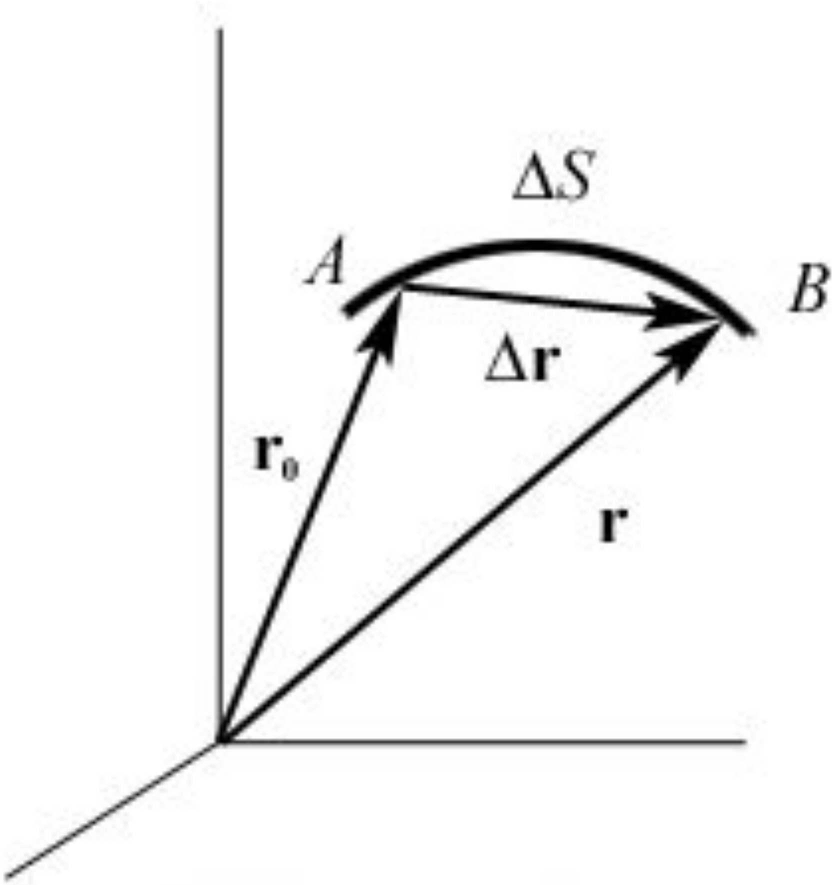
2.3. Кинематика поступательного движения

Исключая время *t* в уравнениях (2.1) и (2.2) получим уравнение траектории движения материальной точки.

Траектория движения материальной точки **– линия, описываемая этой точкой в пространстве.**

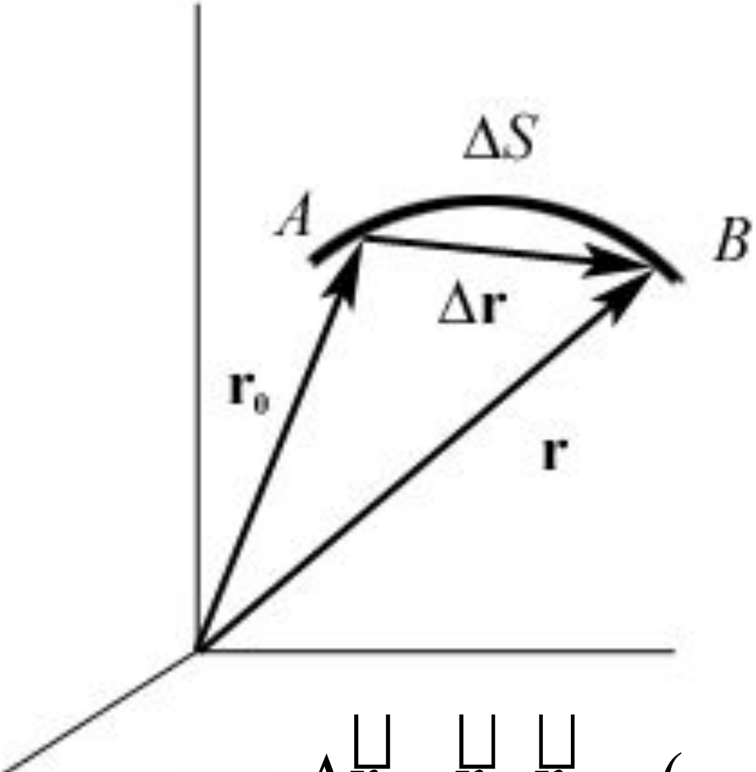
В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным (поступательным), криволинейным и вращательным.

2.3. Кинематика поступательного движения



Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории. Отсчет времени начнем с момента, когда точка находилась в положении *A*. Длина участка траектории *AB*, пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени, называется ***длиной пути*** ΔS и является скалярной функцией времени: $\Delta S = \Delta S(t)$

2.3. Кинематика поступательного движения



Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, **проведенный из начального положения движущейся точки в положение точки в данный момент времени (приращение радиуса – вектора $\Delta\vec{r}$ за рассматриваемый промежуток времени)** ***называется перемещением***

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$$

и в прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $|\Delta\vec{r}|$ равен пройденному пути ΔS.

Содержание

Модель: Движение тела в поле тяжести

2.4. Скорость

Для характеристики движения материальной точки вводится векторная величина - *скорость*, которой определяют как *быстроту движения*, так и изменение его *направления* в данный момент времени.

Пусть материальная точка движется по какой–либо криволинейной траектории так, что в момент времени t ей соответствует радиус–вектор $\vec{r}$. В течение малого промежутка времени точка пройдет путь ΔS и получит элементарное (бесконечно малое) перемещение $\Delta\vec{r}$

***Вектором средней скорости* $<\vec{\upsilon}>$ называется приращение $\Delta\vec{r}$ радиус–вектора точки к промежутку времени Δt :**

$$<\vec{\upsilon}>=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (2.3)$$

2.4. Скорость

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta\vec{r}$. При неограниченном уменьшении средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется *мгновенной скоростью* $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Мгновенная скорость* – *векторная величина, равная скорости материальной точки в фиксированный момент времени.

Мгновенная скорость* – *векторная величина, равная первой производной радиус–вектора движущейся точки по времени.

2.4. Скорость

Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения, поэтому модуль мгновенной скорости

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

Таким образом, *модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени*

(2.4)

$$\upsilon = \frac{ds}{dt}$$

2.4. Скорость

При неравномерном движении модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. В данном случае пользуются скалярной величиной <υ> – средней скоростью неравномерного движения $<\upsilon>=\Delta s/\Delta t$ **. Из рис. 3 вытекает, что** $<\upsilon>><|\vec{\upsilon}|>$**, так как** $\Delta s>\Delta\vec{r}$ **, и только в случае прямолинейного движения** $\Delta s=|\Delta\vec{r}|$ **.**

Если выражение d*s*=*υ*d*t* (см. формулу 2.4) проинтегрировать по времени в пределах от *t* до *t*+Δ*t*, то найдем длину пути, пройденного точкой за время Δ*t*:

$$s=\int_{t}^{t+\Delta t}\upsilon dt \qquad (2.5)$$

2.4. Скорость

В случае *равномерного движения* числовое значение мгновенной скорости постоянно; тогда выражение (2.5) примет вид:

$$s = \upsilon \int_{t}^{t+\Delta t} \mathrm{d}t = \upsilon \Delta t$$

Длина пути, пройденного точкой за промежуток времени от t_1 до t_2 дается интегралом:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)\mathrm{d}t$$

Содержание

2.5. Ускорение и его составляющие.

В случае неравномерного движения важно знать, как быстро изменяется скорость с течением времени.

Физической величиной характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению является *ускорение*.

Рассмотрим *плоское движение*, то есть движение, при котором все участки траектории точки лежат в одной плоскости.

Пусть вектор $\vec{\upsilon}$ задает скорость точки *A* в момент времени *t*. За время Δt движущаяся точка перешла в положение *B* и приобрела скорость, отличную от $\vec{\upsilon}$ как по модулю, так и по направлению и равную

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}$$

Перенесем вектор $\vec{\upsilon}_1$ в точку A и найдем $\Delta\vec{\upsilon}$ (рис.4). Разложим вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ на две составляющие. Для этого из точки A (рис.4) по направлению скорости $\vec{\upsilon}$ отложим вектор $\overrightarrow{AD}$, по модулю равный $\vec{\upsilon}_1$. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{CD}$, равный $\Delta\upsilon_\tau$, определяет изменение скорости за время Δt по модулю:

$$\Delta\upsilon_\tau=\upsilon_1-\upsilon$$

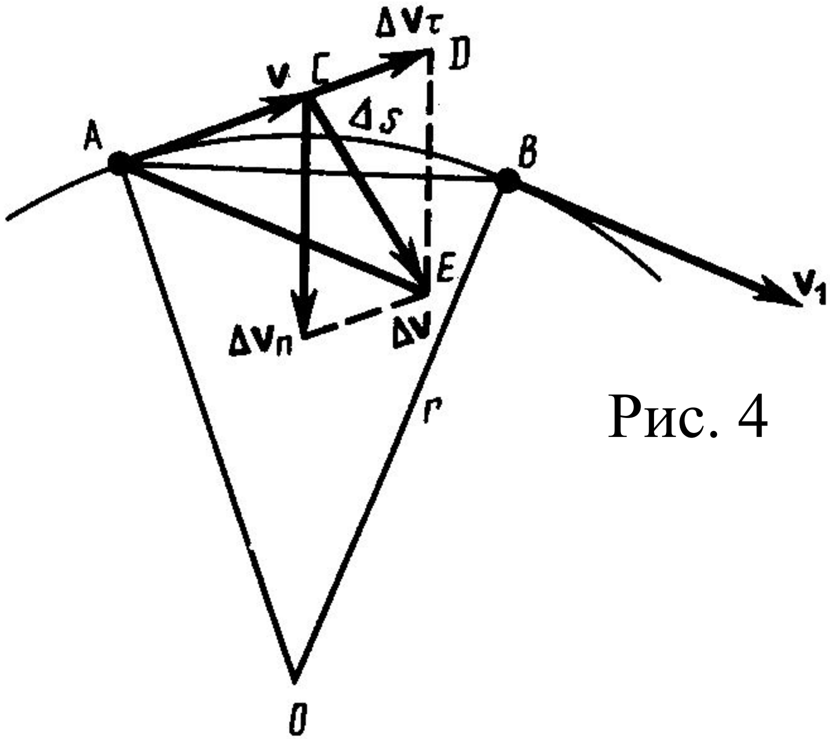


Рис. 4

Вторая же составляющая $\Delta\vec{\upsilon}_n$ характеризует изменение скорости за время Δt по направлению.

Тангенциальная составляющая ускорения

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t},$$

т.е. равна первой производной по времени от модуля скорости, определяя тем самым быстроту изменения скорости по модулю.

Найдем вторую составляющую ускорения. Допустим, что точка *B* достаточно близка к точке *A*, поэтому можно считать дугу окружности радиуса *r*, мало отличающейся от хорды AB. Тогда из подобия треугольников *AOB* и *EAД* следует $\Delta\upsilon_n / AB = \Delta\upsilon_1 / r$, но т.к. $AB = \upsilon \cdot \Delta t$, то

$$\frac{\Delta \upsilon_n}{\Delta t} = \frac{\upsilon \upsilon_1}{r}$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ получим $\vec{\upsilon}_1 \to \vec{\upsilon}$.
Поскольку $\vec{\upsilon}_1 \to \vec{\upsilon}$, угол *EAD* стремится к нулю, и т.к. треугольник EAD равнобедренный, то угол ADE между $\vec{\upsilon}$ и $\Delta\vec{\upsilon}_n$ стремится к прямому. Следовательно, при $\Delta t \to 0$ векторы $\vec{\upsilon}$ и $\Delta\vec{\upsilon}_n$ оказываются взаимно перпендикулярными. Так как вектор скорости направлен по касательной к траектории, то вектор $\Delta\vec{\upsilon}_n$, перпендикулярный вектору скорости, направлен к центру ее кривизны. Вторая составляющая ускорения равная

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon_n}{\Delta t} = \frac{\upsilon^2}{r},$$

называется *нормальной составляющей ускорения* и направлена по нормали к траектории к центру ее кривизны (поэтому ее называют также центростремительным ускорением).

Полное ускорение тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_{n}$$

Итак, тангенциальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения скорости по модулю (направлена по касательной к траектории), а нормальная составляющая ускорения – быстроту изменения скорости по направлению (направлена к центру кривизны траектории).

В зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения движение можно классифицировать следующим образом:

1. $a_\tau = 0$, $a_n = 0$ **– прямолинейное равномерное движение;**

2. $a_\tau = a = const$, $a_n = 0$ **– прямолинейное равнопеременное движение.**

При таком виде движения $a_\tau = a = \dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \dfrac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1}$.

Если начальный момент времени $t_1 = 0$ **, а начальная скорость** $\upsilon_1 = \upsilon_0$**, то, обозначив** $t_2 = t$ **и** $\upsilon_2 = \upsilon$**, получим** $a = (\upsilon - \upsilon_0)/t$**, откуда**

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

Проинтегрировав эту формулу в пределах от нуля до произвольного момента *t*, найдем, что длина пути пройденного точкой, в случае равнопеременного движения

$$S = \int_0^t \upsilon dt = \int_0^t (\upsilon_0 + at)dt = \upsilon_0 t + at^2 / 2$$

3. $a_\tau = f(t)$, $a_n = 0$ – прямолинейное движение с переменным ускорением.

4. $a_\tau = 0$, $a_n = const$.

При $a_\tau = 0$ скорость по модулю не меняется, а изменяется по направлению. Из формулы $a_n = \upsilon^2/r$ следует, что радиус кривизны должен быть постоянным. Следовательно, движение по окружности является равномерным.

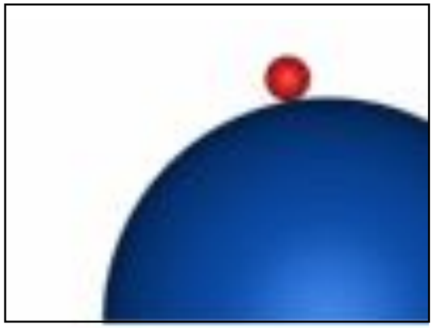
5. $a_\tau = 0,\ a_n \neq 0$ – **равномерное криволинейное движение.**

6. $a_\tau = const,\ a_n \neq 0$ – **криволинейное равнопеременное движение.**

7. $a_\tau = f(t),\ a_n \neq 0$ - **криволинейное движение с переменным ускорением.**

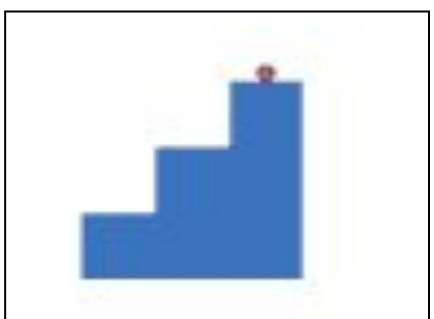
Содержание

Задачи



1. **Маленький шарик начинает скатываться без начальной скорости с вершины абсолютно гладкой полусферы радиуса R. На какой высоте он оторвётся от поверхности.**
   Ответ: $2R/3$

2. **Цилиндр радиуса R лежит на двух тонких стержнях. С какой относительной скоростью V должны раздвигаться стержни, чтобы падения цилиндра происходило без контакта с ними.**
   Ответ: $V = 2\sqrt{gR}$



3. **С какой скоростью шарик должен двигаться по верхней ступени лестницы, чтобы удариться о среднюю и нижнюю ступень только по одному разу. Ширина и высота ступеней - b.**
   Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{gb}$ $(\sqrt{2}-1)\sqrt{gb}$

Лекция окончена!

Движение в поле тяжести Земли

Рассмотрим движение свободного тела в присутствии гравитационного поля Земли на примере выстрела из пушки. Если пушка расположена в точке с коорди-натами (0, 0, 0), то снаряд будет двигаться по траектории, которая описывается следующими уравнениями:

$$X = (\upsilon \cos\phi)t$$

$$Y = (\upsilon \sin\phi)t - gt^2/2,$$

где υ - скорость снаряда вдоль ствола пушки, ϕ - угол между стволом пушки и горизонтом (ось X), t - время, g - ускорение свободного падения в поле тяжести Земли. Подставляя t из первого уравнения во второе, находим уравнение траектории движения снаряда:

$$Y = X \operatorname{tg} \phi - (g/2\upsilon^2)(1 + \operatorname{tg}^2 \phi) X^2$$

Дальше

Из приведённого выше уравнения видно, что траектория полёта снаряда имеет параболическую форму. Из этого уравнения находим максимальную дальность стрельбы X_{max} (при этом Y=0) и максимальную высоту полёта Y_{max} (первая производная Y по координате X равна нулю):

$$X_{max} = \upsilon^2 \sin(2\,\phi)/g$$
$$Y_{max} = \upsilon^2 \sin^2\phi/2g$$

Из первого уравнения видно, что максимальная дальность полёта снаряда достигается при стрельбе под углом ϕ, равном 45°.

Назад