

# Молекулярная физика.

- Лектор:
- Парахин А.С., к. ф.-м. наук, доцент.

### 3. Распределения молекул по энергиям.

- 3.1. Распределение Максвелла по компонентам скоростей.
- Как было отмечено выше, тепловое движение представляет собой хаотическое движение. Однако, даже в таком беспорядочном движении, как мы видели раньше, наблюдаются определённые закономерности. К таким закономерностям относится и т.н. распределение молекул по скоростям.

# Промежутки скоростей.

- Пусть общее число молекул в некотором объёме равно  $N$ . Обозначим  $dN$  число молекул, компоненты скоростей которых заключены в пределах
  - $v_x, v_x + dv_x,$
  - $v_y, v_y + dv_y,$
  - $v_z, v_z + dv_z.$

# Вероятность данного события.

- Тогда отношение  $d\omega = \frac{dN}{N}$  представляет собой вероятность того, что наугад выбранная молекула обладает скоростью с компонентами в интервалах, указанных выше.

# Плотность вероятности данного события.

- А отношение этой вероятности к произведению элементов компонентов скоростей, очевидно, представляет собой плотность вероятности и называется функцией распределения молекул по компонентам скоростей и обозначается  $f(v_x, v_y, v_z)$ .

- $$f(v_x, v_y, v_z) = \frac{dN}{Ndv_xdv_ydv_z}.$$

# Использование функции распределения.

- Отсюда

- $dN = N f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z.$

- $d\omega = \frac{dN}{N} = f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z.$

- и

- $N = N \iiint_{\vec{V}} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z.$

# Условие нормировки.

- Из последнего равенства вытекает т.н. условие нормировки
- $$\iiint_{\vec{V}} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = 1,$$
- т.е. функция распределения должна быть таковой, что интеграл от неё по всем возможным значениям аргументов должен быть равен единице.

# Отыскание средних значений.

- Знание функции распределения позволяет найти средние значения термодинамических параметров, таких как давление, средняя кинетическая энергия и т.п. и их связь между собой.



# Основы для отыскания функции распределения.

- Отыскание функции распределения основано на двух предположениях. Первое предположение касается равноправия направлений. Поскольку тепловое движение абсолютно хаотично, то движения молекул вдоль осей координат совершенно независимы.

# Независимость распределения по направлениям.

- С точки зрения теории вероятности это означает, что плотность вероятности события приобретения молекулами скорости с компонентами в указанных выше интервалах равно произведению плотностей вероятностей приобретения молекулами компонент вдоль осей координат по отдельности,
- $f(v_x, v_y, v_z) = f(v_x)f(v_y)f(v_z)$ .

# Равноправие положительного и отрицательного направлений осей.

- Второе предположение состоит в равноправности отрицательного и положительного направлений осей координат. Это значит, что вероятность встретить молекулу со скоростью  $v_x$  должна быть такой же, как и для молекулы со скоростью  $-v_x$ , т.е. функция распределения по компонентам скоростей должна быть чётной. Это в свою очередь означает, что функция распределения должна зависеть не от вектора скорости, а от его квадрата.
- $f(v_x, v_y, v_z) = f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ .

# Функциональное уравнение.

- Объединяя оба предположения вместе, получим функциональное уравнение
- $f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = f(v_x^2)f(v_y^2)f(v_z^2)$ .
- Но такому условию может удовлетворять только показательные функции, любую из которых можно представить экспонентой. Это значит, что функция распределения должна быть экспонентой
- $f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = Ae^{\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$ .

# Параметры распределения.

- Параметр  $A$  всегда находится из условия нормировки, а параметр  $\alpha$ , во-первых, должен быть отрицателем, иначе бесконечно большим скоростям будут соответствовать бесконечно большие скорости. Чего быть не может. Во-вторых, он находится из сравнения результатов расчёта какого-либо из термодинамических параметров с помощью функции распределения с ранее известным его значением.

## Способ определения параметра $\alpha$ .

- Например, можно найти среднее значение кинетической энергии молекул и сравнить полученное выражение с формулой связи кинетической энергии и температуры.

# Отыскание параметра $A$ .

- Из условия нормировки следует

- $$\iiint_{\vec{v}} A e^{\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z = 1$$

- следует

- $$A = \frac{1}{\iiint_{\vec{v}} e^{\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z}$$

# Отыскание средней кинетической энергии молекул.

- Для отыскания параметра  $\alpha$  найдём среднее значение кинетической энергии

- $\langle K \rangle =$

$$\iiint_{\vec{v}} \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} A e^{\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z$$



# Отыскание интеграла.

- Этот интеграл можно разбить на три интеграла

- $$\langle K \rangle = \iiint_{\vec{V}} \frac{mv_x^2}{2} A e^{\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z +$$
$$\iiint_{\vec{V}} \frac{mv_y^2}{2} A e^{\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z +$$
$$\iiint_{\vec{V}} \frac{mv_z^2}{2} A e^{\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z$$

# Сведение к одному интегралу.

- Эти три интеграла отличаются только обозначениями, поэтому они равны, значит
- $\langle K \rangle = 3 \iiint_{\vec{V}} \frac{mv_x^2}{2} A e^{\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z$

# Повторное интегрирование.

- Данный интеграл соответствует произведению трёх интегралов

- $\langle K \rangle =$

$$3 \frac{m}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{\alpha v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} v_y^2 e^{\alpha v_y^2} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} v_z^2 e^{\alpha v_z^2} dv_z$$

# Отыскание первого интеграла.

- Первый интеграл берётся по частям

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{\alpha v_x^2} dv_x = v_x \frac{e^{\alpha v_x^2}}{2\alpha} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha v_x^2} dv_x.$$

- Первое слагаемое в этом выражении равно нулю, т.к. экспонента с отрицательным показателем убывает на бесконечности быстрее, чем растёт любая степень аргумента.

# Параметр $\alpha$ .

- Тогда средняя кинетическая энергия

- $\langle K \rangle = -\frac{3mA}{4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha v_y^2} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha v_z^2} dv_z = -\frac{3m}{4\alpha}$

- Здесь мы учли условие нормировки функции распределения. Сравнивая это с уравнением формулой связи средней кинетической энергии и температуры приходим к выводу, что

- $\alpha = -\frac{m}{2k_B T}$ .

# Отыскание нормировочного множителя.

- Теперь можно найти и нормировочный коэффициент. Для этого нужно найти интеграл нормировки с учётом значения параметра  $\alpha$

- $$\iiint_{\vec{V}} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2k_B T}} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}} dv_z$$

# Интеграл Пуассона.

- Все эти три интеграла заменой переменной
- $\frac{mv_x^2}{2k_B T} = \rho^2$
- сводятся к интегралу Пуассона
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho = \sqrt{\pi}.$

# Параметр A

• Тогда

$$\bullet \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2k_B T}} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}} dv_z =$$

$$\bullet \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}} dv_z \right)^3 = \left( \frac{2k_B T}{m} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho \right)^3 =$$

$$\bullet \left( \frac{2\pi k_B T}{m} \right)^{\frac{3}{2}}$$

• Наконец из условия нормировки находим

$$\bullet A = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}}.$$



# Распределение Максвелла по компонентам скоростей.

- Подставляя все найденные константы в функцию распределения, получим

- $$f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T}}$$

- Эта функция и называется функцией распределения Максвелла по компонентам скоростей.
- [Progr D:](#) [Progr E:](#) [Progr F:](#) [Progr G:](#) [Progr H:](#)

## 3.2. Распределение Максвелла по модулю скорости.

- Часто бывает необходимо знать распределение молекул не только по компонентам скоростей, но и по модулю скорости. Для определения распределения Максвелла по модулю скоростей нужно найти количество молекул со скоростями в пределах от  $v$  до  $v + dv$  и разделить его на интервал скоростей  $dv$ , а также на общее число молекул.

# Переход в сферическую систему координат.

- Для этого в свою очередь нужно, во-первых, перейти от декартовой системы координат к сферической и, во-вторых, проинтегрировать по всем значениям азимутального и полярного углов.

# Замена переменных.

- Для перехода к сферической системе координат нужно сделать замену
- $v_x, v_y, v_z \rightarrow v, \theta, \varphi$
- и
- $dv_x dv_y dv_z \rightarrow v^2 \sin\theta \cdot dv \cdot d\theta \cdot d\varphi.$

# Элемент количества молекул.

- Тогда количество молекул со скоростями в интервале от  $v$  до  $v + dv$  будет определяться следующим образом

- $dN =$

$$N \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 \sin\theta dv d\theta.$$

# Функция распределения молекул по модулю скорости.

- Вычислив оба интеграла, получим

- $$dN = 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dv.$$

- Разделив теперь на  $N$  и на  $dv$ , получим функцию распределения молекул по модулю скорости

- $$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2.$$

- Это и есть функция распределения Максвелла молекул по модулю скорости.

# Проверка распределения Максвелла по модулю скорости.

- [Progr D: Progr E: Progr F: Progr G: Progr H:](#)

## 3.3. Характеристические скорости.

- Зная распределение Максвелла, можно найти средние значения всех величин, которые зависят от скорости молекул, в частности, средние значения разных степеней самой скорости.



# Понятие характеристических скоростей.

- Определение. Характеристическими скоростями распределения называются значения скоростей, определяющиеся из этого распределения.

# Среднее значение модуля скорости.

- К характеристическим скоростям относится, прежде всего, среднее значение модуля скорости. Оно определяется следующим образом

- $\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv =$   
 $\int_0^{\infty} v 4\pi \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dv.$

# Замена переменной в интеграле.

- Сделаем, прежде всего, в этом интеграле

замену переменной  $\frac{mv_x^2}{2k_B T} = \rho^2$

- $\langle v \rangle = \frac{4}{\pi} \left( \frac{2\pi k_B T}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho^3 d\rho.$

# Вычисление интеграла.

- Для вычисления интеграла используем интегрирование по частям
- $$\int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho^3 d\rho = \frac{\rho^2}{2} e^{-\rho^2} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho .$$
- Первое слагаемое снова равно нулю из-за быстрого стремления экспоненты к нулю на бесконечном пределе, а на нулевом пределе из-за равенства аргумента нулю. Второе же слагаемое равно  $\frac{1}{2}$ .

# Средняя скорость.

- Поэтому

- $$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}.$$

- Это и есть средняя скорость движения молекул.

- Как видно из формулы, с ростом температуры средняя скорость возрастает. Для тяжёлых молекул она меньше, чем для лёгких.

- [Progr D:](#) [Progr E:](#) [Progr F:](#) [Progr G:](#) [Progr H:](#)

# Средний квадрат скорости.

- Среднее значение квадрата скорости мы, по сути дела, уже находили. Из связи между кинетической энергией и температурой следует

- $\langle K \rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T.$

- Отсюда и находим среднеквадратичную скорость

- $\langle v_{\text{КВ}} \rangle = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}.$

# Скорость максимума функции распределения.

- Характеристической является также скорость, соответствующая максимуму функции распределения по модулю скорости. Для её нахождения нужно найти производную и приравнять к нулю

- $$e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} 2v - \frac{mv}{k_B T} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 = 0.$$

- Решая уравнение, найдём т.н. наивероятнейшую скорость

- $$v_{\text{наив}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}.$$