Решения волнового уравнения

Единое волновое уравнение для плоских волн различной природы, распространяющихся вдоль оси x можно записать как:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \qquad (2.31)$$

где φ - изменяющаяся по волновым законам величина (переменная плотность, давление или колебательная скорость для звуковой волны, переменное ЭМ поле и т.д.), а c - скорость распространения соответствующей волны в среде.

В сферических координатах, когда волны распространяются симметрично в радиальном направлении (r - радиус),

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (2.32)$$

Если в (2.32) подставить $\varphi = f(\mathrm{r},t)/r$, то для $f(\mathrm{r},t)$ получим уравнение (2.31), то есть решение для сферически симметричной волны отличается только убыванием амплитуды по закону $1/r$.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0, \qquad (2.31)$$

Будем искать решение волнового уравнения (2.31) в виде

$$\varphi=e^{i\omega t}\cdot f(x). \qquad (2.33)$$

Подставив (2.33) в (2.31) и исключив экспоненциальный множитель, получим уравнение для $f(x)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\omega^2}{c^2}f=0. \qquad (2.34)$$

Это уравнение имеет решение f_0e^{ikx} и f_0e^{-ikx}, описывает пространственную структуру волнового поля. Здесь $k^2=\omega^2/c^2$ называется волновым числом, ω - круговая или циклическая частота волны, f_0 - амплитуда волны.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.31) \qquad \varphi = e^{j\omega t} \cdot f(x). \quad (2.33)$$

Таким образом, с учетом (2.33), решение уравнения (2.31) представляется в виде суммы двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\varphi(x,t) = f_0 e^{j(\omega t - kx)} + f_0 e^{j(\omega t + kx)} . \qquad (2.35)$$

Аналогично, используя подстановку $\varphi(r,t) = f(\mathrm{r},t)e^{j\omega t}$ можно решать и трехмерные волновые уравнения (2.8),(2.10.8) . В этом случае получим трехмерное уравнение для волнового поля

$$\Delta f + k^2 f = 0. \qquad (2.36)$$

Это уравнение носит название уравнения Гельмгольца.

Поглощение и дисперсия

При выводе волнового уравнения для ЭМ поля проводимость среды предполагалась равной нулю. С учетом проводимости уравнение для электромагнитных волн имеет вид:

$$\Delta \boldsymbol{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0. \qquad (2.37)$$

Уравнение для акустических волн с учетом вязкости записывается как:

$$\Delta \boldsymbol{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2} - \frac{b}{c^2\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\Delta \boldsymbol{U} = 0, \qquad (2.38)$$

где $b = \xi + \frac{4}{3}\eta$ - диссипативный коэффициент.

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \qquad (2.37)$$

$$\Delta \mathbf{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \frac{b}{c^2\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\Delta \mathbf{U} = 0, \qquad (2.38)$$

В обоих уравнениях (2.37, 2.38) к волновому уравнению добавляется слагаемое с первой производной по времени. Поэтому, подстановка $\mathbf{E},\mathbf{U} = f(r,t)e^{i\omega t}$ приводит (2.37, 2.38) к уравнению Гельмгольца с комплексным волновым числом :

$$\Delta f + k^2 f = 0 \quad ; \quad k = k_r + i\delta\,, \qquad (2.39)$$

при этом

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\mu\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right) \quad \text{для электромагнитных волн ,} \qquad (2.40)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\frac{b\omega}{c^2\rho}\right)^{-1}; \; k \approx \frac{\omega}{c}\left(1 + i\frac{b\omega}{2c^2\rho}\right) \quad \text{для звуковых волн.} \qquad (2.41)$$

С учетом теплопроводности уточненное значение

$$b = \xi + \frac{4}{3}\eta + \chi\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right),$$

где χ - коэффициент теплопроводности.

$$\varphi(x,t) = f_0 e^{i(\omega t - kx)} + f_0 e^{i(\omega t + kx)} . \qquad (2.35)$$

Использование комплексного значения k в решении (2.35) приводит к появлению действительного множителя $e^{-\delta x}$, который отвечает за экспоненциальное пространственное затухание волнового поля. Таким образом, мнимая часть комплексного волнового числа имеет физический смысл декремента затухания, и окончательное выражение для плоской волны, распространяющейся в направлении x, принимает в действительных величинах вид

$$\varphi(x,t) = \varphi_0 e^{-\delta x} \cos(\omega t \pm kx + \psi_0) , \qquad (2.42)$$

где ψ_0 - начальная фаза волны. Зависимость волнового числа от частоты волны $k = k(\omega)$ называется дисперсионным соотношением, а среды, в которых эта зависимость носит нелинейный характер – диспергирующими.