

# Лекция № 13

## Постановка задачи фильтрации

Задача фильтрации:

$$\hat{x}(t) = \hat{s}(t) + \hat{n}(t) \quad (1.1)$$

Желаемый выход фильтра:

$$\hat{y}_0(t) = \hat{s}(t + \Delta), \Delta \geq 0 \quad (1.2)$$

Выходной сигнал реального фильтра:

$$\hat{y}_p(t) = \hat{s}_p(t + \Delta) \quad (1.3)$$

Характеристики фильтра

$$M \int_0^T \hat{\varepsilon}^2(t) dt = M \int_0^T [\hat{s}(t + \Delta) - \hat{s}_p(t + \Delta)]^2 dt \quad (1.4)$$

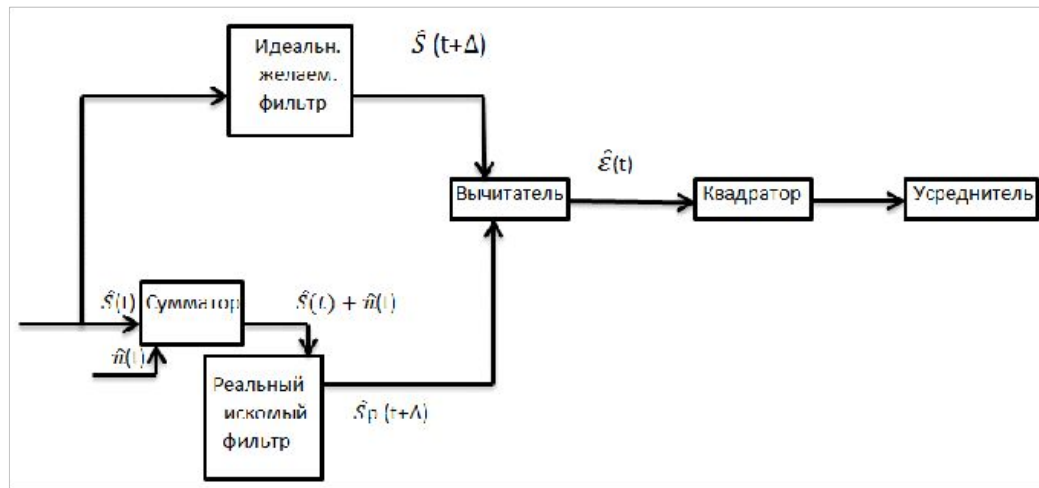


Рис. 1.1 – Схема фильтра с минимальной среднеквадратической погрешностью

Выходной сигнал реального фильтра:

$$S_p(t + \Delta) = \int_0^{\infty} h(\tau) [S(t - \tau) + n(t - \tau)] d\tau \quad (1.5)$$

Среднее значение квадрата ошибки фильтрации:

$$\begin{aligned} E^2(t) = & \int_0^{\infty} S(t + \Delta) - S_p(t + \Delta) \int_0^{\infty} S(t + \Delta) - S_p(t + \Delta) \times \\ & \times \int_0^{\infty} h(\tau) \delta(t - \tau) d\tau + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau) h(\gamma) \delta(t - \tau) \delta(t - \gamma) d\tau d\gamma \end{aligned} \quad (1.6)$$

Усредняя левую и правую части:

$$\begin{aligned} M[E^2(t)] = & M \left[ \int_0^{\infty} S(t + \Delta) - S_p(t + \Delta) \int_0^{\infty} h(\tau) M[\delta(t - \tau)] S(t + \Delta) d\tau + \right. \\ & \left. + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau) h(\gamma) M[\delta(t - \tau) \delta(t - \gamma)] d\tau d\gamma \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

Поскольку сигнал и шум стационарны

$$M[E^2(t)] = M[E^2(t + \Delta)] = M[E^2] = \sigma_S^2 \quad (1.8)$$

$$M[\delta(t - \tau) S(t + \Delta)] = B_{\delta S}(\Delta) \quad (1.9)$$

$$M[\delta(t - \tau) \delta(t - \gamma)] = B_{\delta}(\tau - \gamma) \quad (1.10)$$

Среднее значение квадрата ошибки фильтрации:

$$\begin{aligned} M[E^2] = & \sigma_S^2 - 2 \int_0^{\infty} h(\tau) B_{\delta S}(\Delta) d\tau + \\ & + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau) h(\gamma) B_{\delta}(\tau - \gamma) d\tau d\gamma \end{aligned} \quad (1.11)$$

Среднеквадратическая ошибка фильтра с импульсной характеристикой:

$$M\{\epsilon_f^2\} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_{\text{опт}}(\tau) h_{\text{опт}}(\gamma) B_{\text{вх}}(\tau + \gamma) d\tau d\gamma + \int_0^{\infty} h_{\text{опт}}(\tau) B_{\text{вх}}(\tau + \Delta) d\tau + \int_0^{\infty} h_{\text{опт}}(\gamma) B_{\text{вх}}(\gamma - \Delta) d\gamma \quad (1.12)$$

Минимальна среднеквадратическая ошибка:

$$Q = \int_0^{\infty} h_{\text{опт}}(\tau) B_{\text{вх}}(\tau + \Delta) d\tau - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_{\text{опт}}(\tau) h_{\text{опт}}(\gamma) B_{\text{вх}}(\tau + \gamma) d\tau d\gamma \quad (1.13)$$

$$L = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_{\text{опт}}(\tau) h_{\text{опт}}(\gamma) B_{\text{вх}}(\tau + \gamma) d\tau d\gamma \quad (1.14)$$

Формулу (1.12) можно переписать так:

$$M\{\epsilon_f^2\} = M\{\epsilon^2\} - 2Q + L \quad (1.15)$$

Условие минимума  $M\{\epsilon_f^2\}$  имеет вид:

$$\frac{\partial M\{\epsilon_f^2\}}{\partial h_{\text{опт}}} = -2Q + 2L = 0 \quad (1.16)$$

Следовательно,

$$Q = \int_0^{\infty} h_{\text{опт}}(\tau) B_{\text{вх}}(\tau + \Delta) d\tau - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_{\text{опт}}(\tau) h_{\text{опт}}(\gamma) B_{\text{вх}}(\tau + \gamma) d\tau d\gamma = \int_0^{\infty} h_{\text{опт}}(\tau) B_{\text{вх}}(\tau + \Delta) d\tau - \int_0^{\infty} h_{\text{опт}}(\gamma) B_{\text{вх}}(\gamma - \Delta) d\gamma = 0 \quad (1.17)$$

Имея в виду, что (1.17) должно выполняться при любой функции  $h_{\text{опт}}(\tau)$  можно записать следующее условие:

$$\int_0^{\infty} h_{\text{опт}}(\gamma) B_{\text{вх}}(\gamma - \Delta) d\gamma - B_{\text{вх}}(\tau + \Delta) = 0 \quad (1.18)$$

$$B_{\text{вх}}(\tau + \Delta) = \int_0^{\infty} h_{\text{опт}}(\gamma) B_{\text{вх}}(\gamma - \Delta) d\gamma \quad (1.19)$$

Физически реализуемый реальный фильтр:

$$h_{\text{опт}}(t) = 0 \quad \text{при } t < 0 \quad (1.20)$$

Решение уравнения (1.21):

$$h_{\text{опт}}(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_d(\omega)}{S_d(\omega) + S_n(\omega)} d\omega \quad (1.21)$$

Частотная характеристика фильтра:

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{S_d(\omega)}{S_d(\omega) + S_n(\omega)} \quad (1.22)$$

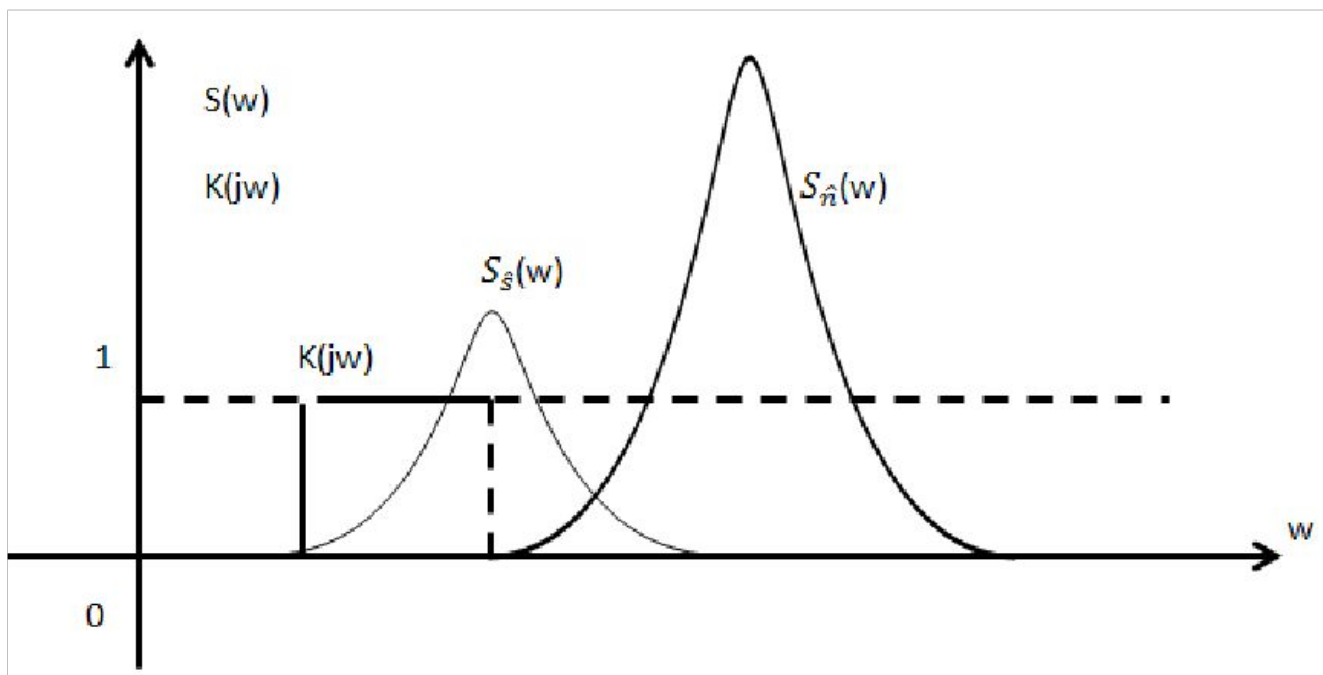


Рис. 1.2 – Характеристики оптимального фильтра

Если на импульсную характеристику фильтра  $h(t)$  наложено условие физической осуществимости, то она находится из уравнения:

$$h_{\text{опт}}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{\text{опт}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (1.23)$$

Где:

$$h_{\text{опт}}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{\text{опт}}(\omega)}{j\omega} e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.24)$$

Можно несколько упростить выражение:

$$h_{\text{опт}}(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{H_{\text{опт}}(\omega)}{j\omega} + \frac{H_{\text{опт}}^*(\omega)}{j\omega} \right] \quad (1.25)$$