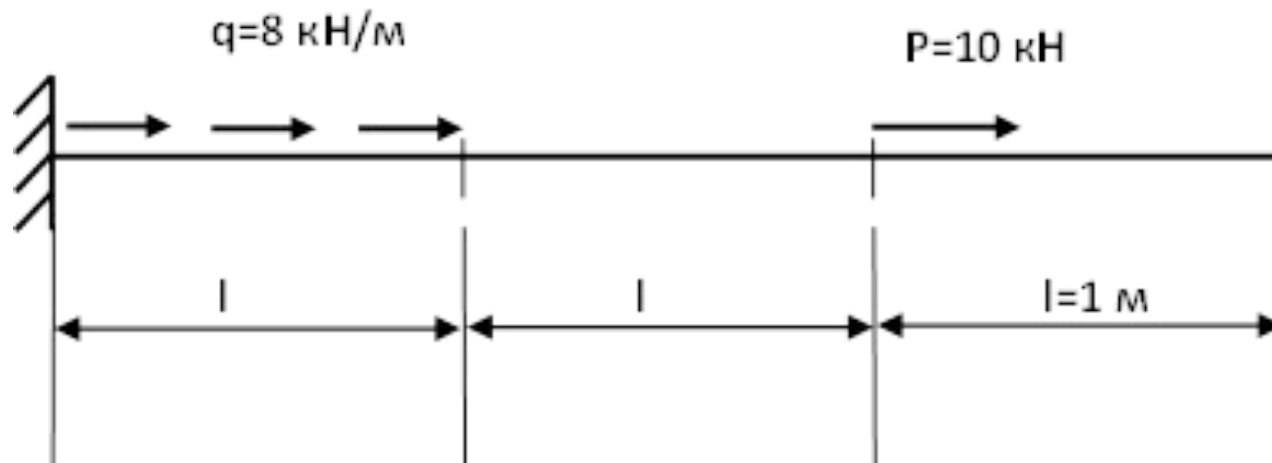
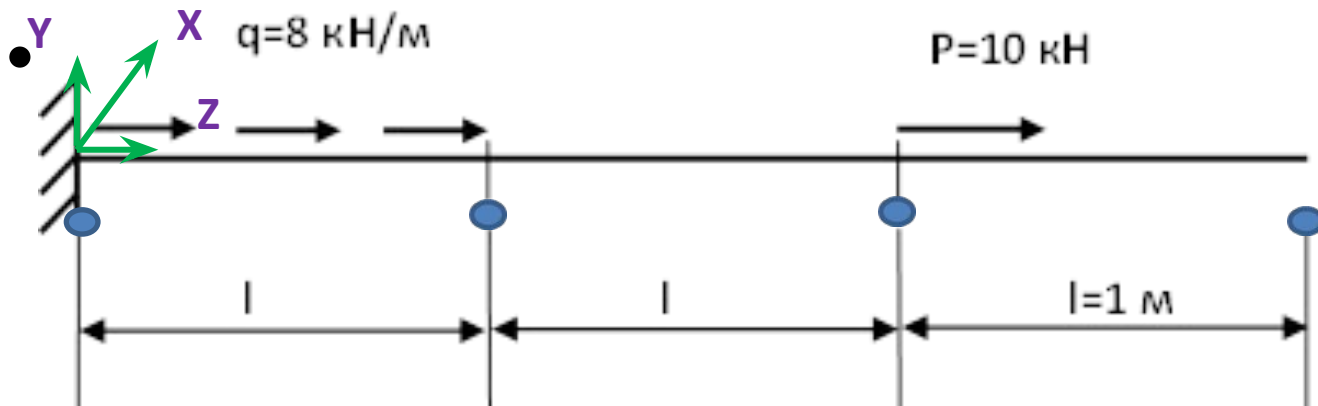


**Расчеты на  
прочность  
при различных  
видах нагружения**

**Расчеты на  
прочность  
при растяжении-  
сжатии**

**Пример:** из расчета на прочность определить размер квадратного сечения,  $[\sigma]=120$  МПа





$$N(z) = N(0) - q \cdot z|_1 + q(z-l)|_2 - P|_3$$

**ГУ:**  $N(3l) = 0$

$$N(3l) = N(0) - q \cdot 3l + q(3l-l) - P = 0$$

$$N(0) = q \cdot 3l - q(3l-l) + P = 8 \cdot 3 \cdot 1 - 8 \cdot (3-1) + 10 = 18 \text{ кН}$$

**1 участок:**  $0 \leq z \leq l$

$$N(0) = N(0) - q \cdot 0 = 18 \text{ кН}$$

$$N(l) = N(0) - q \cdot l = 18 - 8 \cdot 1 = 10 \text{ кН}$$

$$N(z) = N(0) - q \cdot z|_1 + q(z-l)|_2 - P|_3$$

**2 участок:**  $l \leq z \leq 2l$

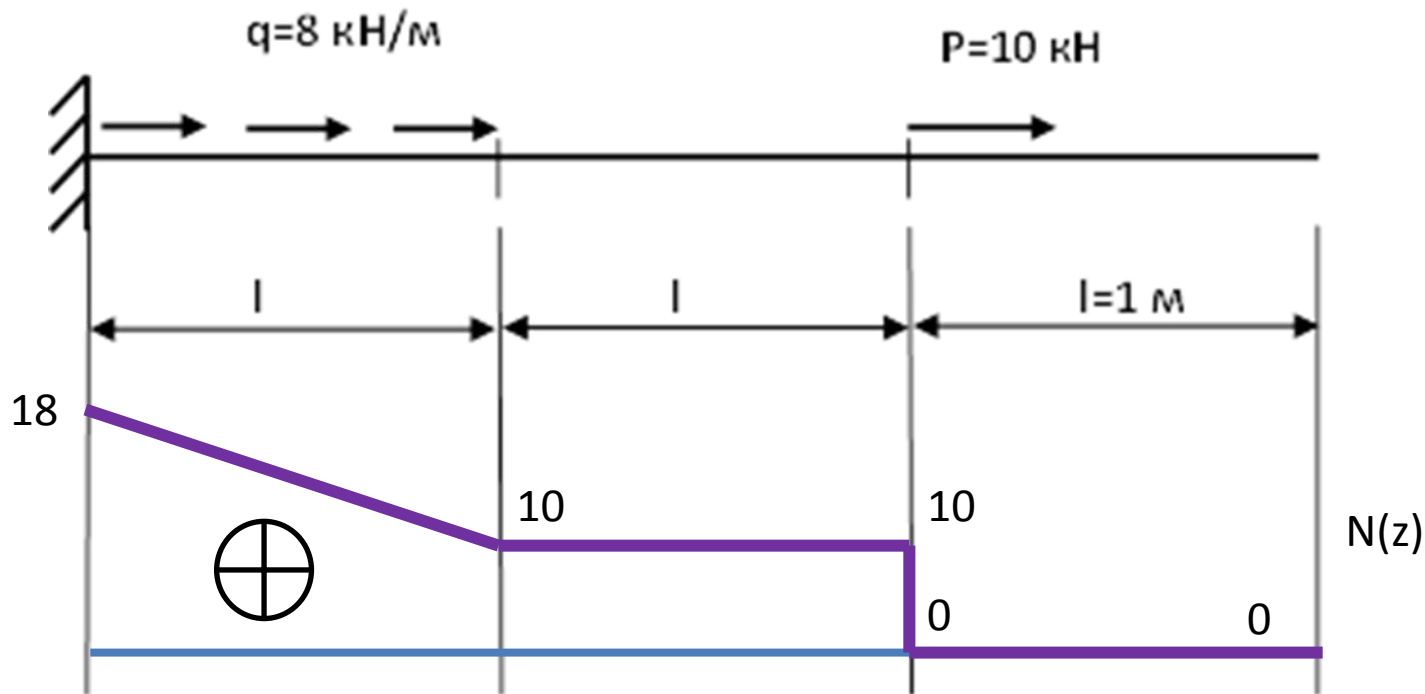
$$N(l) = N(0) - q \cdot l + q(l-l) = 18 - 8 \cdot 1 + 0 = 10 \text{ кН}$$

$$N(2l) = N(0) - q \cdot 2l + q(2l-l) = 18 - 8 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 10 \text{ кН}$$

**3 участок:**  $2l \leq z \leq 3l$

$$N(2l) = N(0) - q \cdot 2l + q(2l-l) - P = 18 - 8 \cdot 2 + 8 \cdot 1 - 10 = 0 \text{ кН}$$

$$N(3l) = N(0) - q \cdot 3l + q(3l-l) - P = 18 - 8 \cdot 3 + 8 \cdot 2 - 10 = 0 \text{ кН}$$



## Условие прочности при растяжении сжатии:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F} \leq [\sigma]$$

$$F = \frac{N_{max}}{[\sigma]} = \frac{18 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6} = 0,0015 \text{ м}^2$$

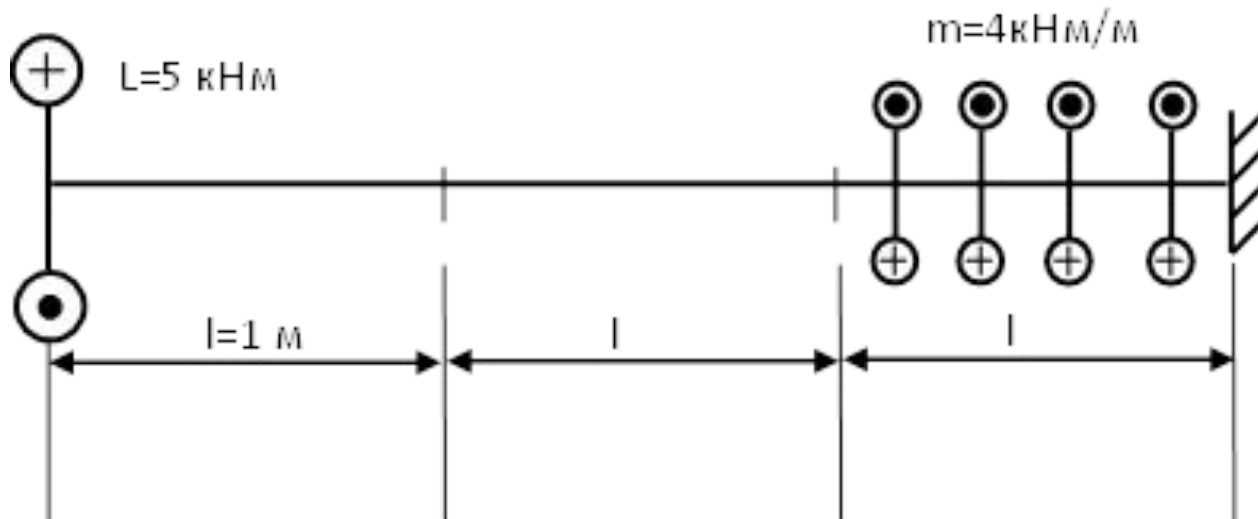
$$F = a^2$$

$$a = \sqrt{F} = \sqrt{0,0015} = 0,0387 \text{ м}$$

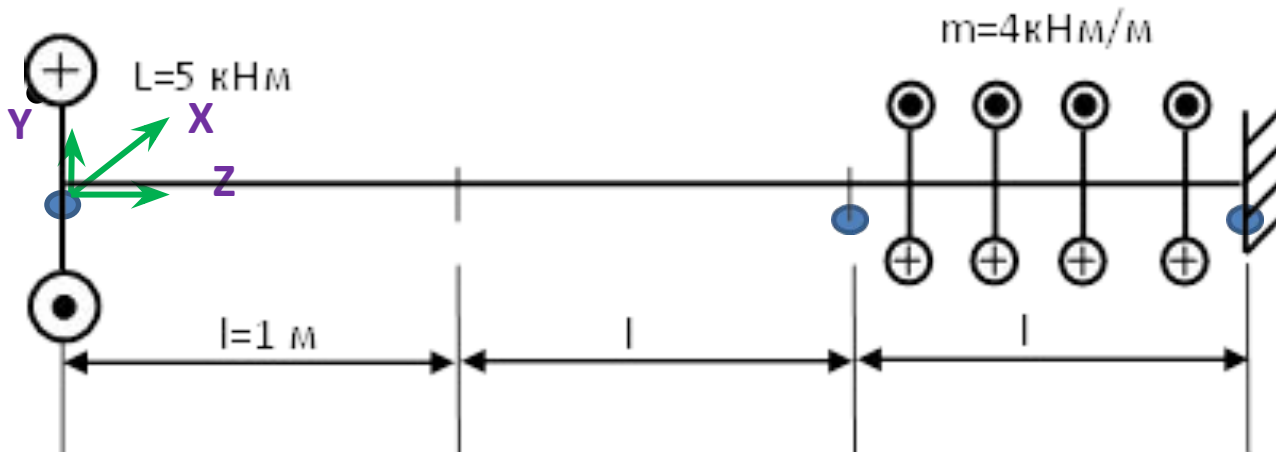
Принимаем  $a = 40 \text{ мм}$

# Расчеты на прочность при кручении

**Пример:** из расчета на прочность определить размер круглого сечения,  $[\tau]=100$  МПа







$$M_K(z) = M_K(0) + L|_1 - m(z-2l)|_2$$

**ГУ:**  $M_K(0) = 0$

**1 участок:**  $0 \leq z \leq 2l$

$$M_K(0) = M_K(0) + L = 5 \text{ кН}$$

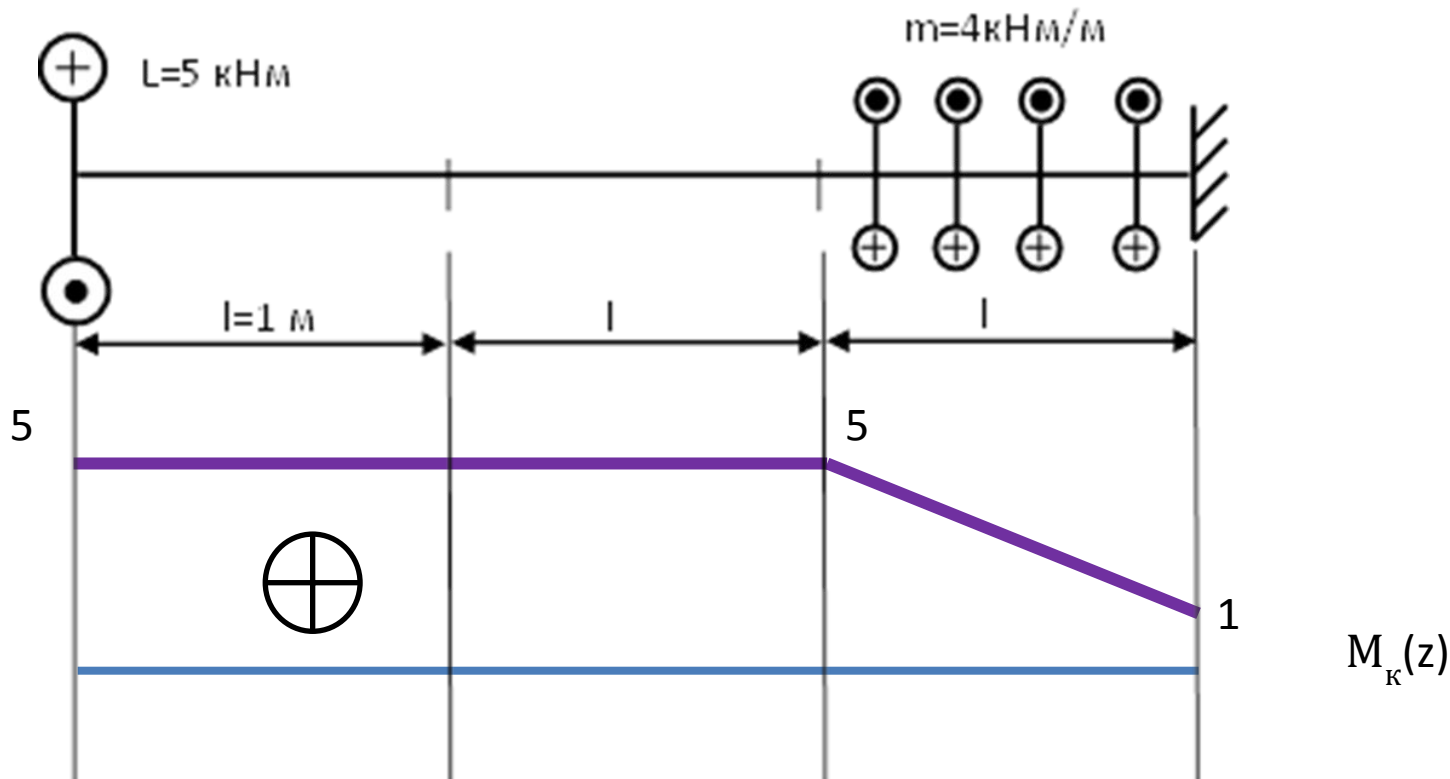
$$M_K(2l) = M_K(0) + L = 5 \text{ кН}$$

$$M_K(z) = M_K(0) + L|_1 - m(z-2l)|_2$$

**2 участок:**  $2l \leq z \leq 3l$

$$M_K(2l) = M_K(0) + L - m(z-2l) = 5 - 0 = 5 \text{ кН}$$

$$M_K(3l) = M_K(0) + L - m(z-2l) = 5 - 4 \cdot 1 = 1 \text{ кН}$$



## Условие прочности при кручении:

$$\tau_{max} = \frac{M_{kmax}}{W_{\rho}} \leq [\tau]$$

$$W_{\rho} = \frac{M_{kmax}}{[\tau]} = \frac{5 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 0,00005 \text{ м}^3$$

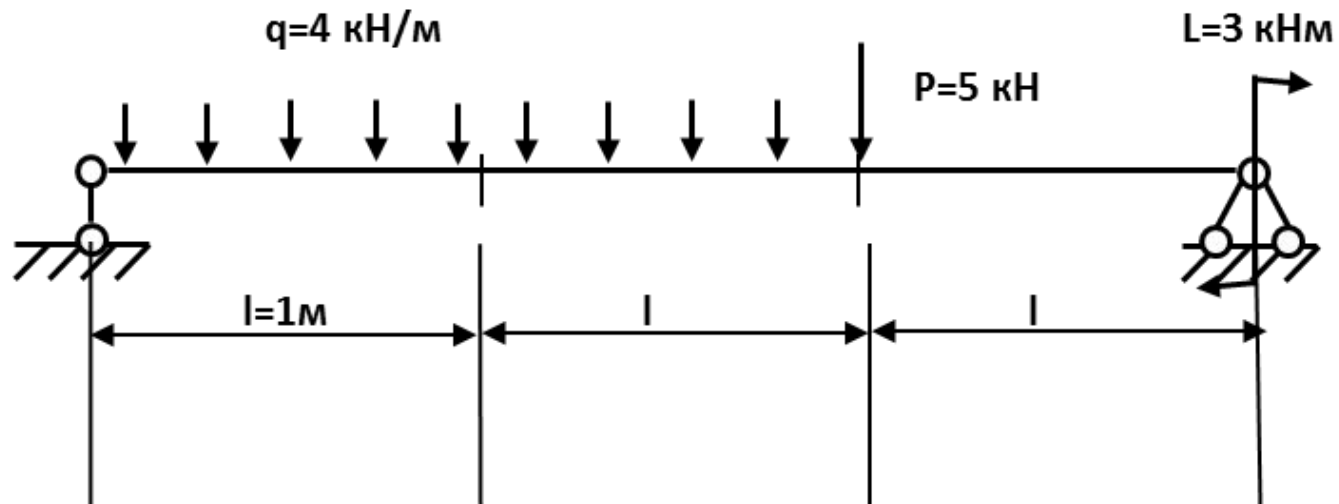
$$W_{\rho} = 0,2d^3$$

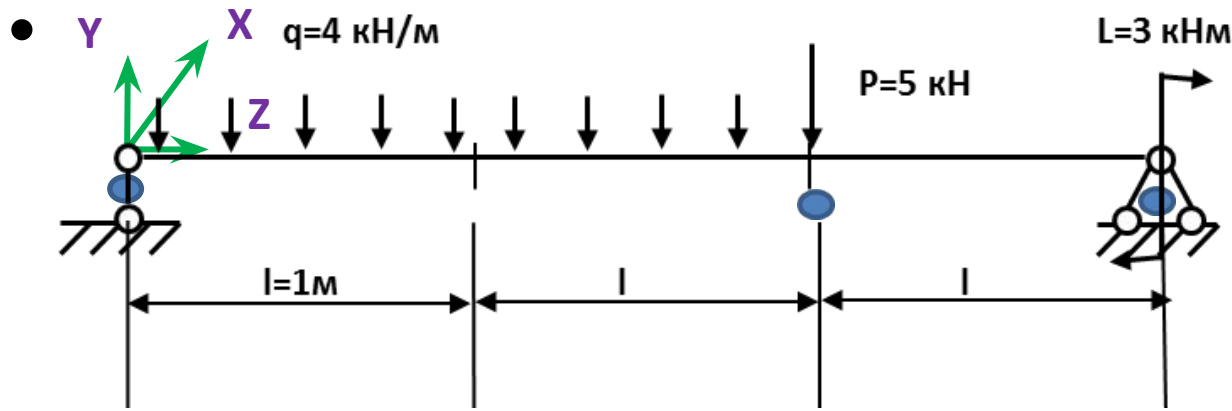
$$d = \sqrt[3]{\frac{W_{\rho}}{0,2}} = \sqrt[3]{\frac{0,00005}{0,2}} = 0,063 \text{ м}$$

Принимаем  $d = 65 \text{ мм}$

# Расчеты на прочность при изгибе

**Пример:** из расчета на прочность определить размер двутаврового сечения,  $[\sigma]=160$  МПа





$$Q_y(z) = Q_y(0) + q \cdot z|_1 - q(z-2l) + P|_2$$

$$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z + \frac{q(z)^2}{2}|_1 - \frac{q(z-2l)^2}{2} + P \cdot (z-2l)|_2$$

**ГУ:**  $M_x(0) = 0; M_x(3l) = L$

$$M_x(3l) = Q_y(0) \cdot 3l + \frac{q(3l)^2}{2} - \frac{q(3l-2l)^2}{2} + P \cdot (3l-2l) = L$$

$$Q_y(0) = (-4,5ql + 0,5ql - Pl) / 3l = (-4 \cdot 4 \cdot 1 - 5 \cdot 1) / 3 \cdot 1 = -6 \text{ кН}$$

$$Q_y(z) = Q_y(0) + q \cdot z|_1 - q(z-2l) + P|_2$$

$$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z + \frac{q(z)^2}{2}|_1 - \frac{q(z-2l)^2}{2} + P \cdot (z - 2l)|_2$$

**1 участок:**  $0 \leq z \leq 2l$

$$Q_y(0) = Q_y(0) + q \cdot 0 = -6 \text{ кН}$$

$$Q_y(2l) = Q_y(0) + q \cdot 2l = -6 + 4 \cdot 2 = 2 \text{ кН}$$

$$M_x(0) = Q_y(0) \cdot 0 + \frac{q(0)^2}{2} = 0 \text{ кНм}$$

$$M_x(2l) = Q_y(0) \cdot 2l + \frac{q(2l)^2}{2} = -6 \cdot 2 + \frac{4(2)^2}{2} = -4 \text{ кНм}$$

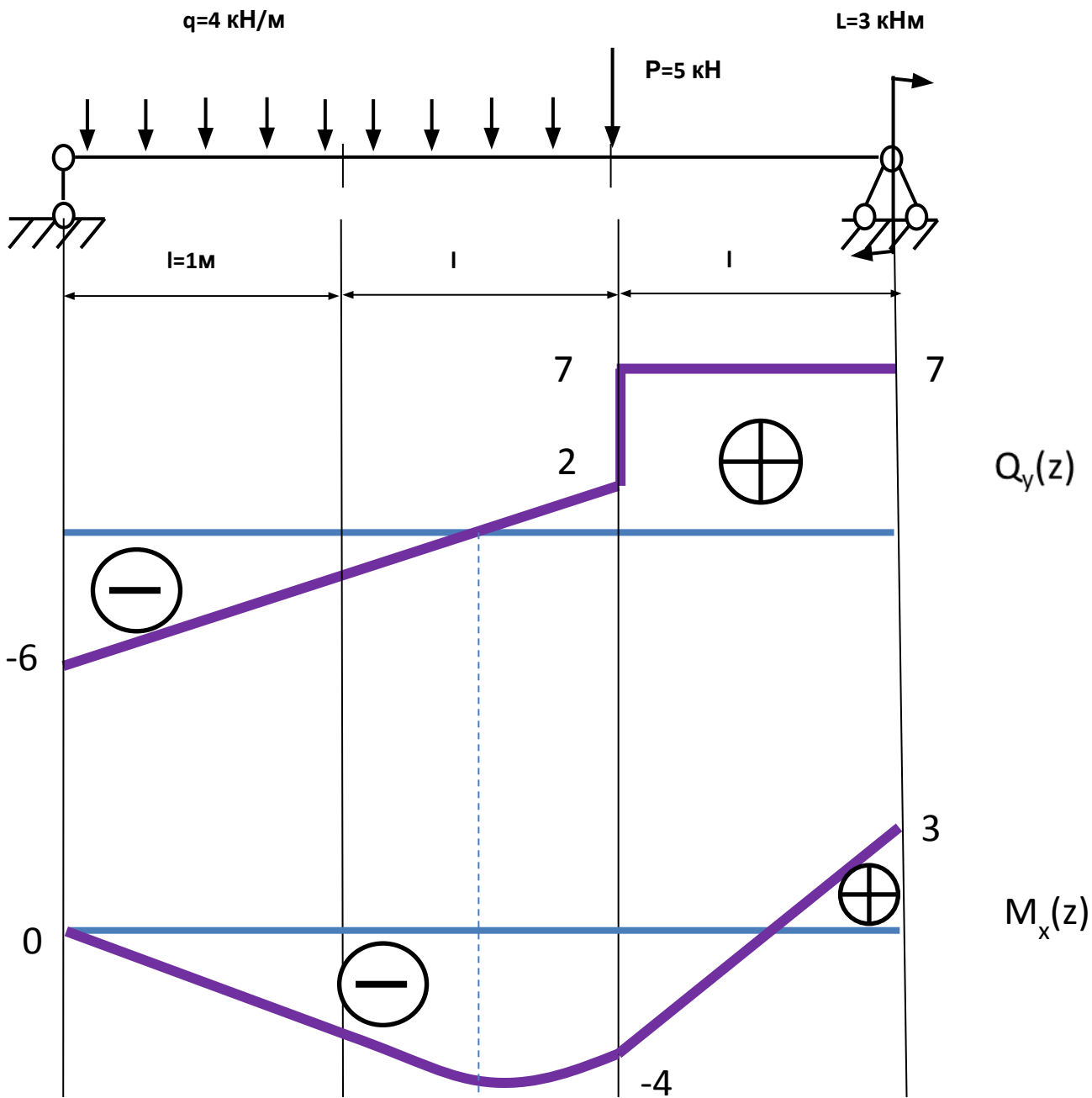
**2 участок:**  $2l \leq z \leq 3l$

$$Q_y(2l) = Q_y(0) + q \cdot 2l - q(2l - 2l) + P = -6 + 4 \cdot 2 - 0 + 5 = 7 \text{ кН}$$

$$Q_y(3l) = Q_y(0) + q \cdot 3l - q(3l - 2l) - P = -6 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 1 + 5 = 7 \text{ кН}$$

$$M_x(2l) = Q_y(0) \cdot 2l + \frac{q(2l)^2}{2} - \frac{q(2l-2l)^2}{2} + P \cdot (2l - 2l) =$$
$$= -6 \cdot 2 + \frac{4(2)^2}{2} - 0 + 0 = -4 \text{ кНм}$$

$$M_x(3l) = Q_y(0) \cdot 3l + \frac{q(3l)^2}{2} - \frac{q(3l-2l)^2}{2} + P \cdot (3l - 2l) =$$
$$= -6 \cdot 3 + \frac{4(3)^2}{2} - \frac{4(1)^2}{2} + 5 = 3 \text{ кНм}$$





## Расчет экстремума:

$$Q_y(0) + q \cdot z = 0$$

$$Z = - Q_y(0) / q = -(-6) / 4 = 1,5 \text{ м}$$

$$M_x(1,5) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot 1,5 + \frac{4 \cdot (1,5)^2}{2} = -4,5 \text{ кНм}$$

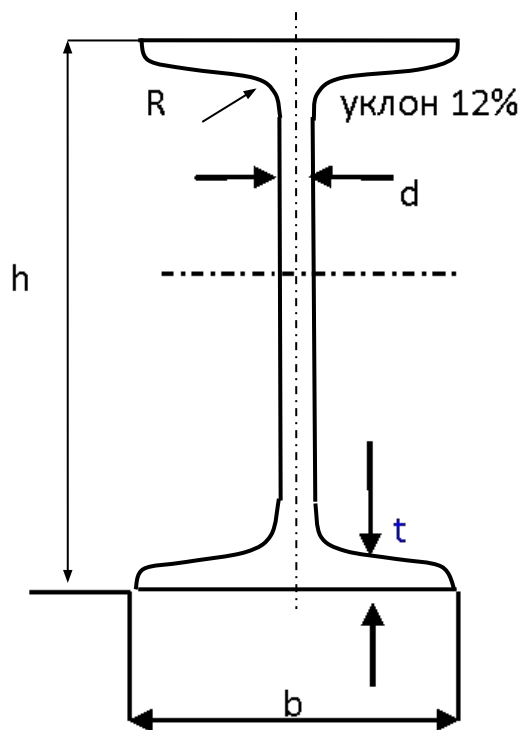
## Условие прочности при изгибе:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x_{max}}}{W_x} \leq [\sigma]$$

$$W_x = \frac{M_{x_{max}}}{[\sigma]} = \frac{4,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,000028 \text{ м}^3 = 28 \text{ см}^3$$

Принимаем двутавр №10  $W_x = 39,7 \text{ см}^3$

у СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ (ДВУТАВР).

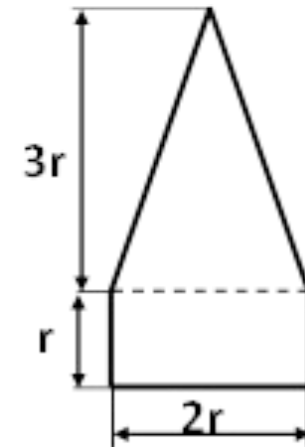
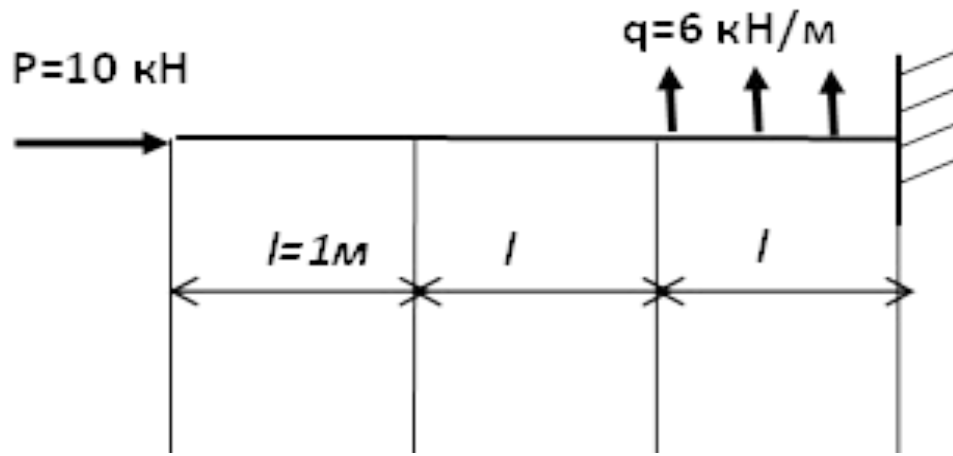


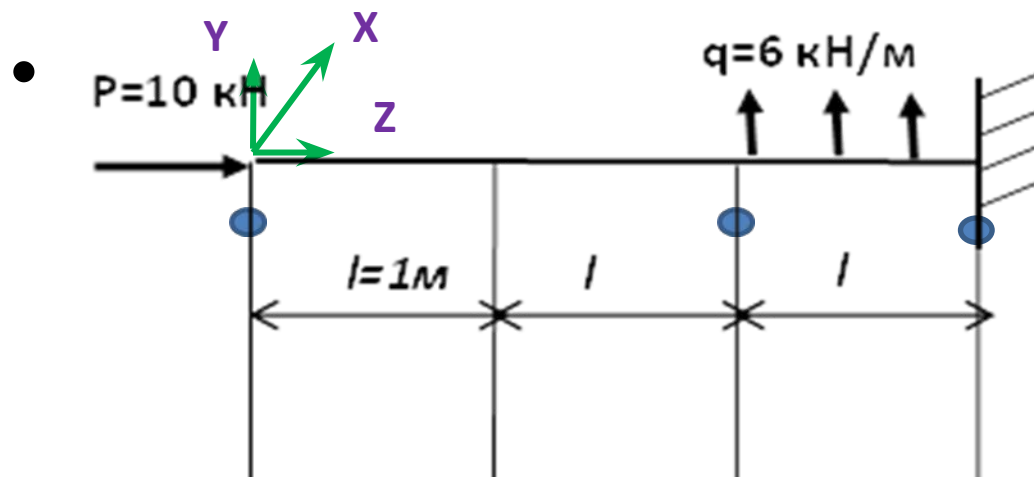
сталь прокатная  
 Балки двутавровые  
 ГОСТ 8239-56

	h	b	d	t	R	r	Площадь сечения	$J_x$	$W_x$	$i_x$	$S_x^*$	$J_y$	$W_y$	$i_y$
	мм						см <sup>2</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>3</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см
10	100	55	4.5	7.2	7	2.5	12.0	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22
12	120	64	4.8	7.3	7.5	3	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38

**Расчеты на  
прочность  
при растяжении  
с изгибом**

**Пример:** проверить на прочность заданное сечение:  $r=8\text{ см}$ ,  $[\sigma]=140\text{ МПа}$





$$Q_y(z) = Q_y(0)|_1 - q(z-2l)|_2$$

$$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z|_1 - \frac{q(z-2l)^2}{2}|_2$$

$$N(z) = N(0) - P|_{1,2}$$

**ГУ:**  $M_x(0) = 0; Q_y(0) = 0; N(0) = 0.$

$$Q_y(z) = Q_y(0)|_1 - q(z-2l)|_2$$

$$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z|_1 - \frac{q(z-2l)^2}{2}|_2$$

$$N(z) = N(0) - P|_{1,2}$$

**1 участок:**  $0 \leq z \leq 2l$

$$Q_y(0) = 0 \text{ кН};$$

$$N(0) = -P = -10 \text{ кН};$$

$$Q_y(2l) = 0 \text{ кН};$$

$$N(2l) = -P = -10 \text{ кН};$$

$$M_x(0) = 0 \text{ кНм};$$

$$M_x(2l) = 0 \text{ кНм};$$

**2 участок:**  $2l \leq z \leq 3l$

$$Q_y(2l) = 0 \text{ кН};$$

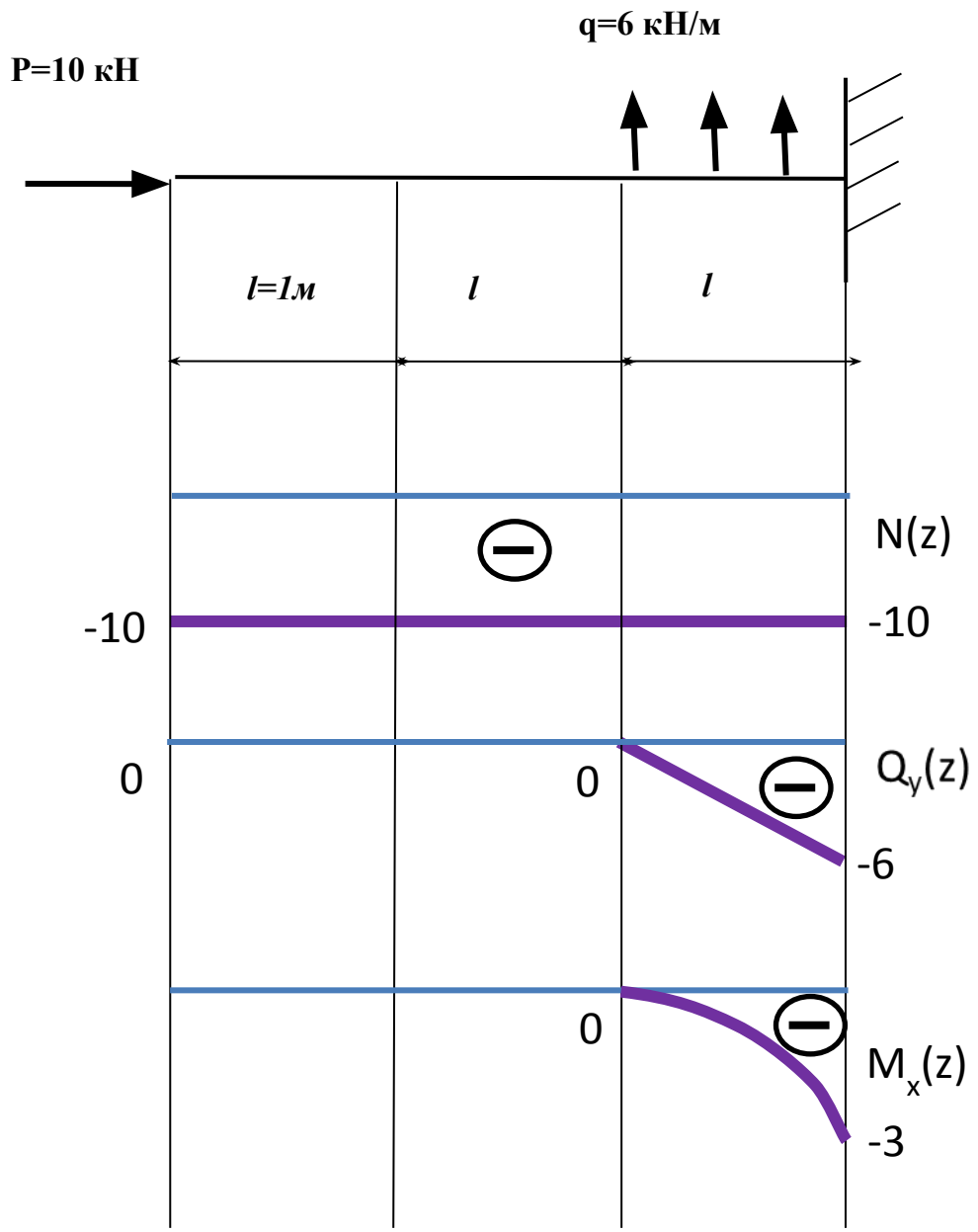
$$N(2l) = -P = -10 \text{ кН};$$

$$Q_y(3l) = -q(z-2l) = -6 \cdot 1 = -6 \text{ кН};$$

$$N(3l) = -P = -10 \text{ кН};$$

$$M_x(2l) = -\frac{q(z-2l)^2}{2} = -\frac{6(2-2)^2}{2} = 0 \text{ кНм};$$

$$M_x(3l) = -\frac{q(z-2l)^2}{2} = -\frac{6(3-2)^2}{2} = -3 \text{ кНм};$$



1 фигура - треугольник

$$F = b \cdot h / 2 = 2r \cdot 3r / 2 = 3r^2$$

$$J_{x_1} = b \cdot h^3 / 36 = 2r \cdot (3r)^3 / 36 = 1,5r^4$$

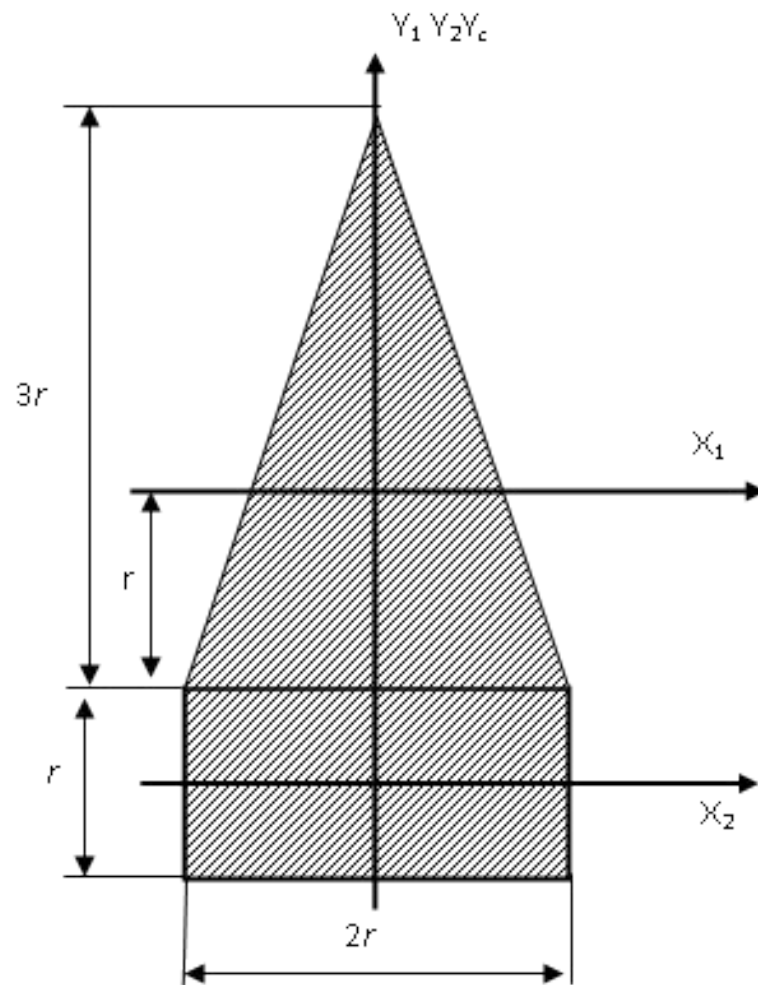
$$J_{y_1} = b^3 \cdot h / 48 = (2r)^3 \cdot 3r / 48 = 0,5r^4$$

2 фигура - прямоугольник

$$F_2 = b \cdot h = 2r \cdot r = 2r^2$$

$$J_{x_2} = b \cdot h^3 / 12 = 2r \cdot (r)^3 / 12 = 0,17r^4$$

$$J_{y_2} = b^3 \cdot h / 12 = (2r)^3 \cdot r / 12 = 0,67r^4$$





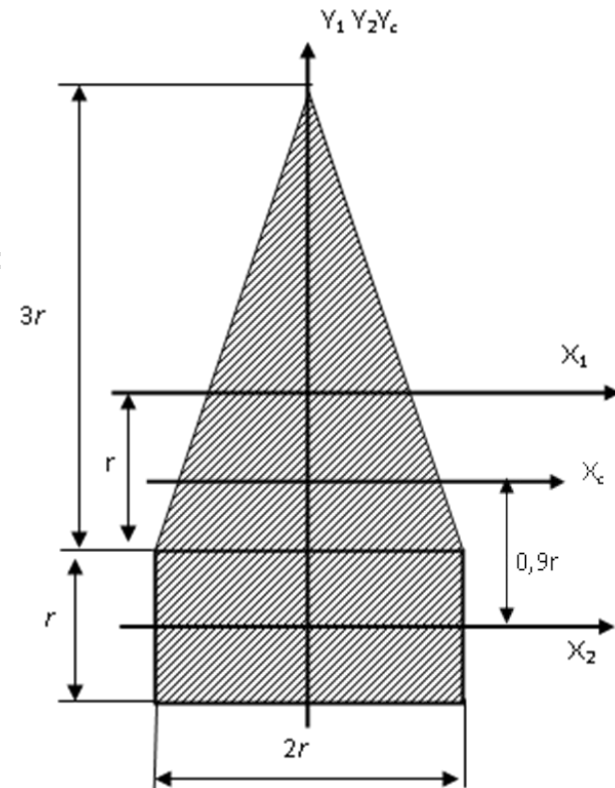
$X_2Y_2$  – вспомогательные оси

$Y$  является осью симметрии фигуры, и поэтому она будет центральной, а центр тяжести фигуры находится на этой же оси, т.е. абсцисса  $x_c = 0$ .

$$y_c = \frac{\sum S_{xi}}{\sum F_i} = \frac{(S_{xc}^1 + S_{xc}^2)}{(F_1 + F_2)} = \frac{(F_1 y_1 + F_2 y_2)}{(F_1 + F_2)} = \frac{(1,5r \cdot 3r^2 + 0)}{(3r^2 + 2r^2)} = 0,9r$$

$$J_{xc} = J_{xc}^1 + J_{xc}^2 = (J_{x1} + a F_1) + (J_{x2} + a F_2) = \frac{1}{12} (1,5r^4 + (0,6r)^2 \cdot 3r^2) + \frac{1}{12} (0,17r^4 + (0,9r)^2 \cdot 2r^2) = 4,37 r^4$$

$$J_{yc} = J_{yc}^1 + J_{yc}^2 = 0,5r^4 + 0,67r^4 = 1,17r^4$$



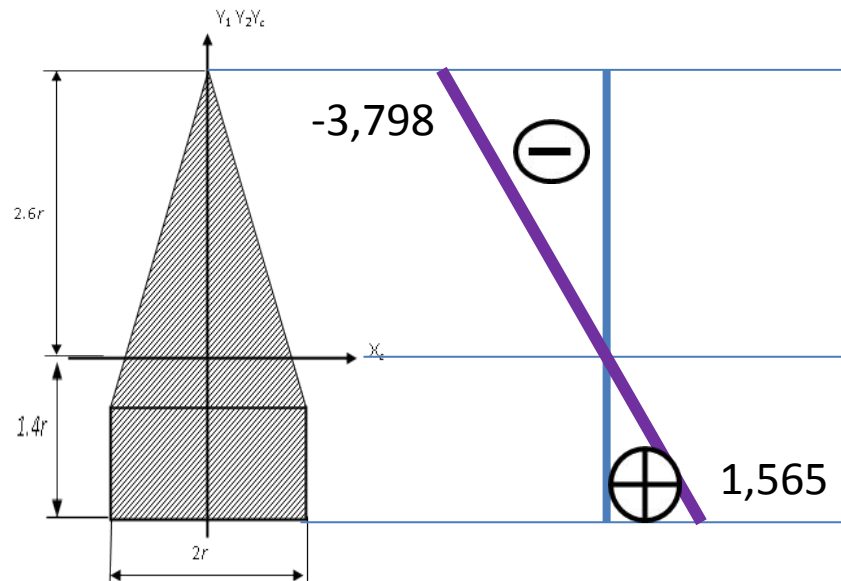
## Нулевая линия при изгибе с растяжением

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y = 0$$

$$y = - \frac{N \cdot J_x}{F \cdot M_x} = - \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 4,37 \cdot 0,08^4}{5 \cdot 0,08^2 \cdot (-3 \cdot 10^3)} = -0,0186 \text{ м}$$

$$\sigma_A = \frac{-10 \cdot 10^3}{5 \cdot 0,08^2} + \frac{(-3 \cdot 10^3)}{4,37 \cdot 0,08^4} \cdot (2,6 \cdot 0,08) = -3,798 \text{ МПа}$$

$$\sigma_B = \frac{-10 \cdot 10^3}{5 \cdot 0,08^2} + \frac{(-3 \cdot 10^3)}{4,37 \cdot 0,08^4} \cdot (-1,4 \cdot 0,08) = 1,565 \text{ МПа}$$

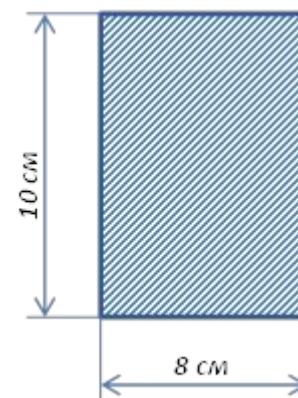
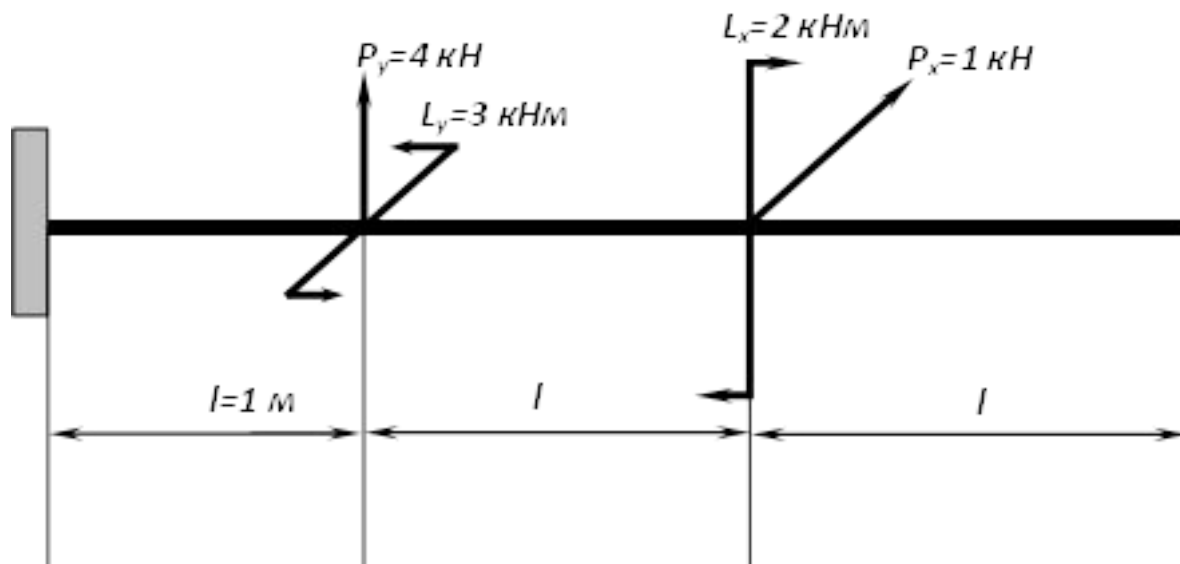


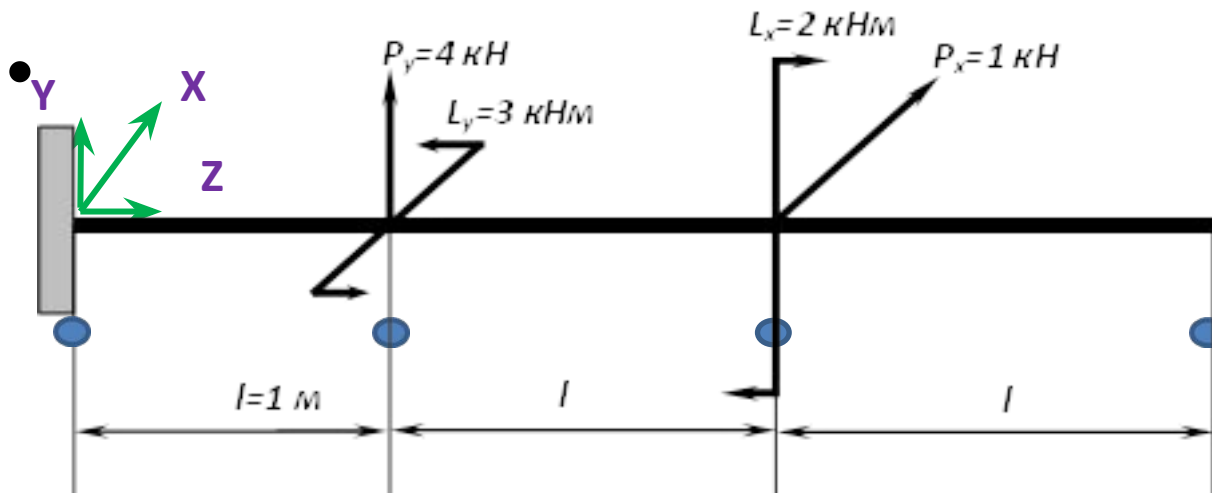
**Условие прочности:**

$$\sigma_{max} = 3,798 \leq [\sigma]$$

**Расчеты на  
прочность  
при косом изгибе**

**Пример:** проверить на прочность заданное сечение  $[\sigma]=120 \text{ МПа}$





$$Q_y(z) = Q_y(0) |_{1} - P_y |_{2,3}$$

$$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z |_{1} - P_y \cdot (z-l) |_{2} - L_x |_{3}$$

$$Q_x(z) = Q_x(0) |_{1,2} - P_x |_{3}$$

$$M_y(z) = M_y(0) - Q_x(0) \cdot z |_{1} - L_y |_{2} + P_x \cdot (z-2l) |_{3}$$

$$\Gamma Y: M_x(3l) = 0; Q_y(3l) = 0; M_y(3l) = 0; Q_x(3l) = 0;$$

$$Q_y(3l) = Q_y(0) - P_y = 0$$

$$Q_y(0) = P_y = 4 \text{ кН}$$

$$M_x(3l) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot 3l - P_y \cdot (3l-l) - L_x = 0$$

$$M_x(0) = -Q_y(0) \cdot 3l + P_y \cdot (3l-l) + L_x = -4 \cdot 3 + 4 \cdot (3-1) + 2 = -2 \text{ кНм}$$

$$Q_x(3l) = Q_x(0) - P_x = 0$$

$$Q_x(0) = P_x = 1 \text{ кН}$$

$$M_y(3l) = M_y(0) - Q_x(0) \cdot 3l - L_y + P_x \cdot (3l-2l) = 0$$

$$M_y(0) = Q_x(0) \cdot 3l + L_y - P_x \cdot (3l-2l) = 1 \cdot 3 + 3 - 1 \cdot (3-2) = 5 \text{ кНм}$$

$$Q_y(z) = Q_y(0)|_1 - P_y|_{2,3}$$

$$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z|_1 - P_y \cdot (z-l)|_2 - L_x|_3$$

$$Q_x(z) = Q_x(0)|_{1,2} - P_x|_3$$

$$M_y(z) = M_y(0) - Q_x(0) \cdot z|_1 - L_y|_2 + P_x \cdot (z-2l)|_3$$

**1 участок:**  $0 \leq z \leq l$

$$Q_y(0) = 4 \text{ кН};$$

$$Q_y(l) = 4 \text{ кН};$$

$$M_x(0) = -2 + 4 \cdot 0 = -2 \text{ кНм};$$

$$M_x(l) = -2 + 4 \cdot 1 = 2 \text{ кНм};$$

$$Q_x(0) = 1 \text{ кН};$$

$$Q_x(l) = 1 \text{ кН};$$

$$M_y(0) = 5 - 1 \cdot 0 = 5 \text{ кНм};$$

$$M_y(l) = 5 - 1 \cdot 1 = 4 \text{ кНм};$$

**2 участок:**  $l \leq z \leq 2l$

$$Q_y(l) = 4 - 4 = 0 \text{ кН};$$

$$Q_y(2l) = 4 - 4 = 0 \text{ кН};$$

$$M_x(l) = -2 + 4 \cdot 1 - 4(1-1) = 2 \text{ кНм};$$

$$M_x(2l) = -2 + 4 \cdot 2 - 4(2-1) = 2 \text{ кНм};$$

$$Q_x(l) = 1 \text{ кН};$$

$$Q_x(2l) = 1 \text{ кН};$$

$$M_y(l) = 5 - 1 \cdot 1 - 3 = 1 \text{ кНм};$$

$$M_y(2l) = 5 - 1 \cdot 2 - 3 = 0 \text{ кНм};$$

$$Q_y(z) = Q_y(0)|_1 - P_y|_{2,3}$$

$$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z|_1 - P_y \cdot (z-l)|_2 - L_x|_3$$

$$Q_x(z) = Q_x(0)|_{1,2} - P_x|_3$$

$$M_y(z) = M_y(0) - Q_x(0) \cdot z|_1 - L_y|_2 + P_x \cdot (z-2l)|_3$$

**3 участок:**  $2l \leq z \leq 3l$

$$Q_y(2l) = 4 - 4 = 0 \text{ кН};$$

$$Q_x(2l) = 1 - 1 = 0 \text{ кН};$$

$$Q_y(3l) = 4 - 4 = 0 \text{ кН};$$

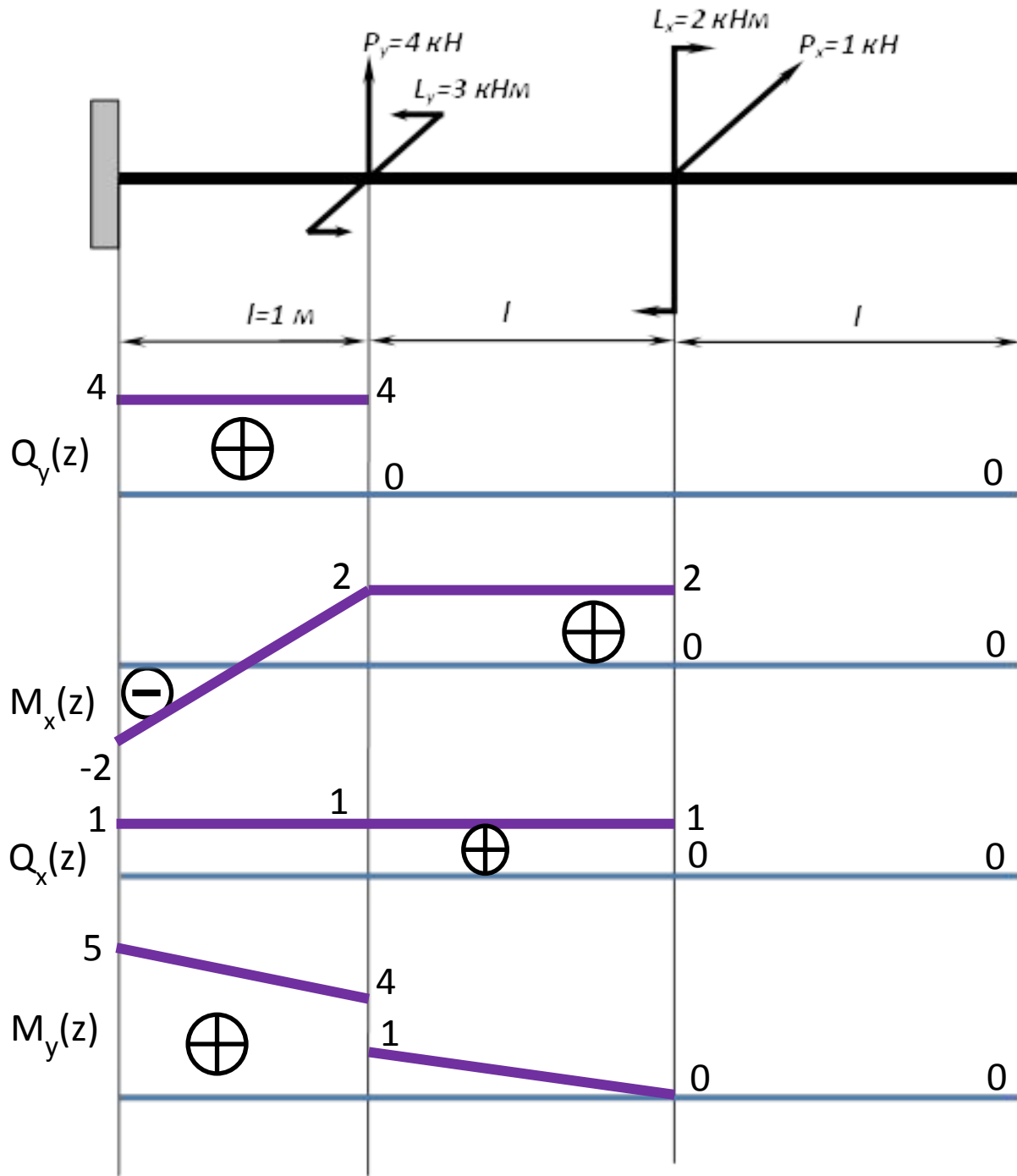
$$Q_x(3l) = 1 - 1 = 0 \text{ кН};$$

$$M_x(2l) = -2 + 4 \cdot 2 - 4(2-1) - 2 = 0 \text{ кНм};$$

$$M_x(3l) = -2 + 4 \cdot 3 - 4(3-1) - 2 = 0 \text{ кНм};$$

$$M_y(2l) = 5 - 1 \cdot 2 - 3 + 1(2-2) = 0 \text{ кНм};$$

$$M_y(3l) = 5 - 1 \cdot 3 - 3 + 1(3-2) = 0 \text{ кНм};$$





## прямоугольник

$$F = b \cdot h = 8 \cdot 10 = 80 \text{ см}^2$$

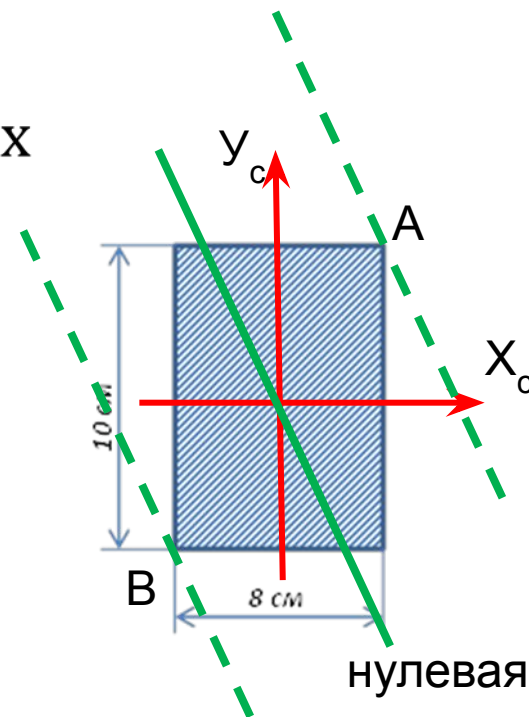
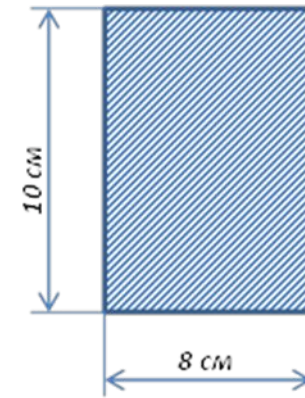
$$J_x = b \cdot h^3 / 12 = 8 \cdot (10)^3 / 12 = 667 \text{ см}^4$$

$$J_y = b^3 \cdot h / 12 = (8)^3 \cdot 10 / 12 = 427 \text{ см}^4$$

нулевая линия

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y - \frac{M_y}{J_y} \cdot x = 0$$

$$y = - \frac{M_y \cdot J_x}{J_y \cdot M_x} \cdot x = - \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 667 \cdot 10^{-8}}{427 \cdot 10^{-8} \cdot (-2 \cdot 10^3)} \cdot x = -3,9 \cdot x$$

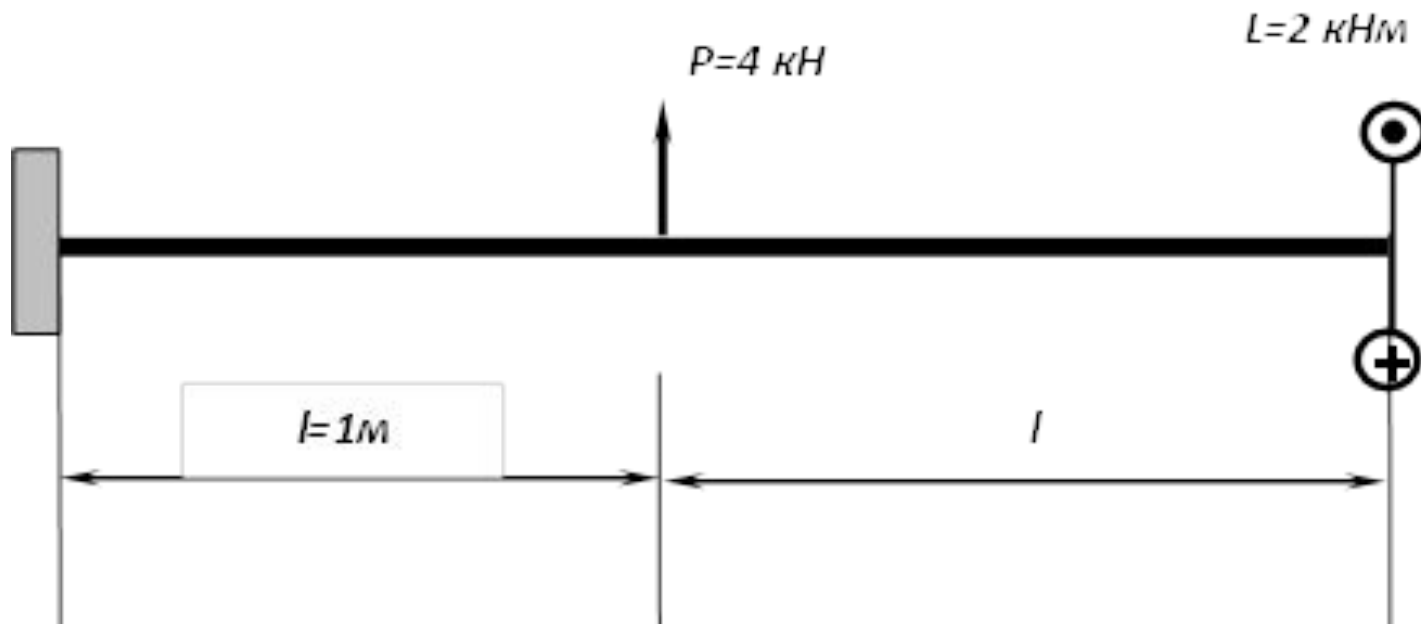


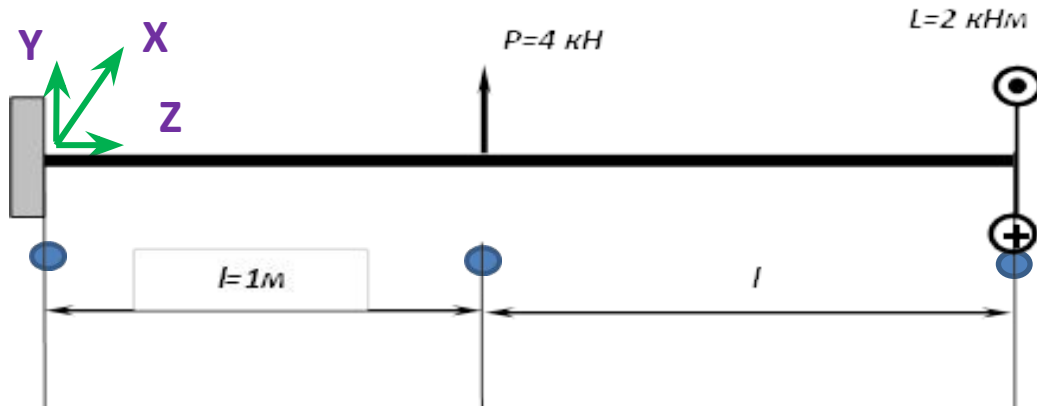
**Условие прочности:**

$$\sigma_A = \frac{-2 \cdot 10^3}{667 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,05 - \frac{5 \cdot 10^3}{427 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,04 = -61,8 \text{ МПа} < [\sigma]$$

# Расчеты на прочность при изгибе с кричением

**Пример:** из расчета на прочность определить размер круглого сечения  $[\sigma]=160$  МПа





$$Q_y(z) = Q_y(0)|_1 - P|_2$$

$$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z|_1 - P(z-l)|_2$$

$$M_K(z) = M_K(0)|_{1,2}$$

$$\text{ГУ: } M_x(2l) = 0; Q_y(2l) = 0; M_K(2l) = L.$$

$$Q_y(2l) = Q_y(0) - P = 0$$

$$Q_y(0) = P = 4 \text{ κН}$$

$$M_x(2l) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot 2l - P(2l - l) = 0$$

$$M_x(0) = -Q_y(0) \cdot 2l + P(2l - l) = -4 \cdot 2 + 4(2 - 1) = -4 \text{ κНм}$$

$$M_K(2l) = M_K(0) = L$$

$$M_K(0) = L = 2 \text{ κНм}$$

$$Q_y(z) = Q_y(0)|_1 - P|_2$$

$$M_x(z) = M_x(0) + Q_y(0) \cdot z|_1 - P(z-l)|_2$$

$$M_k(z) = M_k(0)|_{1,2}$$

**1 участок:**  $0 \leq z \leq l$

$$Q_y(0) = 4 \text{ кН};$$

$$M_k(0) = 2 \text{ кНм};$$

$$Q_y(l) = 4 \text{ кН};$$

$$M_k(l) = 2 \text{ кНм};$$

$$M_x(0) = -4 + 4 \cdot 0 = -4 \text{ кНм};$$

$$M_x(l) = -4 + 4 \cdot 1 = 0 \text{ кНм};$$

**2 участок:**  $l \leq z \leq 2l$

$$Q_y(l) = 4 - 4 = 0 \text{ кН}$$

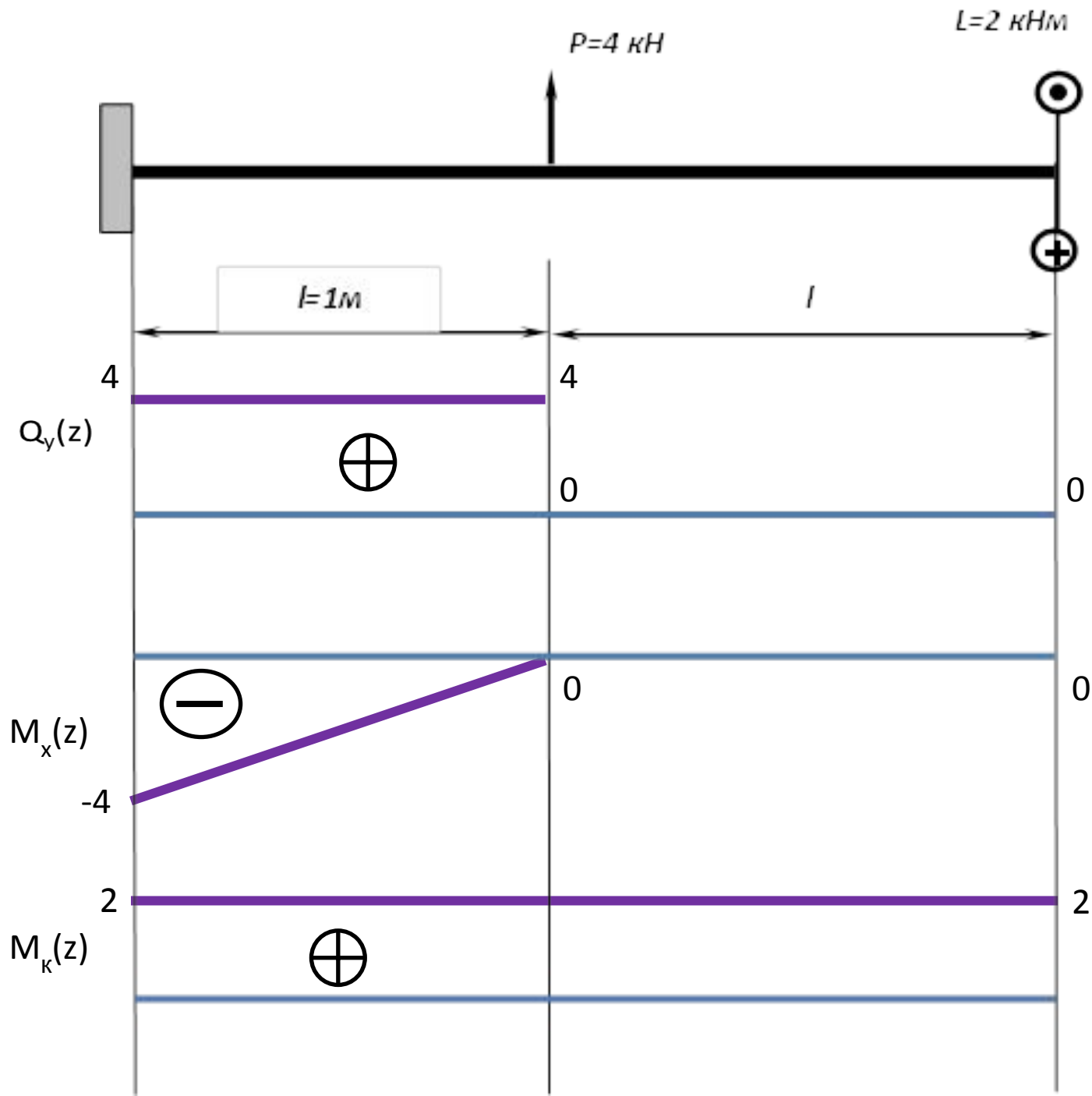
$$M_k(l) = 2 \text{ кНм};$$

$$Q_y(2l) = 4 - 4 = 0 \text{ кН};$$

$$M_k(2l) = 2 \text{ кНм};$$

$$M_x(l) = -4 + 4 \cdot 1 - 4(1-1) = 0 \text{ кНм};$$

$$M_x(2l) = -4 + 4 \cdot 2 - 4(2-1) = 0 \text{ кНм};$$



При изгибе:  $\sigma_z = \frac{M_x}{W_x} = \frac{M_x}{0,1d^3}$

При кручении:  $\tau_{zx} = \frac{M_K}{W_\rho} = \frac{M_K}{0,2d^3}$

Воспользуемся третьей теорией прочности (теория наибольших касательных напряжений).

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Для определения главных напряжений запишем основное характеристическое уравнение напряженного состояния

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0$$

где  $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_z$

$$I_2 = \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 = -\tau_{xz}^2,$$

$$I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - \sigma_y \cdot \tau_{xz}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 = 0$$

$$\sigma^3 - \sigma_z \cdot \sigma^2 - \tau_{xz}^2 \cdot \sigma = 0$$

$$\sigma (\sigma^2 - \sigma_z \cdot \sigma - \tau_{xz}^2) = 0$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2}$$

Подставим полученные главные напряжения в теорию прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 &= \frac{\sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2} - \left( -\frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2} \right) = \\ &= \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2} = \sqrt{\left( \frac{M_x}{0,1d^3} \right)^2 + 4 \left( \frac{M_K}{0,2d^3} \right)^2} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_K^2}}{0,1d^3} \leq [\sigma] \end{aligned}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_x^2 + M_K^2}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{4000^2 + 2000^2}}{0,1 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,065 \text{ м}$$