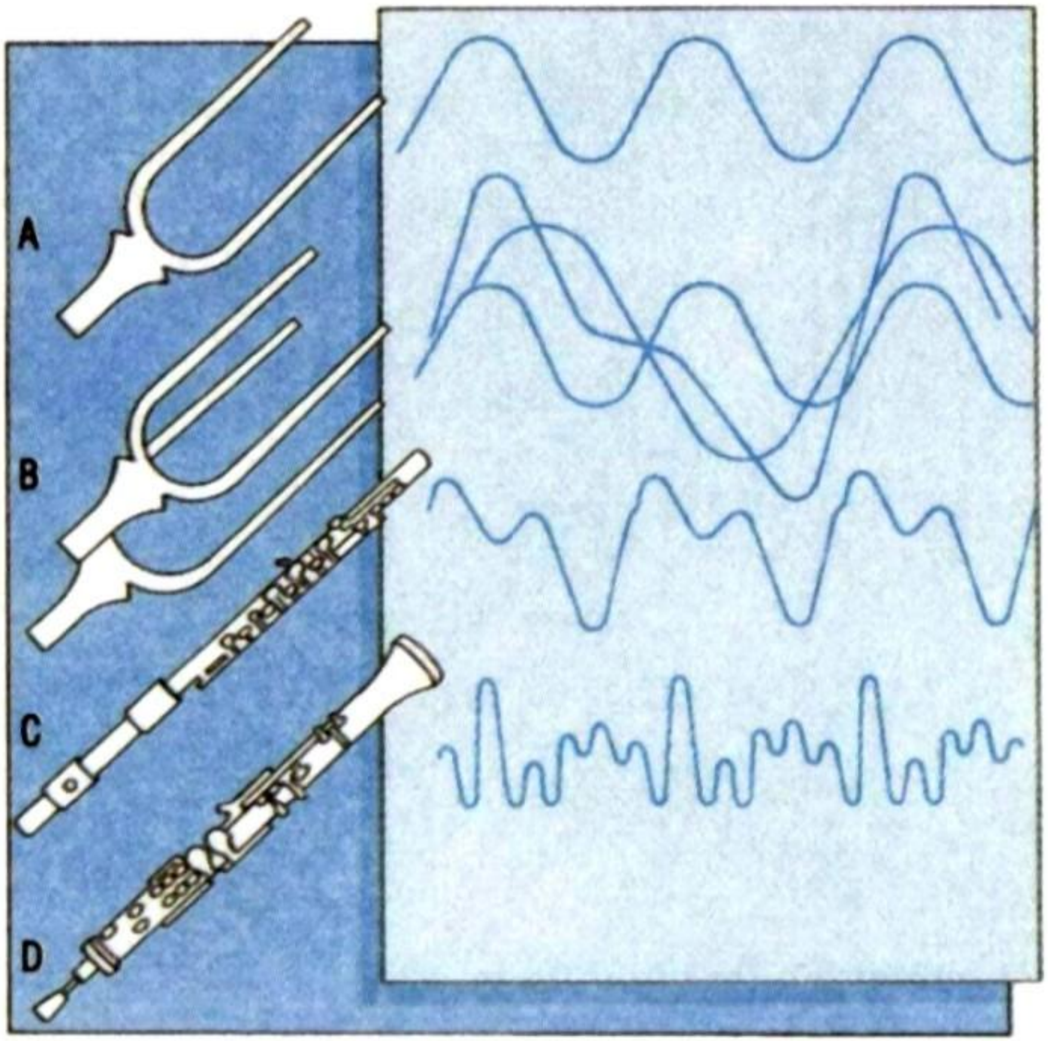
Лекция 33. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

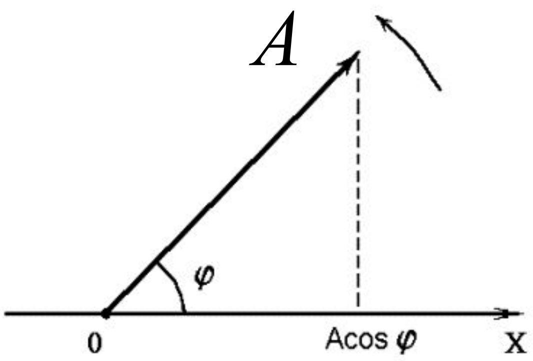


1. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА (I)

Сложение гармонических колебаний одного направления облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Такой способ называется векторной диаграммой.

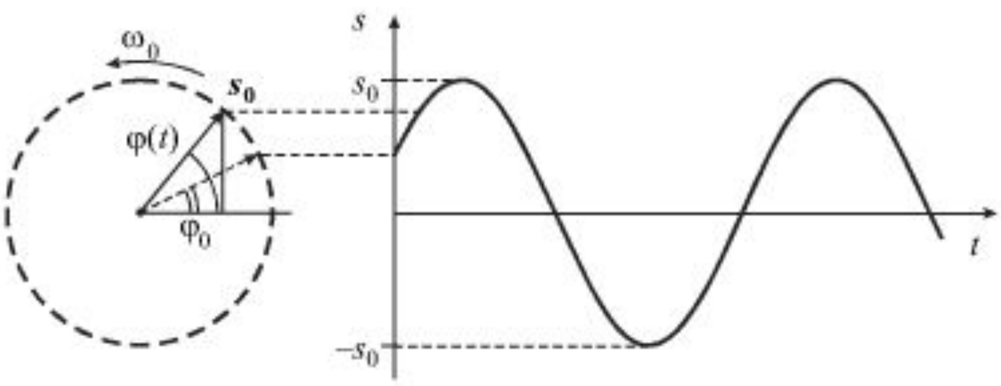
Из точки 0, взятой на оси x отложим вектор длины A, образующий с осью угол φ.

Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω_0, то координата конца вектора будет изменяться по закону



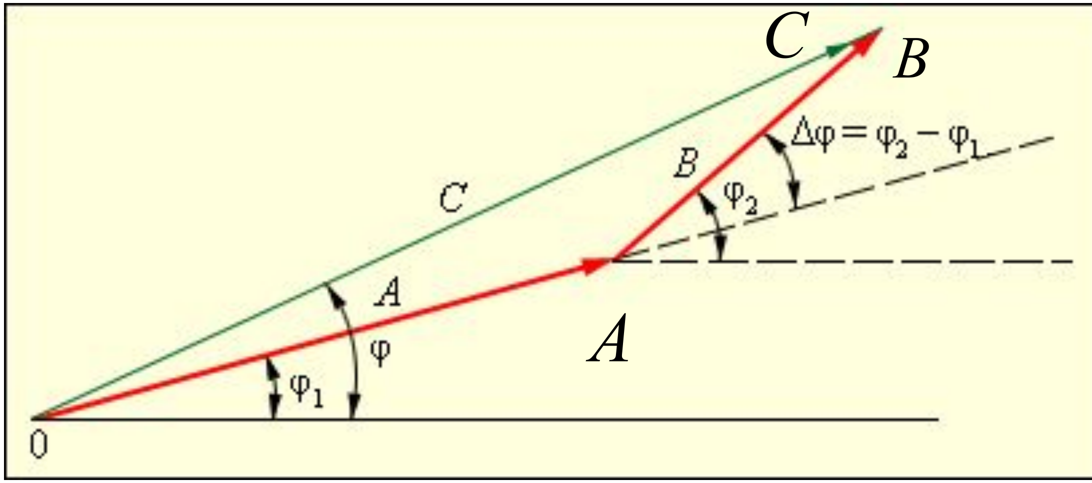
$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Следовательно, проекция конца вектора на ось x будет совершать гармонические колебания с амплитудой, равной длине вектора A, циклической частотой ω_0, и начальной фазой φ_0, равной углу, образуемому вектором с осью x в начальный момент времени.



2. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА (II)

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты.



Смещение x колеблющегося тела будет суммой смещений исходных колебаний x_1, x_2:

$$x_1 = A\cos(\omega_0 t + \varphi_1);$$

$$x_2 = B\cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

Представим оба колебания с помощью векторов A и B. Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор C. Проекция этого вектора на ось x равна сумме проекций слагаемых векторов A и B:

$$x(t) = x\ (t) + x_2(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_0 t + \varphi_2) = C\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Вектор C задает результирующее колебание с той же частотой ω_0 и амплитудой C, которую определим по теореме косинусов:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Из рисунка понятно, что $$tg\varphi = \frac{A\sin\varphi_1 + B\sin\varphi_2}{A\cos\varphi_1 + B\cos\varphi_2}.$$

3. БИЕНИЯ (I)

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одного направления с близкими частотами.

Пусть ω – циклическая частота первого колебания, тогда $\omega + \Delta\omega$ – частота второго колебания, причем $\Delta\omega \ll \omega$ (близкие частоты).

Для простоты будем полагать, что амплитуды колебаний одинаковы, а начальные фазы равны нулю. Тогда уравнения колебаний имеют вид:

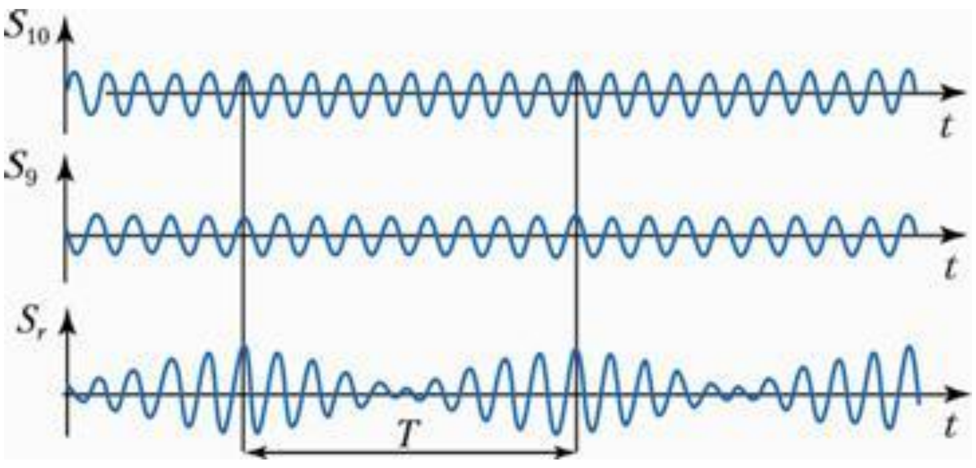
$$x_1 = a\cos(\omega t), \qquad x_2 = a\cos\left[(\omega + \Delta\omega)t\right].$$

Складывая эти выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем

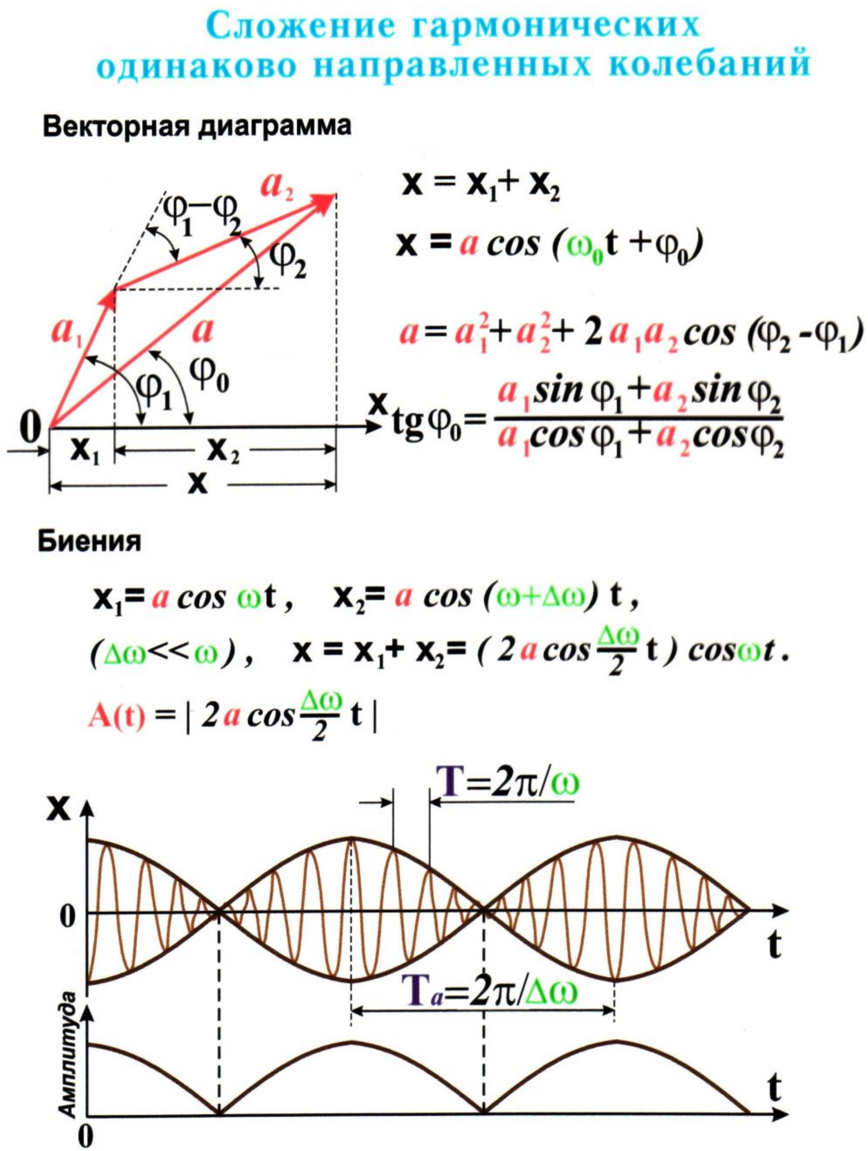
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) =$$

$$= 2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(\omega t + \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \approx$$

$$\approx 2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\omega t).$$



4. БИЕНИЯ (II)



Первый множитель в формуле

$$x = 2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\omega t)$$

изменяется значительно медленнее, чем второе, так как $\Delta\omega \ll \omega$. Это позволяет рассматривать результирующее колебание как гармоническое с высокой частотой ω, амплитуда которого пульсирует с низкой частотой $\Delta\omega$.

Такое колебание называется биениями.

Амплитуда биений определяется модулем выражения, стоящего перед гармонической функцией высокой частоты

$$A(t) = \left|2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right|.$$

Амплитуда колеблется с частотой $\Delta\omega$ – частотой биений.

5. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть частица участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одной частоты. Пусть колебания вдоль оси x происходят с нулевой начальной фазой, а вдоль оси y со сдвигом по фазе на $\Delta\varphi$. Тогда уравнения колебаний примут вид:

$$x = a\cos(\omega t), \quad y = b\cos(\omega t + \Delta\varphi) = b\cos(\omega t)\cos\Delta\varphi - b\sin(\omega t)\sin\Delta\varphi.$$

Чтобы получить уравнение траектории в явном виде исключим время t. Из первого уравнения следует, что

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{a} \Rightarrow \qquad \sin(\omega t) = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Подставляя синус и косинус в формулу для y, получим:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\Delta\varphi \mp \sin\Delta\varphi\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Уединяя иррациональность и возводя в квадрат, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi,$$

которое представляет собой уравнение эллипса. Полуоси этого эллипса в общем случае не совпадают с осями координат.

6. ДВИЖЕНИЕ ПО ПРЯМОЙ

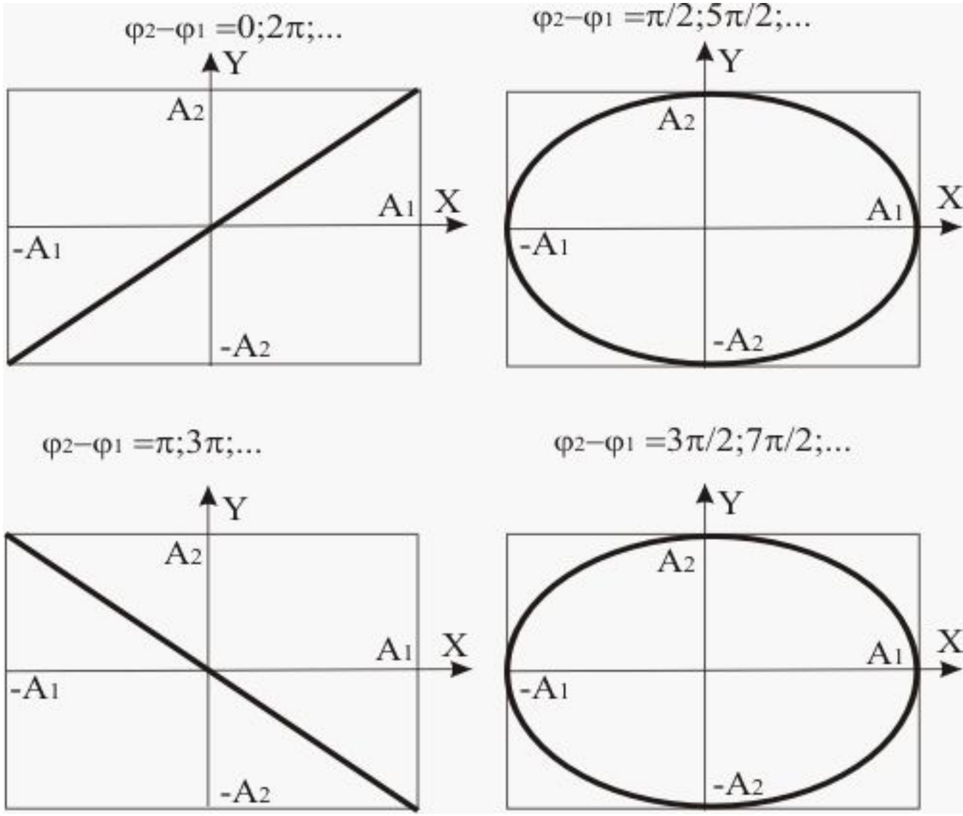
Определим форму траектории результирующего колебания для некоторых частных случаев.

1. Пусть $\Delta\varphi = 0.$ В этом случае общее уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

принимает вид $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \Rightarrow$

Движение является гармоническим колебанием вдоль прямой $y = \frac{b}{a}x$ с амплитудой $\sqrt{a^2 + b^2}$.



2. Пусть $\Delta\varphi = \pm\pi.$ В этом случае

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \Rightarrow \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Траектория является прямой, лежащей во 2-м и 4-м квадрантах.

7. ДВИЖЕНИЕ ПО ЭЛЛИПСУ

При $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ общее уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

принимает вид $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

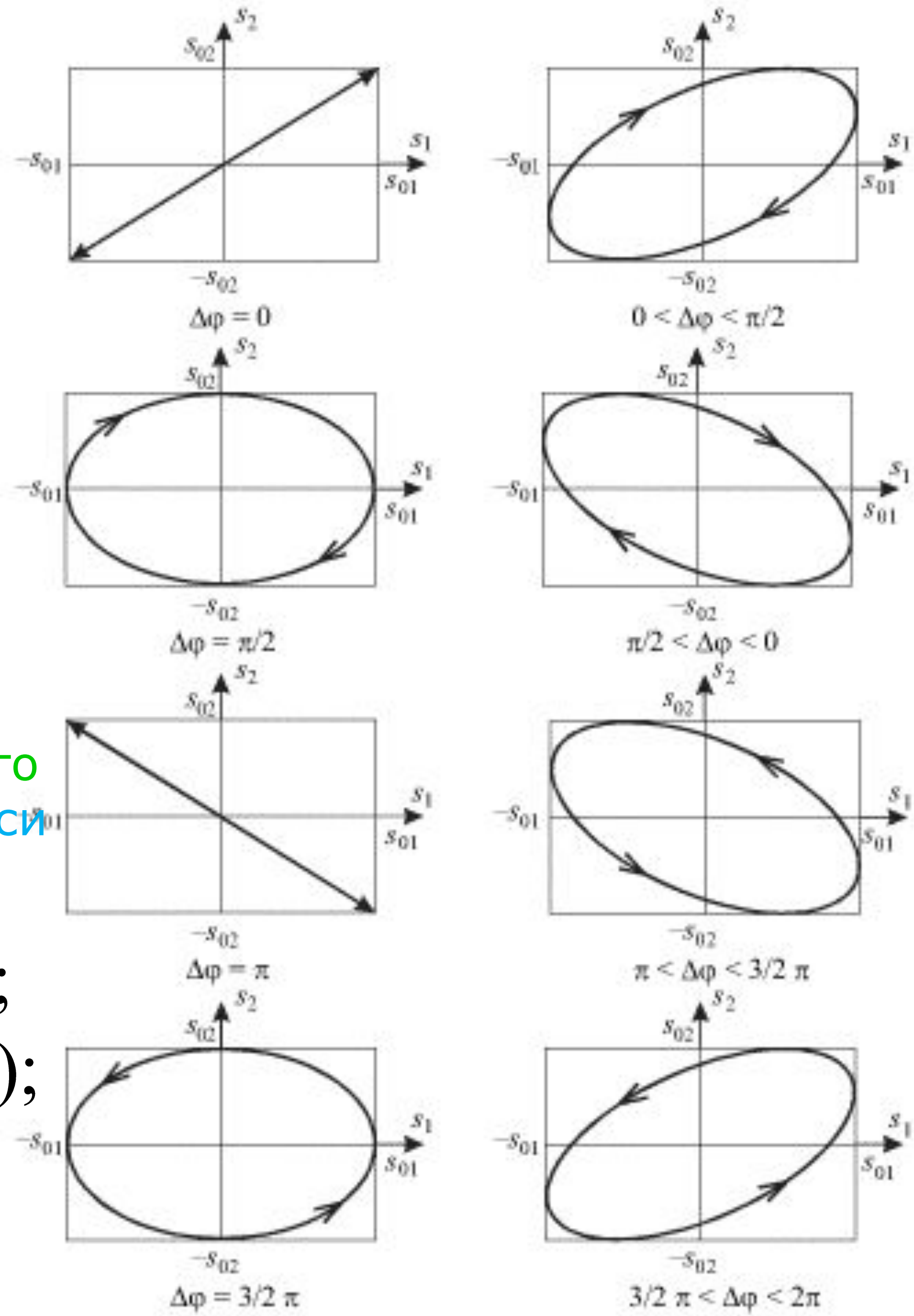
Это уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний.

При $\Delta\varphi = +\pi/2$ движение по часовой стрелке

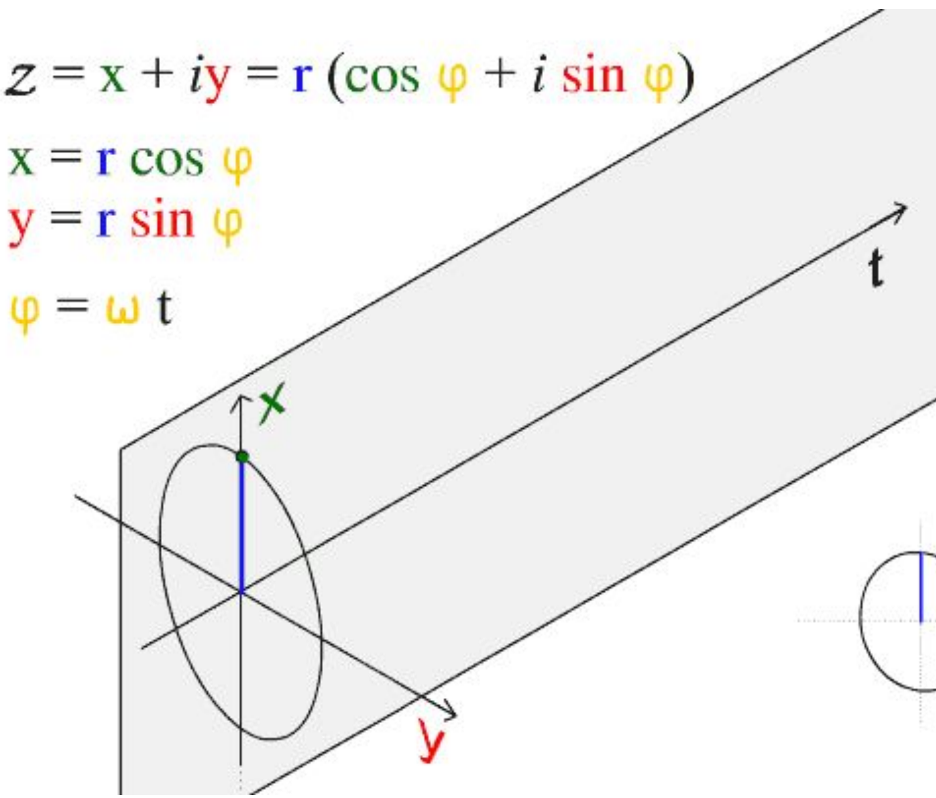
$$x = a\cos(\omega t);$$
$$y = -b\sin(\omega t);$$

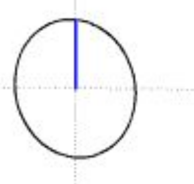
При $\Delta\varphi = -\pi/2$ движение против часовой стрелки.

$$x = a\cos(\omega t);$$
$$y = b\sin(\omega t);$$



8. ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ





Знак «+» в выражении для y соответствует движению против часовой стрелки, знак «-» – движению по часовой стрелке.

Если $\Delta\varphi = \pm\pi/2,\ a = b = r,$ то уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

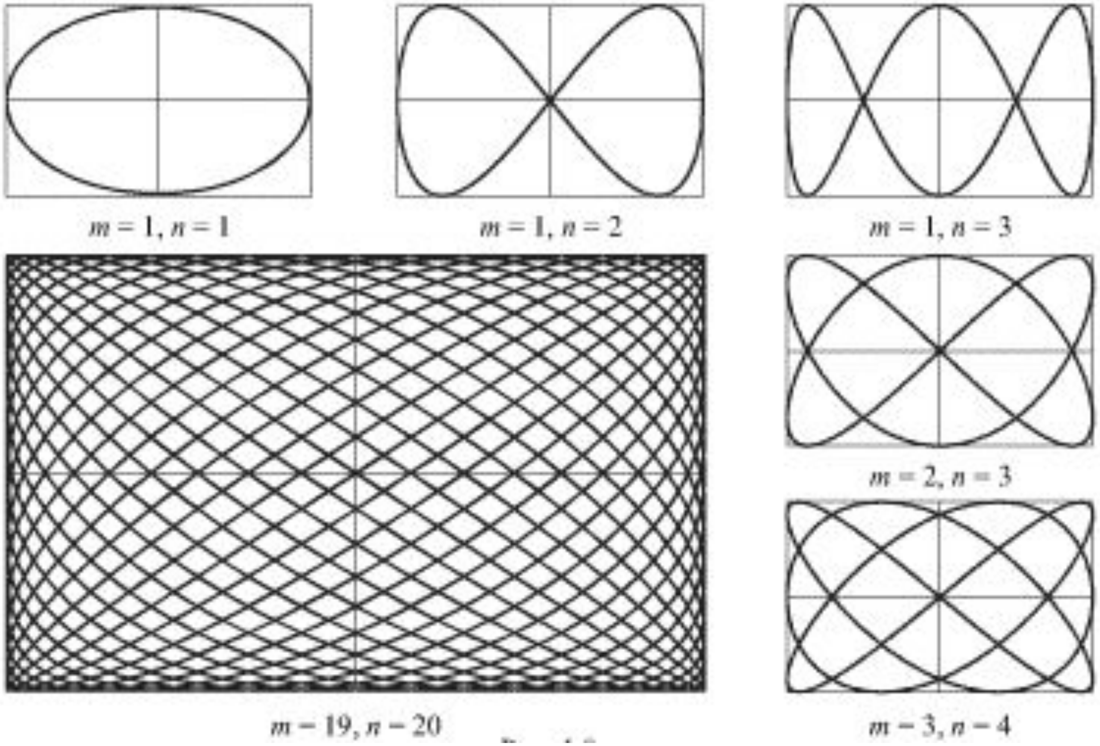
принимает вид $\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1.$

При равенстве амплитуд эллипс вырождается в окружность.

Это означает что равномерное движение по окружности радиуса r с угловой скоростью ω может быть представлена как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний

$$x = r\cos(\omega t);\ \ y = \pm r\sin(\omega t).$$

9. ФИГУРЫ ЛИССАЖУ



Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний неодинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых фигурами Лиссажу.

Наиболее простой вид имеют фигуры Лиссажу для случая, если отношение частот – это простая рациональная дробь.

Пусть, частоту колебаний вдоль оси x можно представить в виде $\omega_x = m\omega$, а вдоль оси y – $\omega_y = n\omega$, где m и n – натуральные числа. За то время, пока вдоль оси x точка успевает переместится из одного крайнего положения в другое m раз, вдоль оси y она совершит n таких перемещений.

Чем ближе к единице рациональная дробь, выражающая отношение частот колебаний, тем сложнее оказывается фигура Лиссажу.