Лекция № 13

Постановка задачи фильтрации

Задача фильтрации:

$$\hat{x}(t) = \hat{S}(t) + \hat{n}(t) \tag{1.1}$$

Желаемый выход фильтра:

$$\hat{y}_0(t) = \hat{S}(t + \Delta), \Delta \geq 0 \tag{1.2}$$

Выходной сигнал реального фильтра:

$$\hat{y}(t) = \hat{S}_p(t + \Delta) \tag{1.3}$$

Характеристики фильтра

$$M\left[\hat{\varepsilon}^2(t)\right] = M\left[\left(\hat{S}(t + \Delta) - \hat{S}_p(t + \Delta)\right)^2\right] \tag{1.4}$$

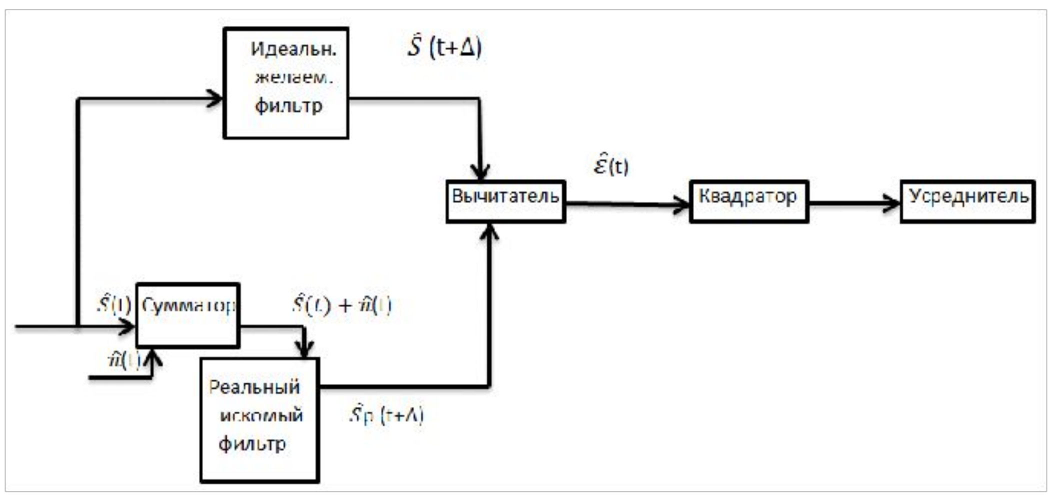

Рис. 1.1 – Схема фильтра с минимальной среднеквадратической погрешностью

Выходной сигнал реального фильтра:

$$S_p(t+\Delta) = \int_0^\infty h(\tau)\left[S(t-\tau) + n(t-\tau)\right]d\tau \qquad (1.5)$$

Среднее значение квадрата ошибки фильтрации:

$$\varepsilon^2(t) = \left[S(t+\Delta) - S_p(t+\Delta)\right]^2 = S^2(t+\Delta) - 2S(t+\Delta)\times$$

$$\times\int_0^\infty h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau + \int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau)\,h(\gamma)\,x(t-\tau)\,x(t-\gamma)\,d\tau\,d\gamma \qquad (1.6)$$

Усредняя левую и правую части:

$$M\left[\varepsilon^2(t)\right] = M\left[S^2(t+\Delta)\right] - 2\int_0^\infty h(\tau)\,M\left[x(t-\tau)S(t+\Delta)\right]d\tau +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau)\,h(\gamma)\,M\left[x(t-\tau)\,x(t-\gamma)\right]d\tau\,d\gamma \qquad (1.7)$$

Поскольку сигнал и шум стационарны

$$M\left[\varepsilon^2(t)\right] = M\left[\varepsilon^2(t+\Delta)\right] = M\left[\varepsilon^2\right] = \sigma_S^2 \qquad (1.8)$$

$$M\left[x(t-\tau)S(t+\Delta)\right] = B_{xS}(\tau+\Delta) \qquad (1.9)$$

$$M\left[x(t-\tau)\,x(t-\gamma)\right] = B_x(\tau-\gamma) \qquad (1.10)$$

Среднее значение квадрата ошибки фильтрации:

$$M\left[\varepsilon^2\right] = \sigma_S^2 - 2\int_0^\infty h(\tau)\,B_{xS}(\tau+\Delta)\,d\tau +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau)\,h(\gamma)\,B_x(\tau-\gamma)\,d\tau\,d\gamma \qquad (1.11)$$

Среднеквадратическая ошибка фильтра с импульсной характеристикой:

$$M\left[\varepsilon_1^2\right] = \sigma_s^2 - 2\int_0^\infty \left[h_{опт}(\tau) + \alpha q(\tau)\right] B_{xs}(\tau + \Delta)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \left[h_{опт}(\tau) + \alpha q(\tau)\right]\left[h_{опт}(\gamma) + \alpha q(\gamma)\right] B_x(\tau - \gamma)\, d\tau\, d\gamma \qquad (1.12)$$

Минимальна среднеквадратическая ошибка:

$$Q = \int_0^\infty q(\tau) B_{xs}(\tau + \Delta)\, d\tau - \int_0^\infty \int_0^\infty h_{опт}(\tau)\, q(\gamma) B_x(\tau - \gamma)\, d\tau\, d\gamma \qquad (1.13)$$

$$L = \int_0^\infty \int_0^\infty q(\tau)\, q(\gamma) B_x(\tau - \gamma)\, d\tau\, d\gamma \qquad (1.14)$$

Формулу (1.12) можно переписать так:

$$M\left[\varepsilon_1^2\right] = M\left[\varepsilon^2\right] - 2\alpha Q + \alpha^2 L \qquad (1.15)$$

Условие минимума $M\left[\varepsilon_1^2\right]$ имеет вид:

$$\frac{\partial M\left[\varepsilon_1^2\right]}{\partial \alpha} = -2Q + 2L\alpha = 0 \qquad (1.16)$$

Следовательно,

$$Q = \int_0^\infty q(\tau) B_{xs}(\tau + \Delta)\, d\tau - \int_0^\infty \int_0^\infty h_{опт}(\gamma)\, q(\tau) B_x(\tau - \gamma)\, d\tau\, d\gamma =$$

$$= \int_0^\infty q(\tau)\left[\int_0^\infty h_{опт}(\gamma) B_x(\tau - \gamma)\, d\gamma - B_{xs}(\tau + \Delta)\right] d\tau = 0 \qquad (1.17)$$

Имея в виду, что (1.17) должно выполняться при любой функции $q(\tau)$ можно записать следующее условие:

$$\int_0^\infty h_{опт}(\gamma) B_x(\tau - \gamma)\, d\gamma - B_{xs}(\tau + \Delta) = 0 \qquad (1.18)$$

$$B_{xs}(\tau + \Delta) = \int_0^\infty h_{опт}(\gamma) B_x(\tau - \gamma)\, d\gamma \qquad (1.19)$$

Физически реализуемый реальный фильтр:

$$h_{\text{опт}}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0 \tag{1.20}$$

Решение уравнения (1.21):

$$h_{\text{опт}}(\tau)_{\text{н}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{s}(\omega)}{S_{s}(\omega)+S_{n}(\omega)} e^{j\omega(\tau+\Delta)}\, d\omega \tag{1.21}$$

Частотная характеристика фильтра:

$$K_{\text{опт}}(j\omega)_{\text{н}} = \frac{S_{s}(\omega)}{S_{s}(\omega)+S_{n}(\omega)} \tag{1.22}$$

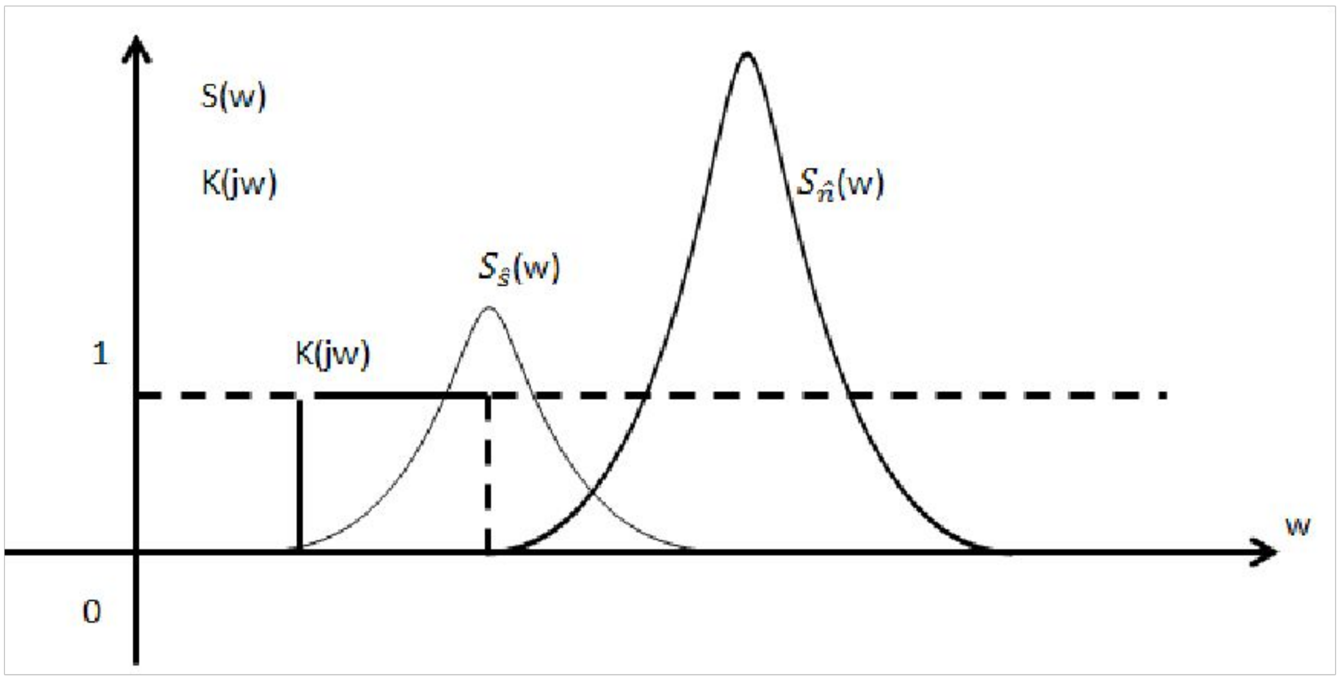

Рис. 1.2 – Характеристики оптимального фильтра

Если на импульсную характеристику фильтра $h(t)$ наложено условие физической осуществимости, то она находится из уравнения:

$$h_{опт}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{опт}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \qquad (1.23)$$

Где::

$$K_{опт}(j\omega) = \frac{1}{\Psi_{ф}(j\omega)} \int_{0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_{с}(j\omega)}{\Psi_{ф}^{*}(j\omega)} e^{j\omega(t+\Delta)} d\omega\right] e^{-j\omega t} dt \qquad (1.24))$$

Можно несколько упростить выражение:

$$K_{опт}(j\omega) = \frac{1}{\Psi_{ф}(j\omega)} \left[\frac{\Phi_{с}(j\omega)}{\Psi_{ф}^{*}(j\omega)}\right]_{+} \qquad (1.25)$$