Санкт-Петербургский Государственный Университет

Сферическое движение

Физика. Теоретическая механика.

Выполнила: студентка 2 курса, 210 группы

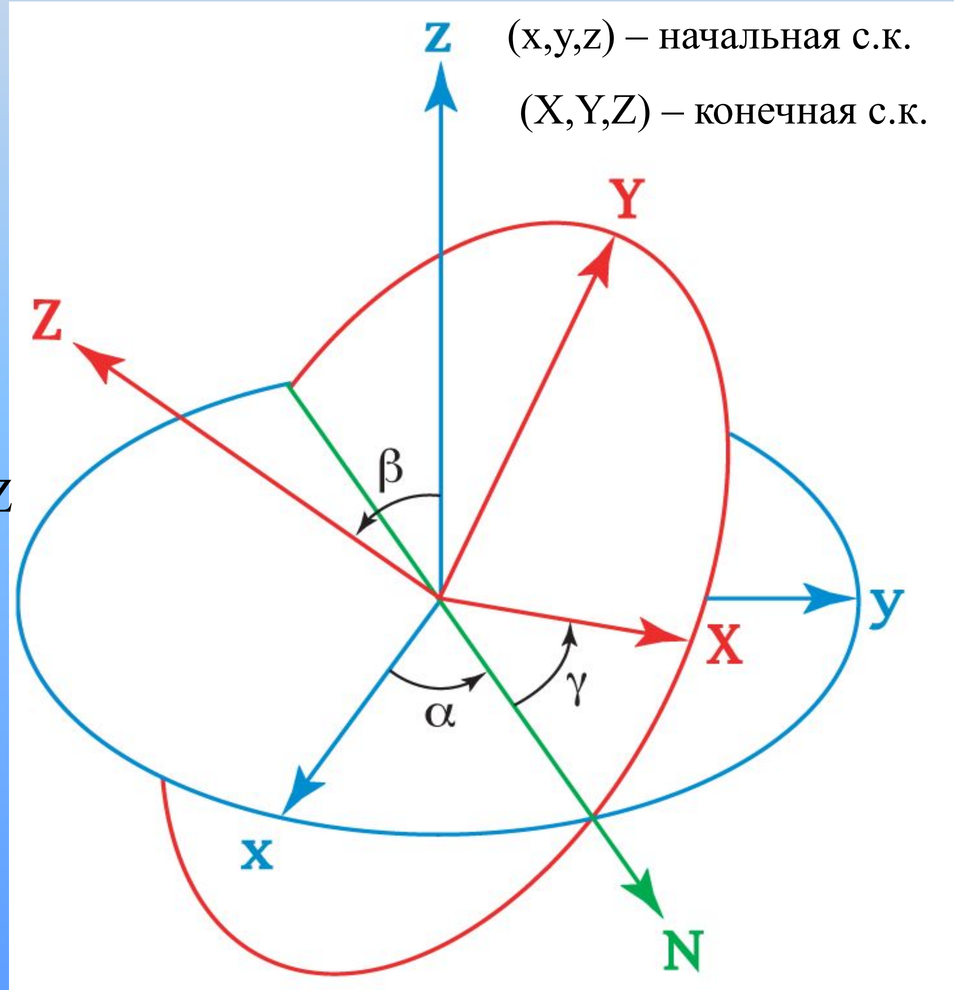
Чернова М.Е.

Проверил: преподаватель Алферов В

Санкт-Петербург, 2014

Основные понятия:

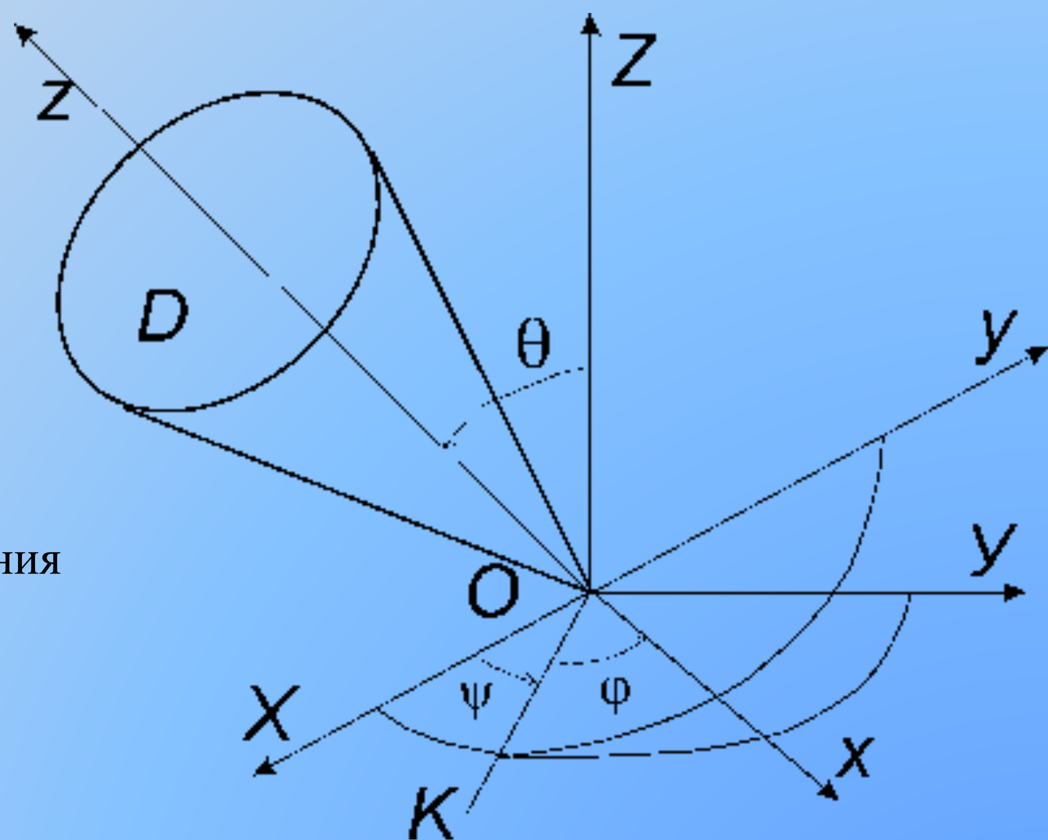
- **Сферическое движение** (движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки) — движение абсолютно твёрдого тела, при котором оно имеет одну неподвижную точку.
- **Углы Эйлера** — углы, описывающие поворот абсолютно твердого тела в трёхмерном евклидовом пространстве.
- **Линия узлов N –** пересечение координатных плоскостей xy и XY
- **Угол прецессии** – угол α между осью x и линией узлов
- **Угол нутации** – угол β между осями z и Z
- **Угол собственного вращения** – угол γ между осью X и линией узлов



Сферическое движение твердого тела:

Тело D совершает сферическое движение относительно неподвижной точки O.
Точки тела D движутся по сферам с центром в точке O.

- OXYZ- неподвижная система отсчета
- Oxyz- подвижная система отсчета
- OK (прямая) – линия узлов
- $\psi = \angle XOK$ – угол прецессии
- $\varphi = \angle KOx$ – угол собственного вращения
- $\theta = \angle ZOz$ – угол нутации



Впервые описал движение тела относительно неподвижной точки Леонард Эйлер.

Уравнения сферического движения и угловая скорость.

Уравнения сферического движения твердого тела – необходимо задать углы Эйлера как функции времени:

- $\psi = f_1(t)$
- $\varphi = f_2(t)$
- $\theta = f_3(t)$

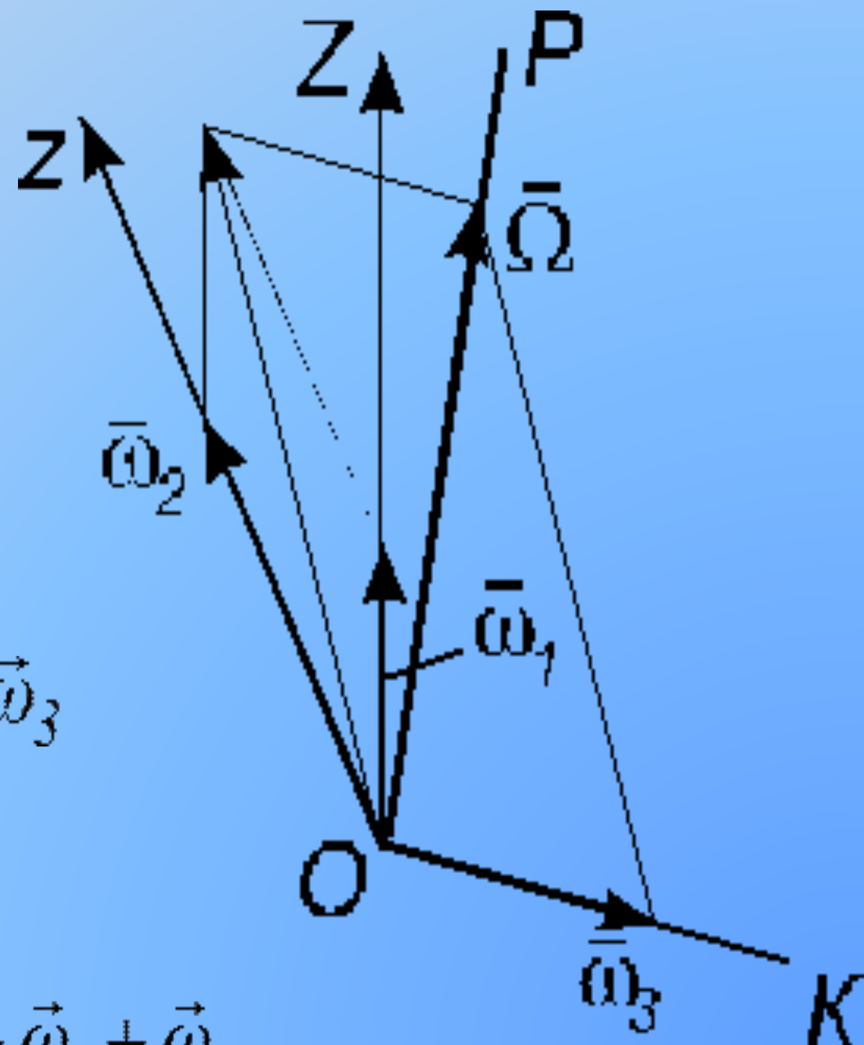
Угловая скорость.

1. При изменении только ψ тело будет вращаться вокруг OZ с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$

1. При изменении только φ тело будет вращаться вокруг оси oz с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$

1. При изменении только θ тело будет вращаться вокруг линии узлов OK с угловой скоростью $\vec{\omega}_3$

1. При движении тела, все три угла Эйлера меняются одновременно, и результирующее движение будет **<u>вращательным движением с мгновенной угловой скоростью</u>** $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$



Мгновенная ось вращения.

<u>Мгновенная ось вращения </u>— геометрическое место точек, скорость которых в данный момент времени равна нулю.

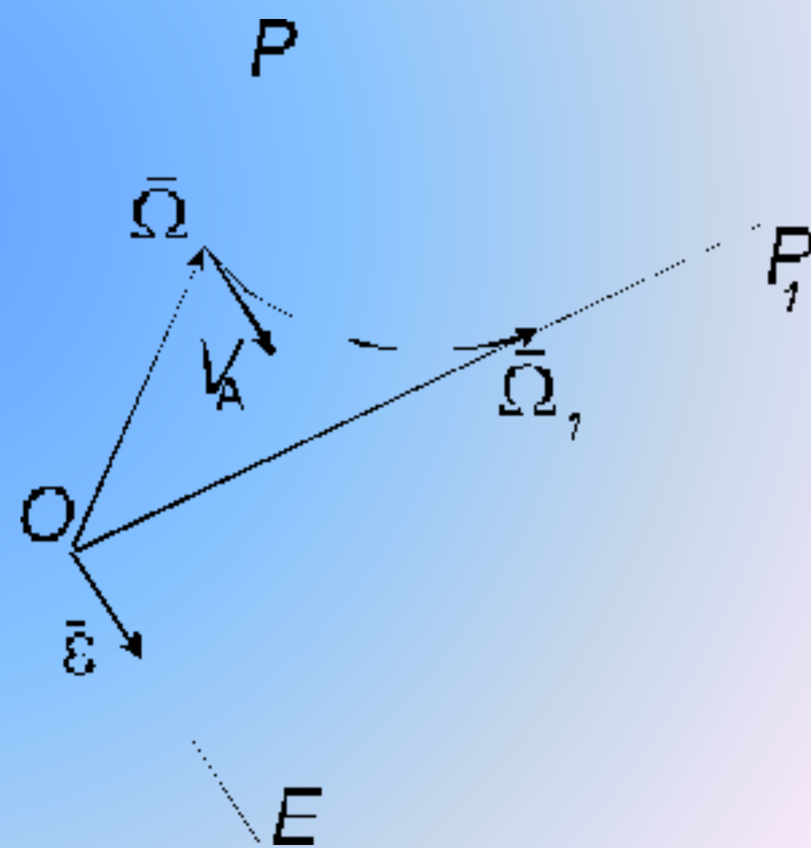
При сферическом движении мгновенная ось OP меняет свое положение в пространстве, при этом вектор мгновенной угловой скорости $\bar{\Omega}$ изменяется как по величине, так и по направлению.

Уравнения мгновенной оси в неподвижной с.к.

$$\boxed{\frac{z}{\omega_z} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{x}{\omega_x}}$$

Уравнения мгновенной оси в подвижной с.к.

$$\boxed{\frac{z'}{\omega'_z} = \frac{y'}{\omega'_y} = \frac{x'}{\omega'_x}}$$

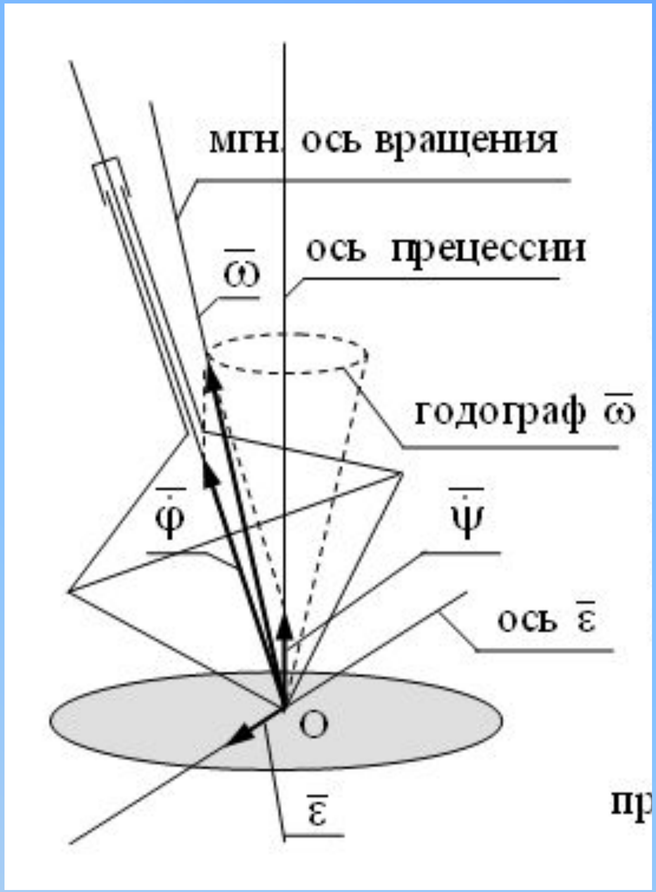


Прямая OP - мгновенная ось вращения тела.

Угловая скорость и угловое ускорение.

Вектор углового ускорения равен скорости движения конца вектора мгновенной угловой скорости по его годографу

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$



Скорость точки конца вектора мгновенной угловой скорости $\vec{\Omega}$

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

Следовательно: $\vec{\varepsilon} = \vec{V}_A$

При сферическом движении тела направления векторов $\vec{\Omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ не совпадают.

Скорость.

Скорости точек тела при сферическом движении расположены в плоскостях, перпендикулярных мгновенной оси вращения, и пропорциональны расстояниям до этой оси

$$\boxed{V_M = \left|\vec{\Omega}\right| \cdot \left|\vec{r}\right| sin\alpha = \Omega \cdot h_p}$$

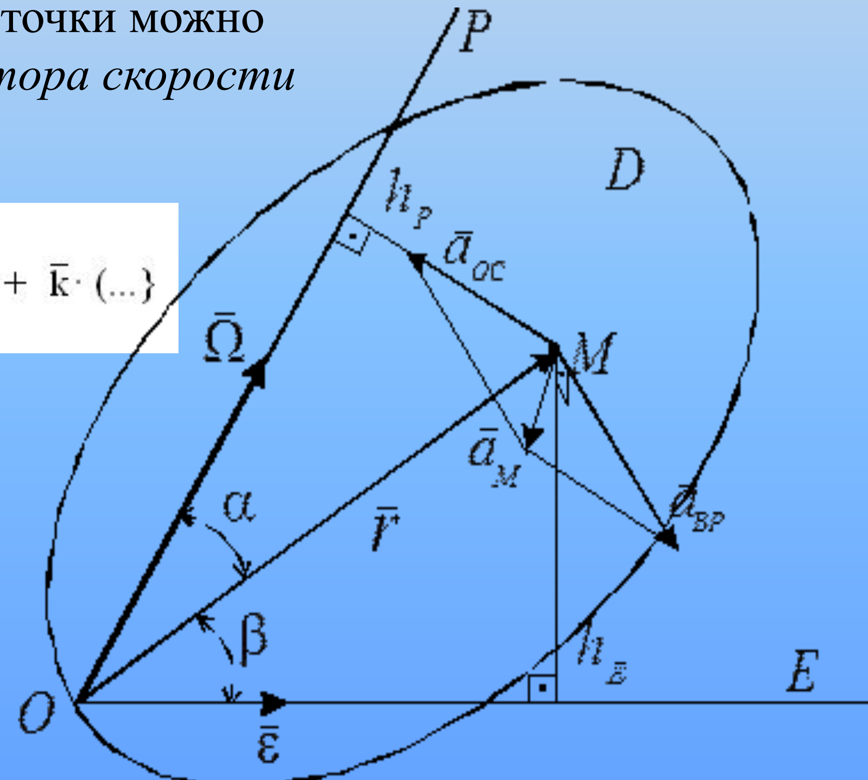
где h_p расстояние от точки до мгновенной оси вращения

Из векторной формулы для определения скорости точки можно получить <u>формулы</u> для определения *проекции вектора скорости точки* на оси неподвижной с.к.

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot (\omega_y z - \omega_z y) + \bar{j} \cdot (\ldots) + \bar{k} \cdot (\ldots)$$

Формулы Л.Эйлера

$$\boxed{\begin{aligned} V_x &= \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y \\ V_y &= \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z \\ V_z &= \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{aligned}}$$



Ускорение.

Ускорение любой точки при сферическом движении определяется как геометрическая сумма её вращательного и осестремительного ускорений

$$a_{OC} = \left|\vec{\Omega}\right| \cdot \left|\overline{V}_M\right| = \Omega^2 \cdot h_P$$

где h_p расстояние от точки до мгновенной оси вращения

$$a_{BP} = \left|\vec{\varepsilon}\right| \cdot \left|\vec{r}\right| \sin\beta = \varepsilon \cdot h_E$$

где h_E расстояние от точки до оси углового ускорения

Вектор полного ускорения точки $\vec{a}_M$ при сферическом движении определяется диагональю параллелограмма построенного на векторах $\vec{a}_{OC}$ и $\vec{a}_{BP}$.

$$a_M = \sqrt{a_{\text{BP}}^2 + a_{\text{OC}}^2 + 2a_{\text{BP}} \cdot a_{\text{OC}} \cdot \cos\left(\vec{a}_{\text{BP}} \,\hat{}\, \vec{a}_{\text{OC}}\right)}$$

Модуль полного ускорения произвольной точки М

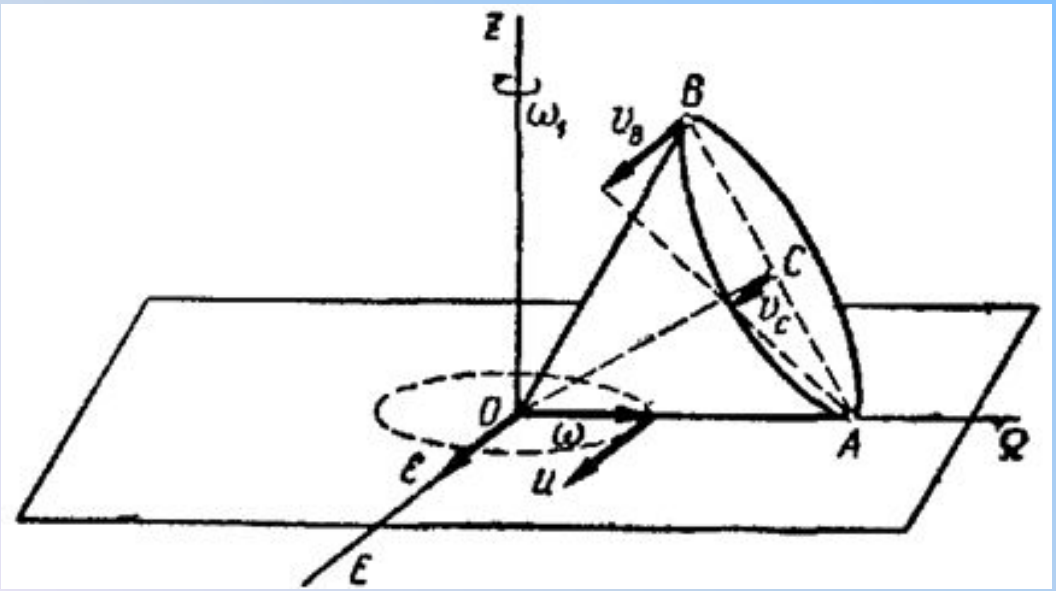
Пример.

Задача

Конус с углом при вершине $2\alpha = 60^\circ$ и радиусом основания $r = 20$ см катится по неподвижной горизонтальной плоскости без скольжения. Скорость центра основания постоянна, $v_c = 60$ см/сек.

Определить:

1) угловую скорость конуса ω;
2) угловое ускорение конуса ε;
3) скорости нижней и наивысшей точек основания v_A и v_B;
4) ускорения этих же точек α_A и α_B



Решение:

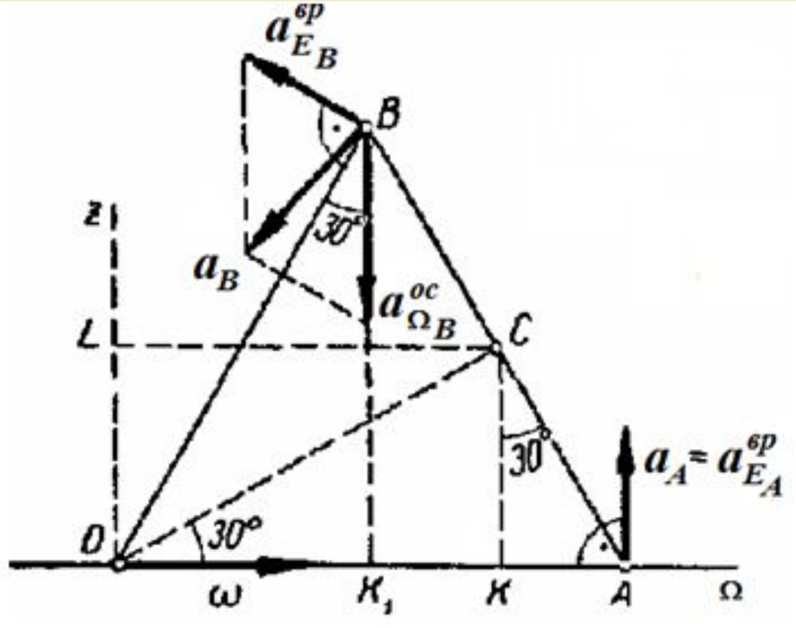
1)

Рассматриваемое движение конуса является сферическим (его вершина остается неподвижной). Так как конус катится по неподвижной плоскости, то образующая *OA*, которой он соприкасается с плоскостью, является мгновенной осью (все точки этой образующей имеют нулевую скорость)

Зная скорость точки *C*, можно сразу определить угловую скорость конуса.

- Найдем расстояние от *C* до мгновенной оси: $CK = CA\cos 30° = r\cos 30° = 20\sqrt{3}/2 = 17{,}32$ *см.*
- Определяем угловую скорость: $\omega = v_c / CK = 3{,}46\ c^{-1}$.

Учитывая направление вектора v_c, откладываем вектор ω от точки *O* вдоль мгновенной оси так, чтобы смотря ему навстречу, видеть вращение конуса происходящим против движения часовой стрелки;



Решение:

2)

- Для определения углового ускорения ε нужно построить годограф угловой скорости ω.
- При движении конуса вектор ω перемещается, поворачиваясь вокруг оси z, его модуль не изменяется, следовательно конец вектора ω описывает окружность в горизонтальной плоскости.
- Вектор ε равен скорости u (вращательная скорость вокруг оси z) конца вектора ω.
- Угловую скорость вращения ω_1 найдем как угловую скорость вращения оси конуса OC вокруг оси z.

Чтобы определить модуль ω_1, найдем расстояние от точки C до оси z:

$$CL = OC\cos 30° = OA\cos 30°\cos 30° = 2r\cos^2 30° = 40 \cdot 3/4 = 30 \text{ см}.$$

Определяем ω_1:

$$\omega_1 = v_c / CL = 60 / 30 = 2 \text{ с}^{-1}.$$

- Скорость u найдем как вращательную скорость точки – конца вектора угловой скорости ω при вращении вокруг оси z:

$$\varepsilon = u = \omega_1 \omega = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 6{,}93 \text{ с}^{-2}.$$

- Вектор ε отложен от неподвижной точки в направлении скорости u, перпендикулярен ω;

Решение:

3)

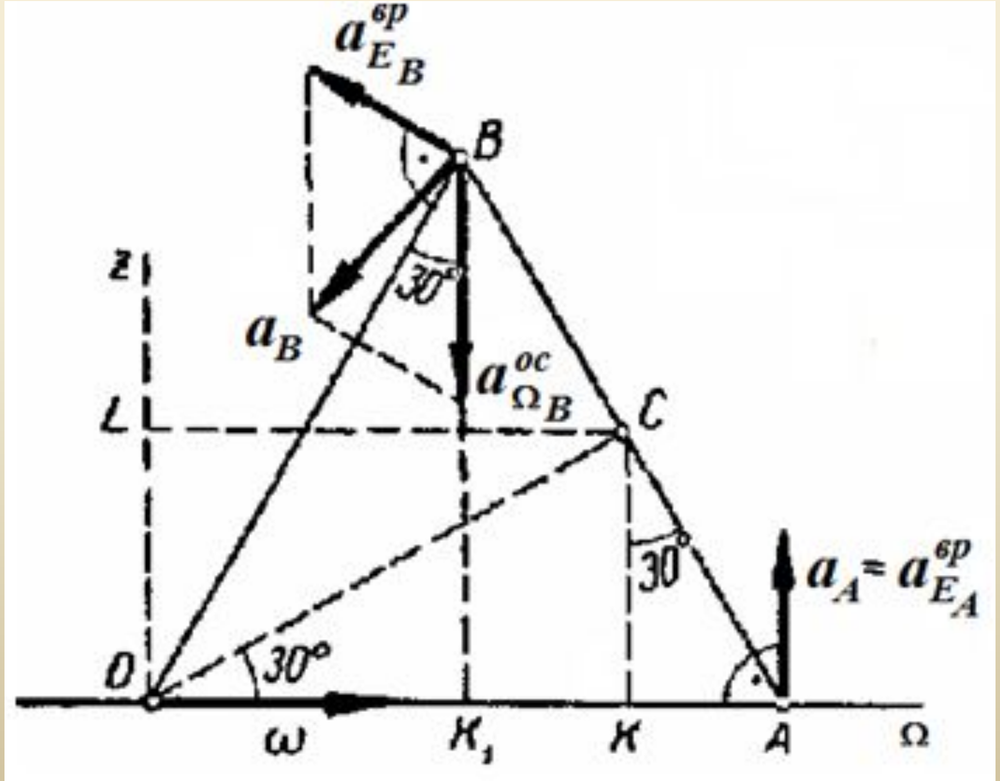
Определим скорости точек A и B.

Точка A лежит на мгновенной оси вращения, ее скорость равна нулю $v_A = 0$.

Скорость точки B :

$v_B = \omega \cdot BK_1 = \omega \cdot 2CK = 2\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{3} = 120$ см/с.

Вектор скорости v_B направлен перпендикулярно плоскости ΩOz ;

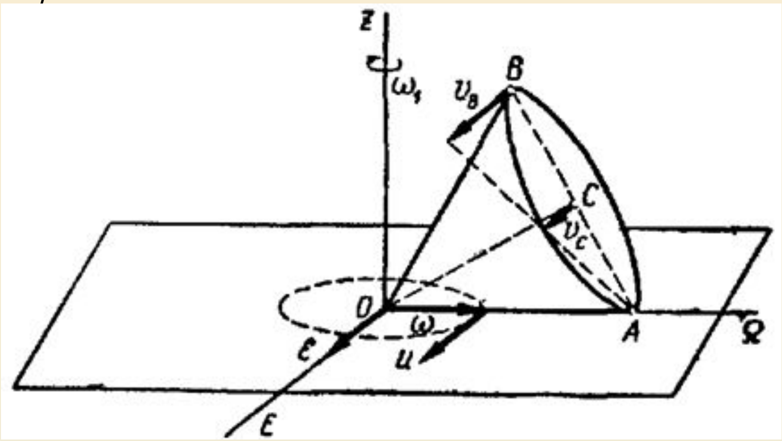


Решение:

4)

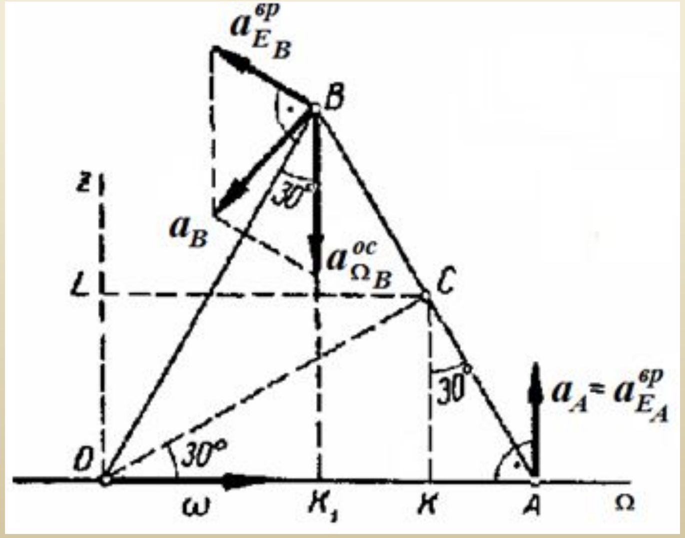
Точка B имеет ускорение $a_{\text{В}}$, равное сумме осестремительного ускорения $a_{\Omega B}{}^{oc}$ и вращательного ускорения $a_{EB}{}^{вр}$: $a_{\text{В}} = a_{\Omega B}{}^{oc} + a_{EB}{}^{вр}$

Найдем: $a_{\Omega B}{}^{oc} = \omega^2 \cdot BK_1 = 415{,}7$ см/с.



Для определения модуля $a_{EB}{}^{вр}$ опустим из B перпендикуляр на ось углового ускорения E. Этот перпендикуляр совпадает с отрезком BO :

$a_{EB}{}^{вр} = \varepsilon \cdot BO = 4\sqrt{3} \cdot 40 = 277{,}1$ см/с2.



Направляем $a_{EB}{}^{вр}$ перпендикулярно BO в плоскости, перпендикулярной ε так, чтобы, смотря навстречу ε, видеть $a_{EB}{}^{вр}$, направленным против часовой стрелки.

Решение:

4)

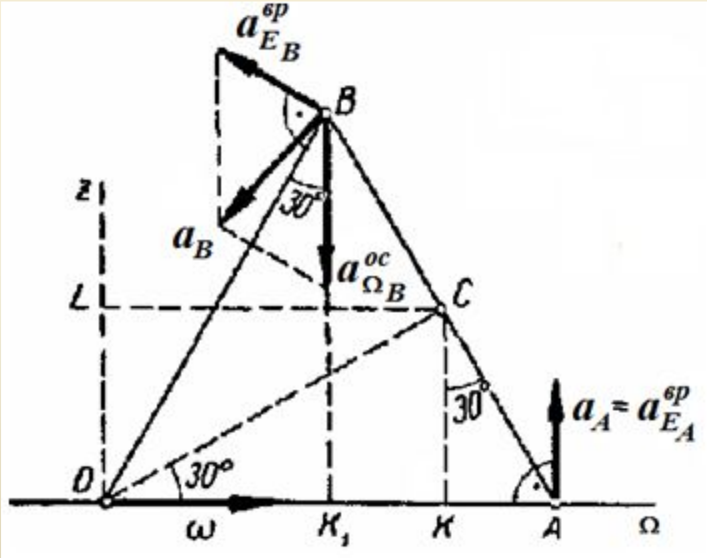
Определяем модуль a_B как длину диагонали параллелограмма:

$$a_B = \sqrt{(a^{\text{вр}}_{E_B})^2 + (a^{oc}_{\Omega_B})^2 + 2a^{\text{вр}}_{E_B} a^{oc}_{\Omega_B} \cos 120^\circ} \text{ см/с}^2$$

$$a_B = \sqrt{(277{,}1)^2 + (415{,}7)^2 + 2 * 415{,}7 * 277{,}1 * (-0{,}5)} \text{ см/с}^2$$

$$a_B = 366{,}6 \text{ см/с}^2$$

В точке *A*, лежащей на мгновенной оси вращения, осестремительное ускорение равно нулю: $a_{\Omega A}{}^{oc} = 0$



Определяем модуль вращательного ускорения точки *A:*

$a_{EB}{}^{вр} = \varepsilon \cdot AO = 4\sqrt{3} \cdot 40 = 277{,}1$ см/с2.

Вектор $a_{EA}{}^{вр}$ направлен перпендикулярно *AO* в плоскости *ΩOz*.

$a_A = a_{EA}{}^{вр} = 277{,}1$ см/с2.

Ответ:

1) Угловая скорость конуса $\omega = 3{,}46\ c^{-1}$.

2) Угловое ускорение конуса $\varepsilon = 6{,}93\ \text{с}^{-2}$.

3) Скорость нижней точки основания $v_A = 0$.

Скорость наивысшей точки основания $v_B = 120$ см/с.

4) Ускорение точки $a_A = 277{,}1\ \text{см/с}^2$

Ускорение точки $a_B = 366{,}6\ \text{см/с}^2$