Лекция № 13

Постановка задачи фильтрации

Задача фильтрации:

$$\hat{x}(t) = \hat{S}(t) + \hat{n}(t) \tag{1.1}$$

Желаемый выход фильтра:

$$\hat{y}_0(t) = \hat{S}(t+\Delta),\ \Delta \geq 0 \tag{1.2}$$

Выходной сигнал реального фильтра:

$$\hat{y}(t) = \hat{S}_p(t+\Delta) \tag{1.3}$$

Характеристики фильтра

$$M\{\hat{\varepsilon}^2(t)\} = M\{[\hat{S}(t+\Delta) - \hat{S}_p(t+\Delta)]^2\} \tag{1.4}$$

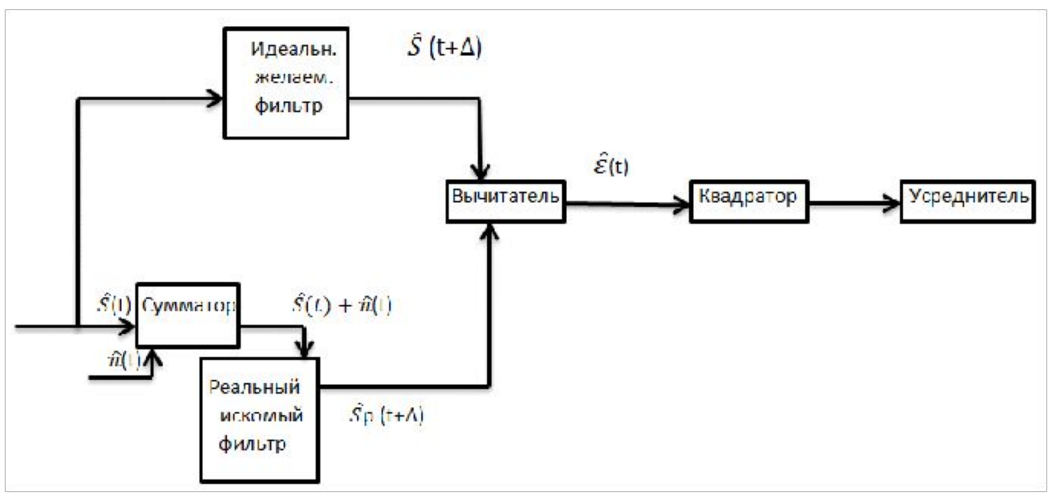

Рис. 1.1 – Схема фильтра с минимальной среднеквадратической погрешностью

Выходной сигнал реального фильтра:

$$S_{\text{ф}}(t+\Delta) = \int_0^\infty h(\tau)\,[S(t-\tau) + n(t-\tau)]\,d\tau \qquad (1.5)$$

Среднее значение квадрата ошибки фильтрации:

$$\varepsilon^2(t) = [S(t+\Delta) - S_{\text{ф}}(t+\Delta)]^2 = S^2(t+\Delta) - 2S(t+\Delta)\times$$

$$\times\int_0^\infty h(\tau)\,X(t-\tau)\,d\tau + \int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau)\,h(\gamma)\,X(t-\tau)\,X(t-\gamma)\,d\tau\,d\gamma \qquad (1.6)$$

Усредняя левую и правую части:

$$M[\varepsilon^2(t)] = M[S^2(t+\Delta)] - 2\int_0^\infty h(\tau)\,M[X(t-\tau)S(t+\Delta)]\,d\tau +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau)\,h(\gamma)\,M[X(t-\tau)\,X(t-\gamma)]\,d\tau\,d\gamma \qquad (1.7)$$

Поскольку сигнал и шум стационарны

$$M[\varepsilon^2(t)] = M[\varepsilon^2(t+\Delta)] = M[\varepsilon^2] = \sigma_S^2 \qquad (1.8)$$

$$M[X(t-\tau)S(t+\Delta)] = B_{XS}(\tau+\Delta) \qquad (1.9)$$

$$M[X(t-\tau)\,X(t-\gamma)] = B_X(\tau-\gamma) \qquad (1.10)$$

Среднее значение квадрата ошибки фильтрации:

$$M[\varepsilon^2] = \sigma_S^2 - 2\int_0^\infty h(\tau)\,B_{XS}(\tau+\Delta)\,d\tau +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau)\,h(\gamma)\,B_X(\tau-\gamma)\,d\tau\,d\gamma \qquad (1.11)$$

Среднеквадратическая ошибка фильтра с импульсной характеристикой:

$$M\left[\varepsilon_1^2\right] = \sigma_S^2 - 2\int_0^{\infty}\left[h_{опт}(\tau) + \eta q(\tau)\right] B_{XS}(\tau + \Delta)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[h_{опт}(\tau) + \eta q(\tau)\right]\left[h_{опт}(\gamma) + \eta q(\gamma)\right] B_X(\tau - \gamma)\, d\tau\, d\gamma \qquad (1.12)$$

Минимальна среднеквадратическая ошибка:

$$Q = \int_0^{\infty} q(\tau) B_{XS}(\tau + \Delta)\, d\tau - \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h_{опт}(\tau)\, q(\gamma) B_X(\tau - \gamma)\, d\tau\, d\gamma \qquad (1.13)$$

$$L = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} q(\tau)\, q(\gamma) B_X(\tau - \gamma)\, d\tau\, d\gamma \qquad (1.14)$$

Формулу (1.12) можно переписать так:

$$M\left[\varepsilon_1^2\right] = M\left[\varepsilon^2\right] - 2\eta Q + \eta^2 L \qquad (1.15)$$

Условие минимума $M\left[\varepsilon_1^2\right]$ имеет вид:

$$\frac{\partial M\left[\varepsilon_1^2\right]}{\partial \eta} = -2Q + 2L\eta = 0 \qquad (1.16)$$

Следовательно,

$$Q = \int_0^{\infty} q(\tau) B_{XS}(\tau + \Delta)\, d\tau - \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h_{опт}(\gamma)\, q(\tau) B_X(\tau - \gamma)\, d\tau\, d\gamma =$$

$$= \int_0^{\infty} q(\tau)\left[\int_0^{\infty} h_{опт}(\gamma) B_X(\tau - \gamma)\, d\gamma - B_{XS}(\tau + \Delta)\right] d\tau = 0 \qquad (1.17)$$

Имея в виду, что (1.17) должно выполняться при любой функции $q(\tau)$ можно записать следующее условие:

$$\int_0^{\infty} h_{опт}(\gamma) B_X(\tau - \gamma)\, d\gamma - B_{XS}(\tau + \Delta) = 0 \qquad (1.18)$$

$$B_{XS}(\tau + \Delta) = \int_0^{\infty} h_{опт}(\gamma) B_X(\tau - \gamma)\, d\gamma \qquad (1.19)$$

Физически реализуемый реальный фильтр:

$$h_{опт}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0 \tag{1.20}$$

Решение уравнения (1.21):

$$h_{опт}(\tau)_н = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{\hat{s}}(\omega)}{S_{\hat{s}}(\omega)+S_{\hat{n}}(\omega)} e^{j\omega(\tau+\Delta)}\, d\omega \tag{1.21}$$

Частотная характеристика фильтра:

$$K_{опт}(j\omega)_н = \frac{S_{\hat{s}}(\omega)}{S_{\hat{s}}(\omega)+S_{\hat{n}}(\omega)} \tag{1.22}$$

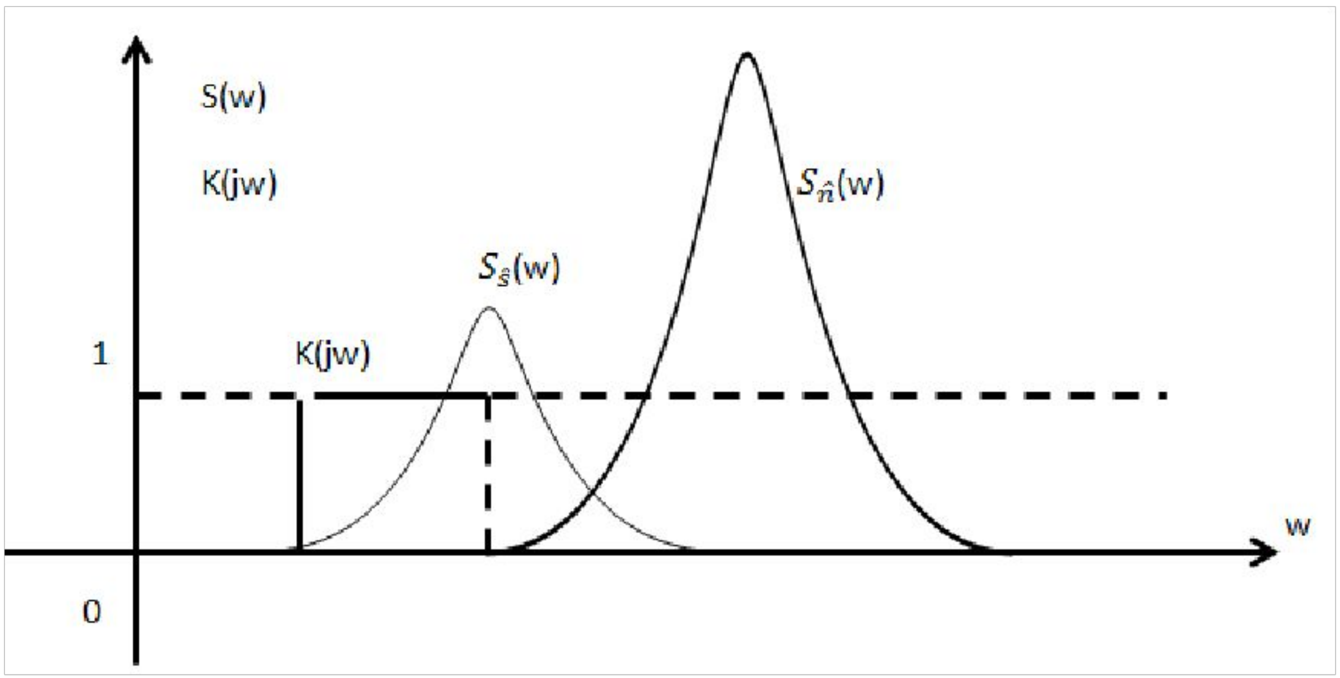

Рис. 1.2 – Характеристики оптимального фильтра

Если на импульсную характеристику фильтра $h\square t\square$ наложено условие физической осуществимости, то она находится из уравнения:

$$h_{опт}(\square\square)_{\square\square}=\frac{1}{2\square\square}\square_{-\infty}^{+\infty}\square\square_{опт}\square\square\square\square\square_{\square\square}\square\square^{\square\square\square\square}d\square\square \tag{1.23}$$

Где::

$$\square\square_{опт}\square\square\square\square\square_{\square\square}=\frac{1}{\square\square_{\Phi}\square\square\square\square}\square_{0}^{\infty}\square\frac{1}{2\square\square}\square_{-\infty}^{+\infty}\frac{\square\square\square\square\square}{\square\square^{*}_{\Phi}\square\square\square\square}\square\square^{\square\square\square\square+\Delta\square}\square\square\square\square\square\square^{-\square\square\square\square}dt \tag{1.24)}$$

Можно несколько упростить выражение:

$$\square\square_{опт}\square\square\square\square\square_{\square\square}=\frac{1}{\square\square_{\Phi}\square\square\square\square}\square\frac{\square\square\square\square\square}{\square\square^{*}_{\Phi}\square\square\square\square}\square_{+} \tag{1.25}$$