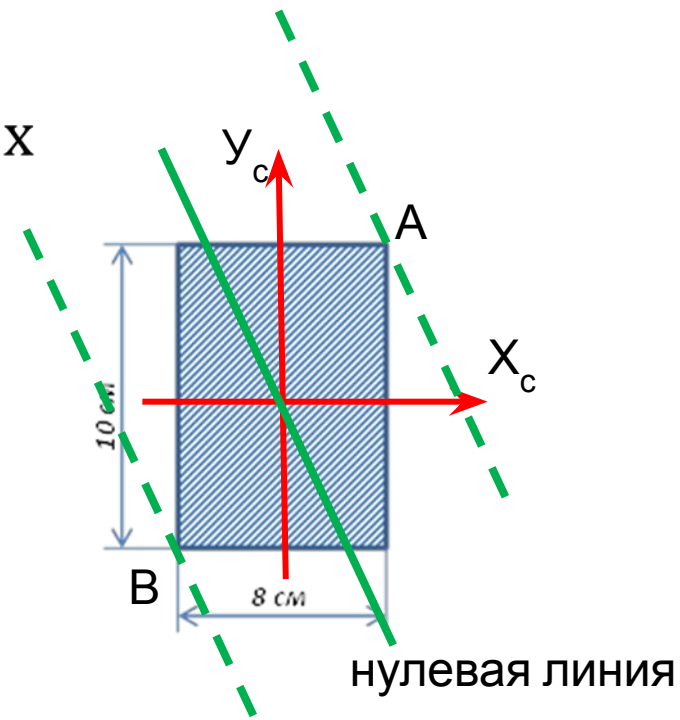
$J_y = b^3 \cdot h/12 = (8)^3 \cdot 10\ /12 = 427$ см^4

нулевая линия

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y - \frac{M_y}{J_y} \cdot x = 0$$

$$y = -\frac{M_y \cdot J_x}{J_y \cdot M_x} \cdot x = -\frac{5 \cdot 10^3 \cdot 667 \cdot 10^{-8}}{427 \cdot 10^{-8} \cdot (-2 \cdot 10^3)} \cdot x = -3{,}9 \cdot x$$



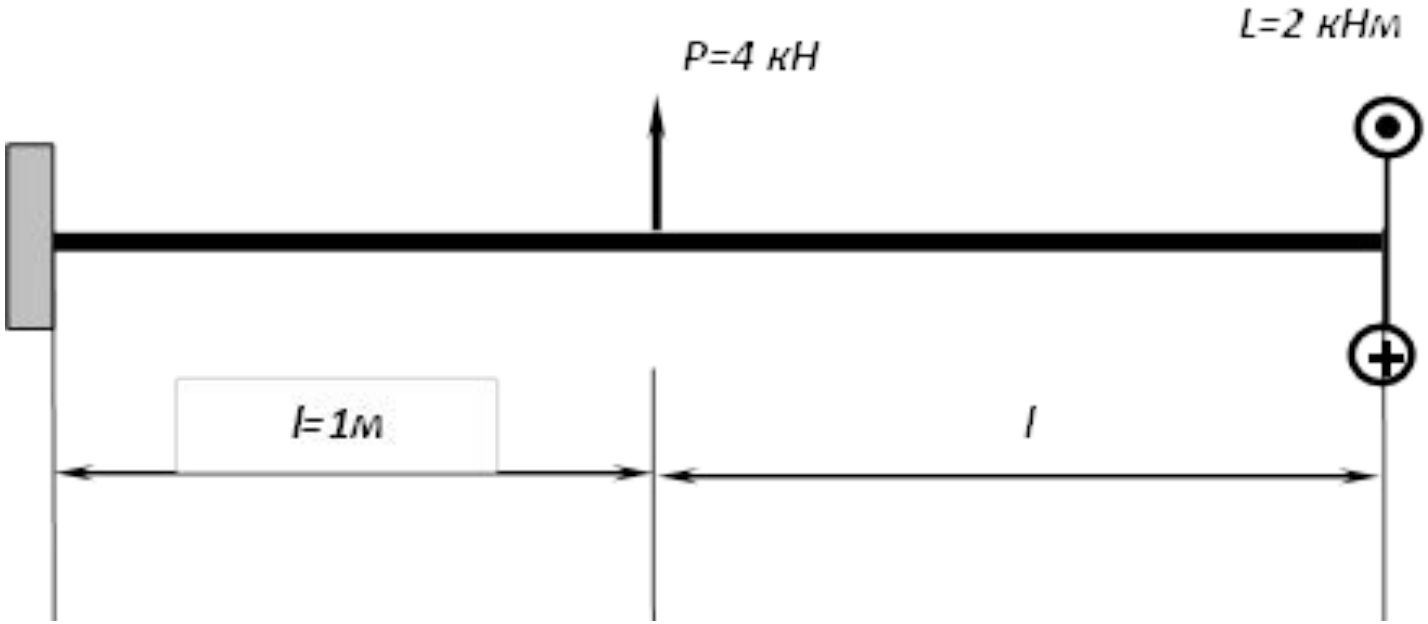


Условие прочности:

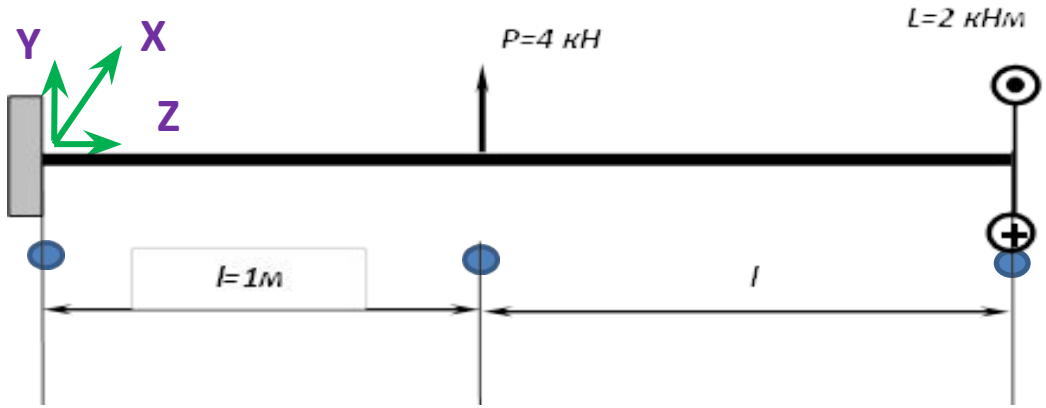
$$\sigma_A = \frac{-2 \cdot 10^3}{667 \cdot 10^{-8}} \cdot 0{,}05 - \frac{5 \cdot 10^3}{427 \cdot 10^{-8}} \cdot 0{,}04 = -61{,}8 \text{ МПа} < [\sigma]$$

Расчеты на прочность при изгибе с кричением

Пример: из расчета на прочность определить размер круглого сечения [σ]=160 МПа



•



$Q_y(z) = Q_y(0)|_1 - P|_2$

$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z|_1 - P(z-l)|_2$

$M_к(z) = M_к(0)|_{1,2}$

ГУ: $M_x(2l) = 0$; $Q_y(2l) = 0$; $M_к(2l) = L$.

$Q_y(2l) = Q_y(0) - P = 0$ $\qquad$ $Q_y(0) = P = 4$ кН

$M_x(2l) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot 2l - P(2l - l) = 0$

$M_x(0) = -Q_y(0) \cdot 2l + P(2l - l) = -4 \cdot 2 + 4(2-1) = -4$ кНм

$M_к(2l) = M_к(0) = L$ $\qquad$ $M_к(0) = L = 2$ кНм

$Q_y(z) = Q_y(0)|_1 - P|_2$

$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z|_1 - P(z-l)|_2$

$M_к(z) = M_к(0)|_{1,2}$

1 участок: $0 \le z \le l$

$Q_y(0) = 4$ кН; $M_к(0) = 2$ кНм;

$Q_y(l) = 4$ кН; $M_к(l) = 2$ кНм;

$M_x(0) = -4+4\cdot 0 = -4$ кНм;

$M_x(l) = -4+4\cdot 1 = 0$ кНм;

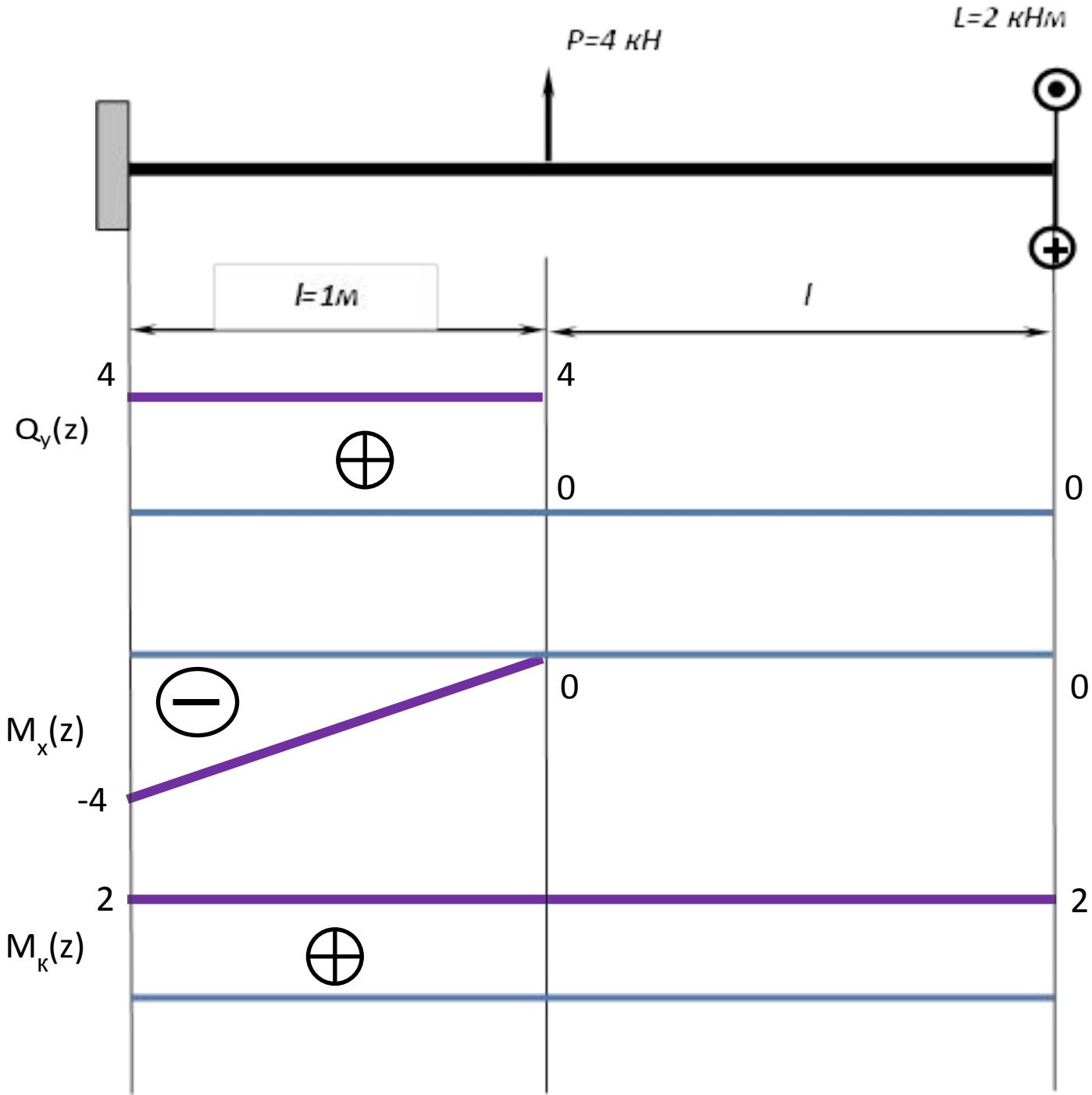
2 участок: $l \le z \le 2l$

$Q_y(l) = 4-4 = 0$ кН $M_к(l) = 2$кНм;

$Q_y(2l) = 4-4 = 0$ кН; $M_к(2l) = 2$кНм;

$M_x(l) = -4+4\cdot 1-4(1-1) = 0$ кНм;

$M_x(2l) = -4+4\cdot 2-4(2-1) = 0$ кНм;


P=4 кН
L=2 кНм
l=1м
l
4
4
Qy(z)
0
0
0
0
Mx(z)
-4
2
2
Mк(z)

При изгибе: $\sigma_z = \frac{M_x}{W_x} = \frac{M_x}{0{,}1d^3}$

При кручении: $\tau_{zx} = \frac{M_к}{W_\rho} = \frac{M_к}{0{,}2d^3}$

Воспользуемся третьей теорией прочности (теория наибольших касательных напряжений).

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Для определения главных напряжений запишем основное характеристическое уравнение напряженного состояния

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0$$

где $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_z$

$$I_2 = \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 = -\tau_{xz}^2,$$

$$I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - \sigma_y \cdot \tau_{xz}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 = 0$$

$$\sigma^3 - \sigma_z \cdot \sigma^2 - \tau_{xz}^2 \cdot \sigma = 0$$

$$\sigma\ (\sigma^2 - \sigma_z \cdot \sigma - \tau_{xz}^2) = 0$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2}$$

Подставим полученные главные напряжения в теорию прочности:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2}\ \frac{\sigma_z}{2} - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2}\right) =$$

$$= \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{0{,}1d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{M_к}{0{,}2d^3}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_к^2}}{0{,}1d^3} \leq [\sigma]$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_x^2 + M_к^2}}{0{,}1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{4000^2 + 2000^2}}{0{,}1 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0{,}065 \text{ м}$$