Лекция # 4 (20.10.15) **Решение задач**

Задача №1. Тепловая машина работает по так называемому циклу Стирлинга, состоящего из двух изотерм и двух изохор. Определить КПД тепловой машины, если рабочим веществом является 8 г кислорода, максимальная температура в цикле $T_1 = 350 K$, минимальная температура $T_2 = 280 K$, отношение максимального объема газа в цикле к минимальному $n = 3$.

Решение

Дано:

$m = 8 \cdot 10^{-3}$ кг

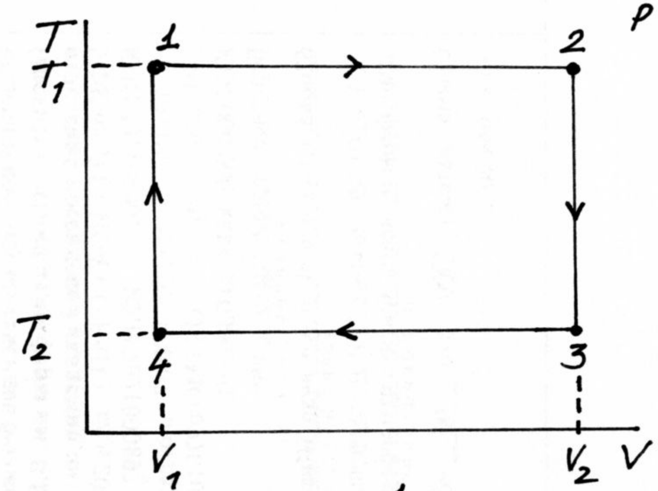
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

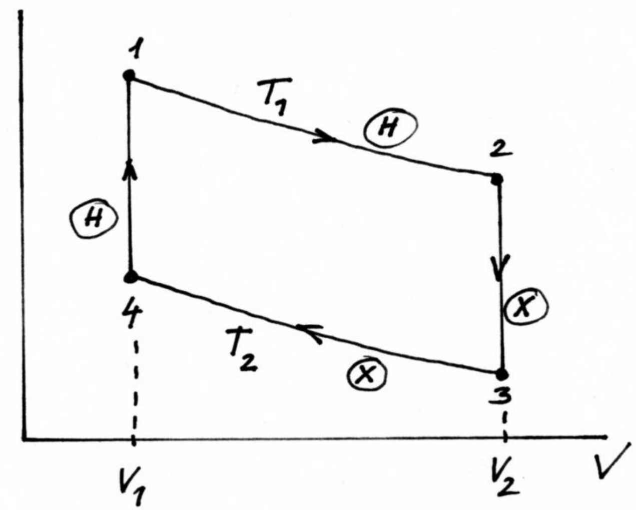
$T_{max} = T_1 = 350\ K$

$T_{min} = T_2 = 280\ K$

$V_{max}/V_{min} = V_2/V_1 = n = 3$

Найти η – ?





$$\eta = \frac{A}{Q^+} = \frac{Q^+ + Q^-}{Q^+}, \quad A = \oint_1^1 p\,dV = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$$

(+) или (−)

$$A = \int_1^2 p\,dV + \cancel{\int_2^3 p\,dV}^{\,0} + \int_3^4 p\,dV + \cancel{\int_4^1 p\,dV}^{\,0}$$

$pV = \frac{m}{M} RT$ – газ идеальный,

$$A = \nu R T_1 \int_1^2 \frac{dV}{V} + \nu R T_2 \int_3^4 \frac{dV}{V} = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \nu R T_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \nu R (T_1 - T_2) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$Q^+ = Q_{12} + Q_{41}$ – почему?

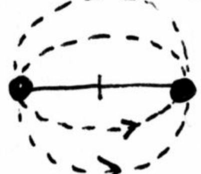
I начало термодинамики: $Q = \Delta U + A$

Для идеального газа $\Delta U = \nu C_V \Delta T$

$$Q_{12} = \cancel{\Delta U_{12}}^{\,0} + A_{12} = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$Q_{41} = \Delta U_{41} + \cancel{A_{41}}^{\,0} = \nu C_V (T_1 - T_2), \quad Q^+ = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \nu C_V (T_1 - T_2)$$

Тогда $$\eta = \frac{A}{Q^+} = \frac{\nu R (T_1 - T_2) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{\nu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \nu C_V (T_1 - T_2)}$$

Молекула кислорода:  жесткий ротатор $C_V = \frac{i}{2} R = \frac{3+2}{2} R = \frac{5}{2} R$

Тогда $$\eta = \frac{\left(1 - \frac{T_{min}}{T_{max}}\right) \ln n}{\ln n + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{T_{min}}{T_{max}}\right)}$$

Расчет: $$\eta = \frac{\left(1 - \frac{280}{350}\right) \ln 3}{\ln 3 + 2{,}5\left(1 - \frac{280}{350}\right)} = \frac{0{,}2 \times 1{,}099}{1{,}099 + 2{,}5 \times 0{,}2} = 0{,}138 = 13{,}8\% < 1$$

Задача №2. Показать, что внутренняя энергия воздуха U в комнате не зависит от температуры, если наружное давление p постоянно. Вычислить величину U, если p равно атмосферному давлению, а объем комнаты $V = 400\,м^3$.

Решение

Если воздух считать идеальным газом, то $U = \nu C_V T + const$

$dU = \nu C_V dT$, $T = \frac{pV}{\nu R}$, $dT = \frac{1}{\nu R}(pdV + Vdp)$

Объем комнаты $V = const$, $dV = 0$, т.к. $p = const$, то и $dp = 0$.

Тогда и $dT = 0$, значит и $dU = 0$, а $U \neq f(T)$.

Расчет: $U = \nu C_V T = \nu C_V \frac{pV}{\nu R} = \frac{C_V}{R} pV$

$C_V = \frac{i}{2} R$, где $i = 3 + 2 = 5$.

$U = \frac{\frac{5}{2} R}{R} pV = \frac{5}{2} pV = 2{,}5 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 400 = 1013 \cdot 10^5$ [Дж]

$\simeq 100$ МДж

Задача № 3. Имеются два теплоизолированных сосуда объемами V_1 и V_2, соединенные трубкой с вентилем. В объеме V_1 находится один моль идеального газа, в объеме V_2 – вакуум. Вентиль открыли, газ заполнил весь объем и пришел в состояние термодинамического равновесия. Найти изменение энтропии в данном процессе.

Решение

Процесс был совершен без теплообмена ($Q = 0$) и без совершения работы ($A = 0$), т. к. во втором баллоне вакуум, а значит и нет затрат на преодоление внешнего давления!

I начало термодинамики: $Q = \Delta U + A \longrightarrow \Delta U = 0$,

$\Delta U = \nu C_V \Delta T$, $\Delta T = 0$ – температура не изменилась!

Тогда для расчета ΔS можно выбрать изотермический процесс:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta A}{T} = \int_1^2 \frac{p\,dV}{T} = R\int_1^2 \frac{dV}{V} =$$

$$= R \ln\left(\frac{V_1+V_2}{V_1}\right) > 0$$ – энтропия возросла, процесс необратимый!

Задача №4. Показать, что коэффициент вязкости η и теплопроводность $\varkappa$ разреженного газа не зависят от давления газа, а зависят только от температуры.

Решение

Элементарная кинетическая теория газов дает следующие выражения для η и $\varkappa$:

$$\eta = \frac{1}{3} l \bar{v} \rho, \quad \varkappa = \frac{1}{3} l \bar{v} \rho c_v$$

Расшифруем величины, входящие в эти формулы:

$$l = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad \rho = mn = m\frac{p}{kT}$$

Тогда $\eta \sim \sqrt{T}$, но не зависит от p

$\varkappa \sim \sqrt{T}$, но не зависит от p.

Эти предсказания очень хорошо подтверждаются экспериментально.