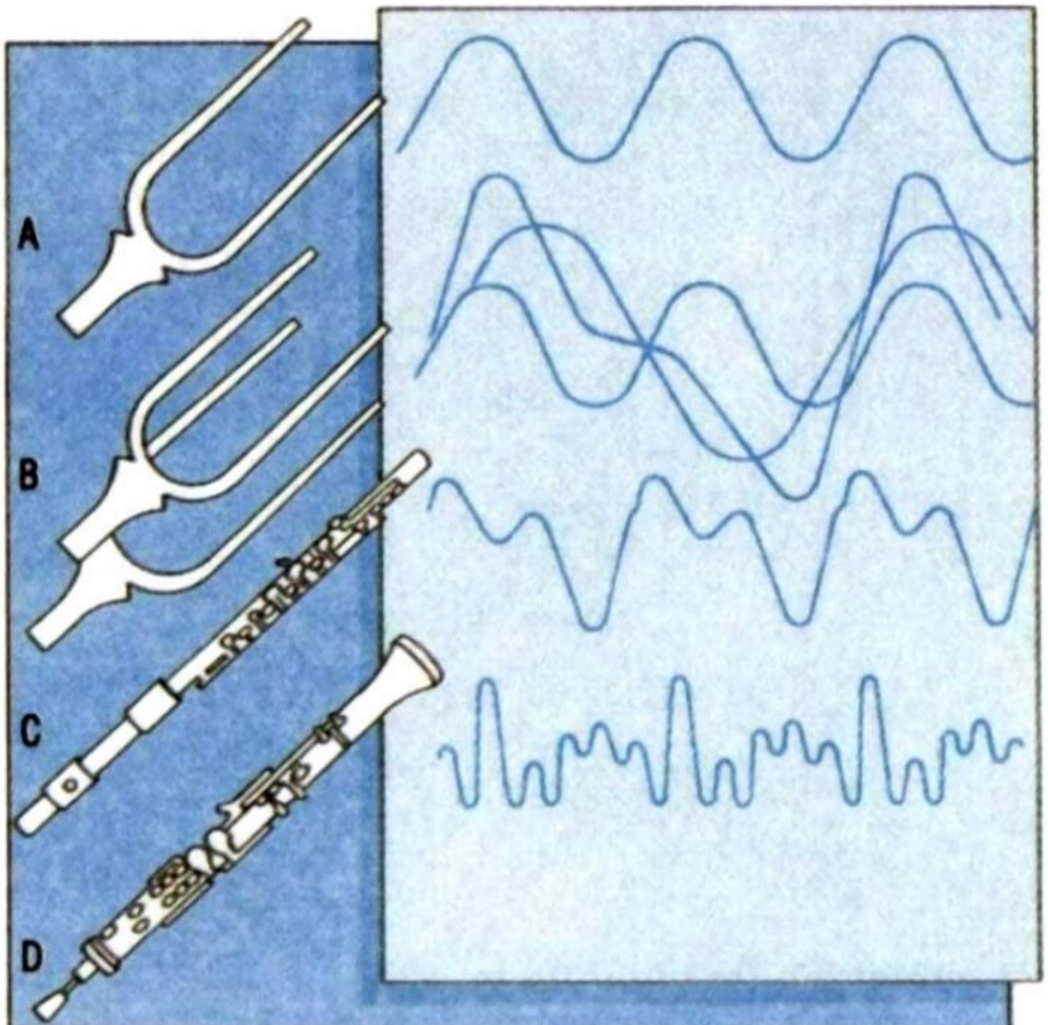
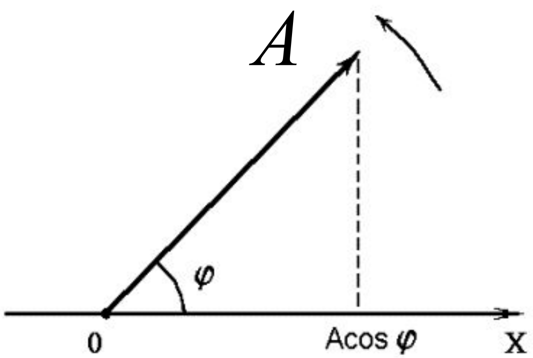
Лекция 33. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ



1. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА (I)

Сложение гармонических колебаний одного направления облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Такой способ называется векторной диаграммой.

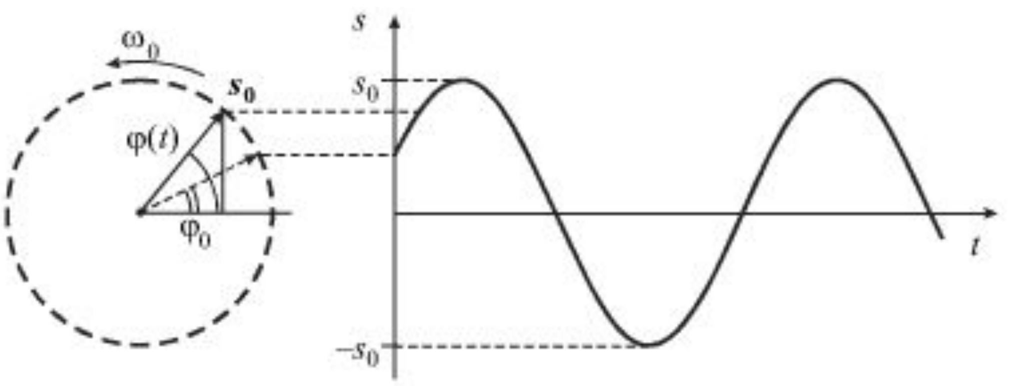
Из точки 0, взятой на оси x отложим вектор длины A, образующий с осью угол φ.



Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω_0, то координата конца вектора будет изменяться по закону

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Следовательно, проекция конца вектора на ось x будет совершать гармонические колебания с амплитудой, равной длине вектора A, циклической частотой ω_0, и начальной фазой φ_0, равной углу, образуемому вектором с осью x в начальный момент времени.



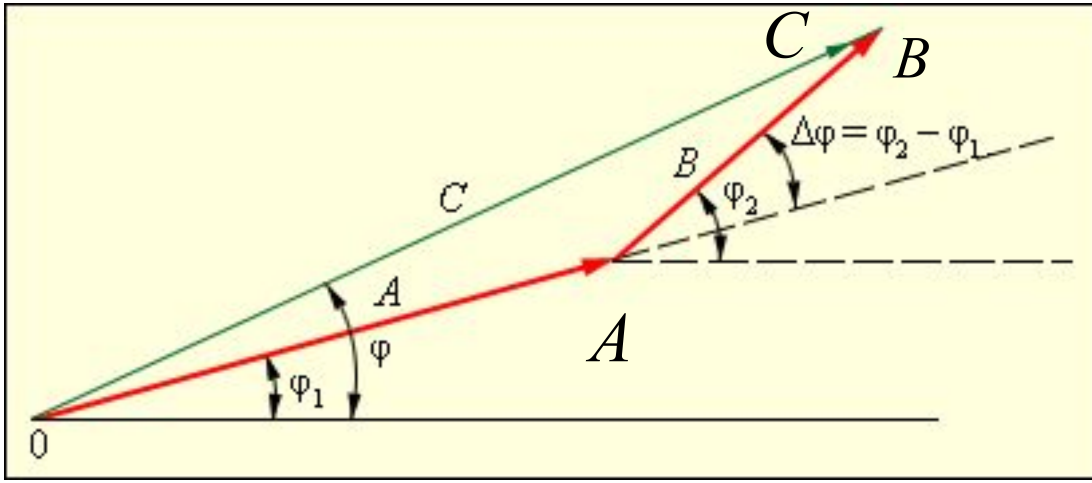
2. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА (II)

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты.

Смещение x колеблющегося тела будет суммой смещений исходных колебаний x_1, x_2 :

$$x_1 = A\cos(\omega_0 t + \varphi_1);$$

$$x_2 = B\cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$



Представим оба колебания с помощью векторов A и B. Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор C. Проекция этого вектора на ось x равна сумме проекций слагаемых векторов A и B:

$$x(t) = x\ (t) + x_2(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_0 t + \varphi_2) = C\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Вектор C задает результирующее колебание с той же частотой ω_0 и амплитудой C, которую определим по теореме косинусов:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Из рисунка понятно, что $$tg\varphi = \frac{A\sin\varphi_1 + B\sin\varphi_2}{A\cos\varphi_1 + B\cos\varphi_2}.$$

3. БИЕНИЯ (I)

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одного направления с близкими частотами.

Пусть ω – циклическая частота первого колебания, тогда $\omega + \Delta\omega$ – частота второго колебания, причем $\Delta\omega \ll \omega$ (близкие частоты).

Для простоты будем полагать, что амплитуды колебаний одинаковы, а начальные фазы равны нулю. Тогда уравнения колебаний имеют вид:

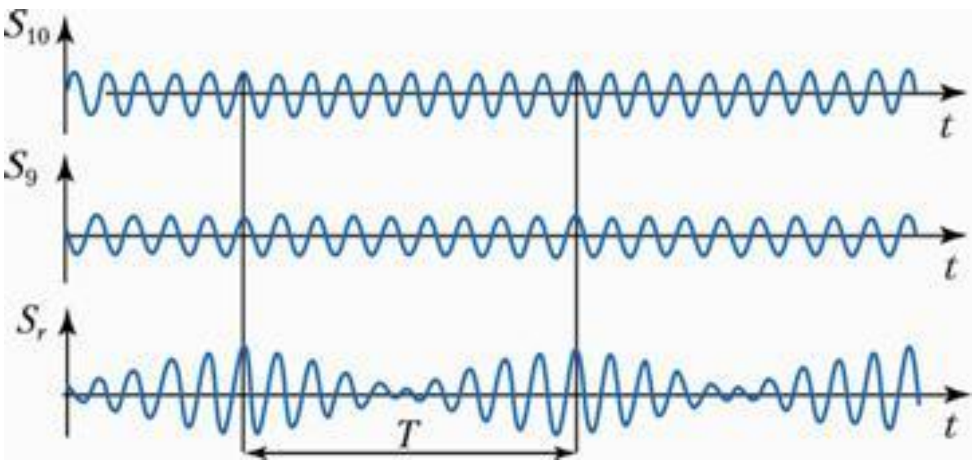
$$x_1 = a\cos(\omega t), \qquad x_2 = a\cos\left[(\omega + \Delta\omega)t\right].$$

Складывая эти выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем

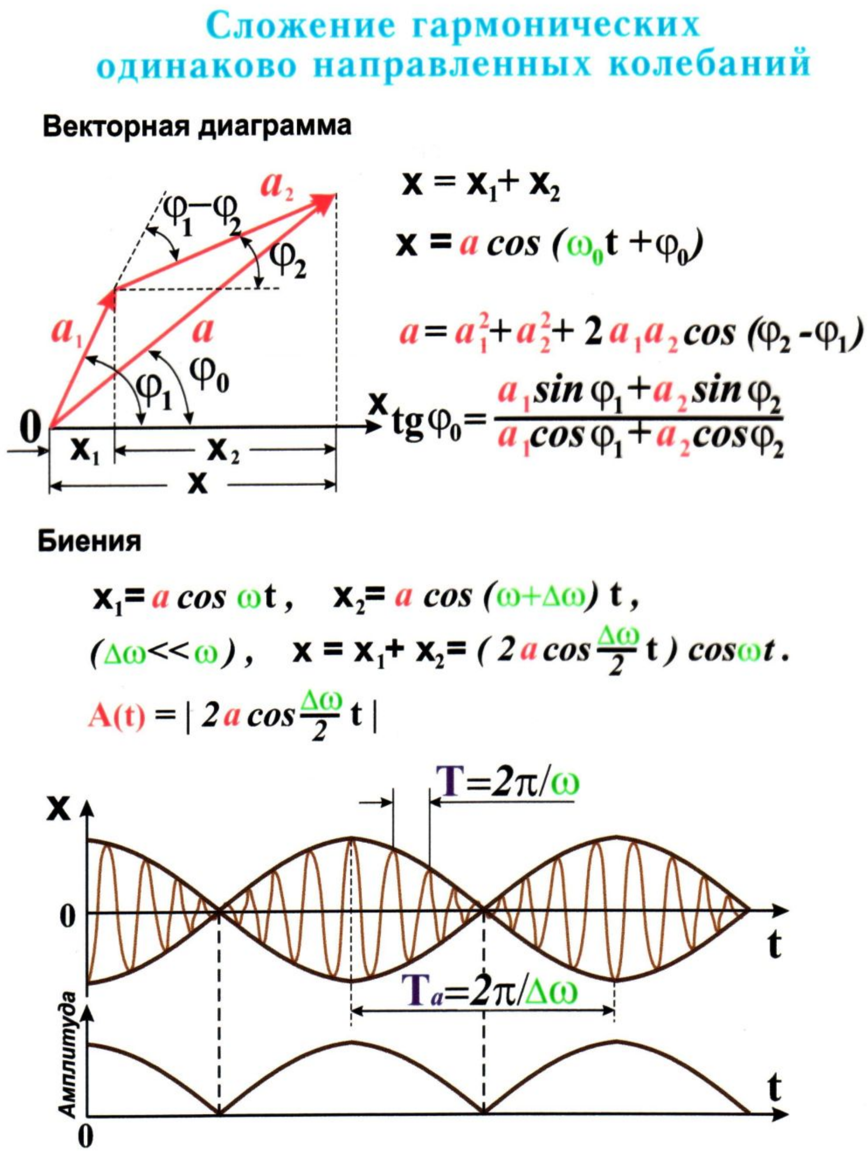
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) =$$

$$= 2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(\omega t + \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \approx$$

$$\approx 2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\omega t).$$



4. БИЕНИЯ (II)



Первый множитель в формуле

$$x = 2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\omega t)$$

изменяется значительно медленнее, чем второе, так как $\Delta\omega \ll \omega$. Это позволяет рассматривать результирующее колебание как гармоническое с высокой частотой ω, амплитуда которого пульсирует с низкой частотой $\Delta\omega$.

Такое колебание называется биениями.

Амплитуда биений определяется модулем выражения, стоящего перед гармонической функцией высокой частоты

$$A(t) = \left|2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right|.$$

Амплитуда колеблется с частотой $\Delta\omega$ – частотой биений.

5. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть частица участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одной частоты. Пусть колебания вдоль оси x происходят с нулевой начальной фазой, а вдоль оси y со сдвигом по фазе на $\Delta\varphi$. Тогда уравнения колебаний примут вид:

$$x = a\cos(\omega t), \quad y = b\cos(\omega t + \Delta\varphi) = b\cos(\omega t)\cos\Delta\varphi - b\sin(\omega t)\sin\Delta\varphi.$$

Чтобы получить уравнение траектории в явном виде исключим время t. Из первого уравнения следует, что

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{a} \Rightarrow \qquad \sin(\omega t) = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Подставляя синус и косинус в формулу для y, получим:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\Delta\varphi \mp \sin\Delta\varphi\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Уединяя иррациональность и возводя в квадрат, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi,$$

которое представляет собой уравнение эллипса. Полуоси этого эллипса в общем случае не совпадают с осями координат.

6. ДВИЖЕНИЕ ПО ПРЯМОЙ

Определим форму траектории результирующего колебания для некоторых частных случаев.

1. Пусть $\Delta\varphi = 0$. В этом случае общее уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi$$

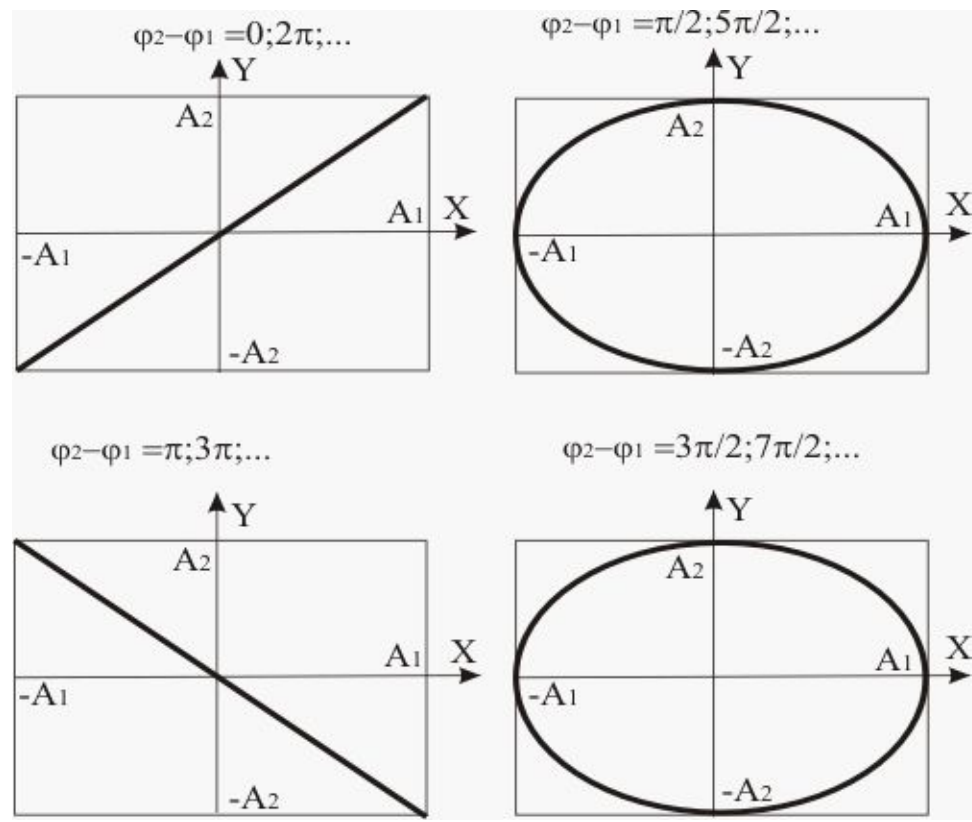
принимает вид $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=0 \Rightarrow$

Движение является гармоническим колебанием вдоль прямой $y=\frac{b}{a}x$ с амплитудой $\sqrt{a^2+b^2}$.

2. Пусть $\Delta\varphi = \pm\pi$. В этом случае

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=0 \Rightarrow \quad y=-\frac{b}{a}x.$$

Траектория является прямой, лежащей во 2-м и 4-м квадрантах.



7. ДВИЖЕНИЕ ПО ЭЛЛИПСУ

При $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ общее уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

принимает вид $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

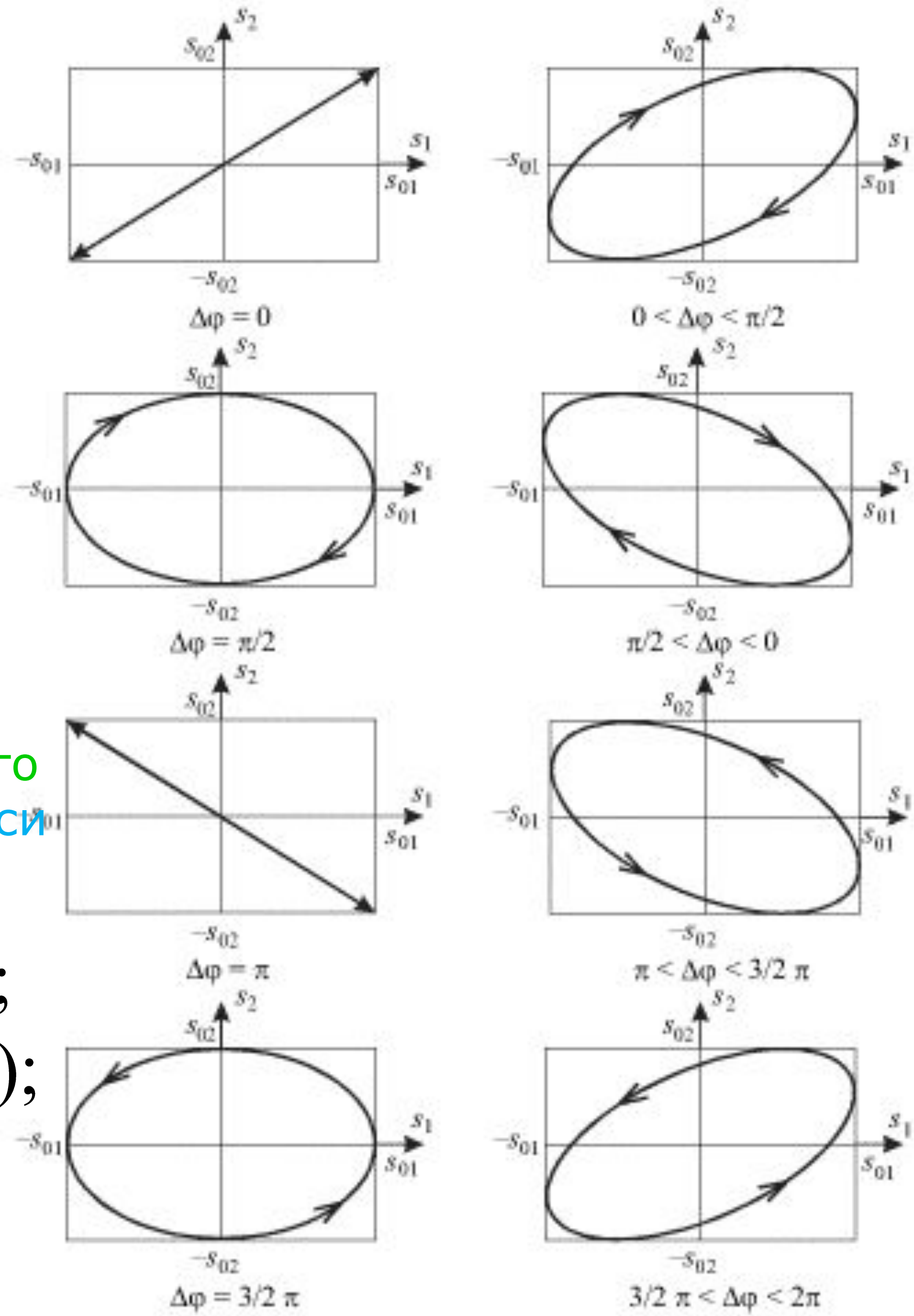
Это уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний.

При $\Delta\varphi = +\pi/2$ движение по часовой стрелке

$$x = a\cos(\omega t);$$
$$y = -b\sin(\omega t);$$

При $\Delta\varphi = -\pi/2$ движение против часовой стрелки.

$$x = a\cos(\omega t);$$
$$y = b\sin(\omega t);$$



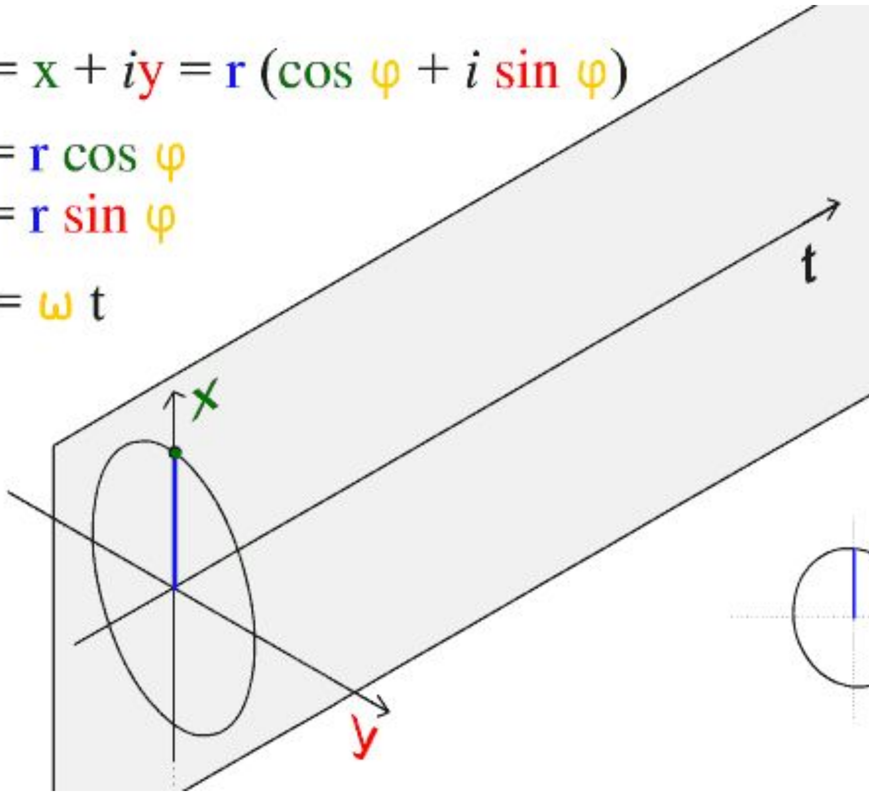
8. ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ

$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$\varphi = \omega t$

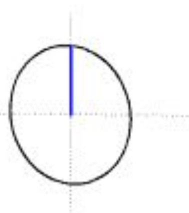


Знак «+» в выражении для y соответствует движению против часовой стрелки, знак «-» – движению по часовой стрелке.

Если $\Delta\varphi = \pm\pi/2,\ a = b = r,$ то уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

принимает вид $\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1.$

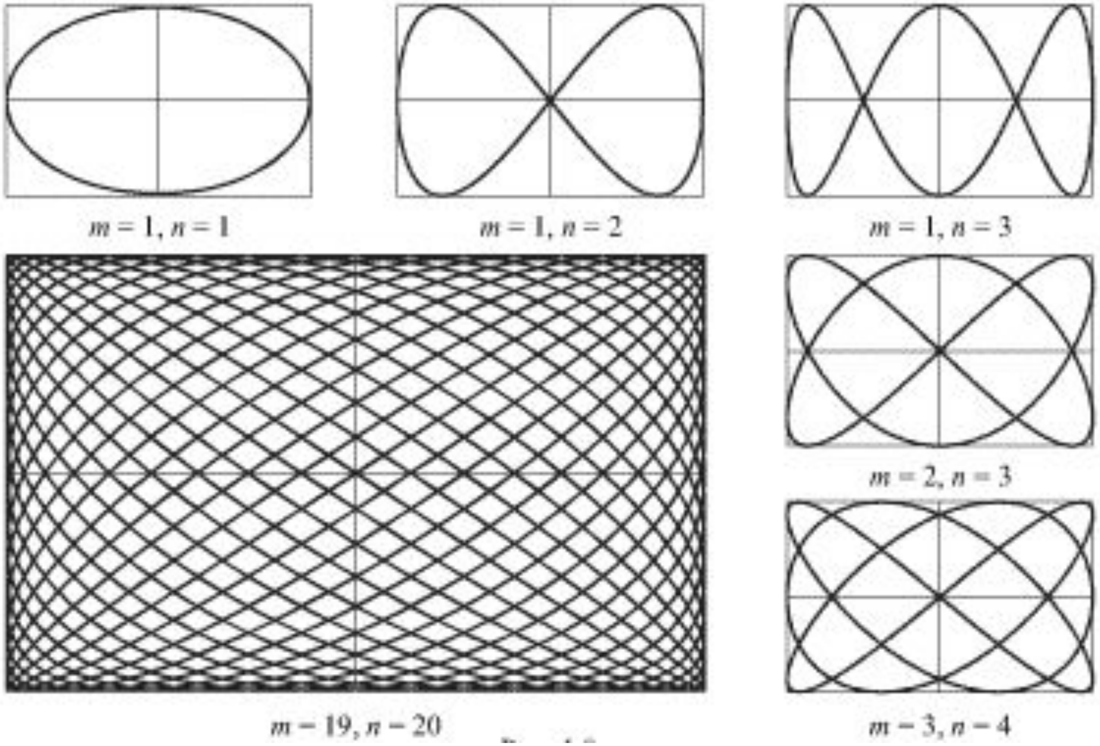


При равенстве амплитуд эллипс вырождается в окружность.

Это означает что равномерное движение по окружности радиуса r с угловой скоростью ω может быть представлена как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний

$$x = r\cos(\omega t);\quad y = \pm r\sin(\omega t).$$

9. ФИГУРЫ ЛИССАЖУ



Если частоты взаимно пер-пендикулярных колебаний неодинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых фигурами Лиссажу. Наиболее простой вид имеют фигуры Лиссажу для случая, если отношение частот – это простая рациональная дробь.

Пусть, частоту колебаний вдоль оси x можно представить в виде $\omega_x = m\omega$, а вдоль оси y – $\omega_y = n\omega$, где m и n – натуральные числа. За то время, пока вдоль оси x точка успевает переместится из одного крайнего положения в другое m раз, вдоль оси y она совершит n таких перемещений.

Чем ближе к единице рациональная дробь, выражающая отношение частот колебаний, тем сложнее оказывается фигура Лиссажу.