

Физика

Колебания и волны

(продолжение)

5.5. Свободные колебания

Колебания называются свободными (или собственными), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при отсутствии внешних воздействий.

При наличии сил трения или сопротивления среды свободные механические колебания становятся затухающими.

Затухание колебаний объясняется возникновением силы трения (сопротивления).

Величина силы трения пропорциональна скорости движения тела:

$$F_{тр} = -k_{тр} \cdot v = -k_{тр} \cdot \frac{dx}{dt};$$

$k_{тр}$ – коэффициент трения.

Согласно закону Ньютона сумма сил, которая заставляет колебаться тело, определяется произведением массы тела на ускорение:

$$F = ma = -k_{\text{упр}}x - k_{\text{тр}} \frac{dx}{dt}.$$

На основании записанного равенства можно записать уравнение динамики свободных колебаний тела:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_{\text{упр}}x - k_{\text{тр}} \frac{dx}{dt}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_{\text{тр}}}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k_{\text{упр}}}{m} x = 0.$$

Дифференциальное уравнение свободно колеблющегося тела, которое называют уравнением осциллятора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

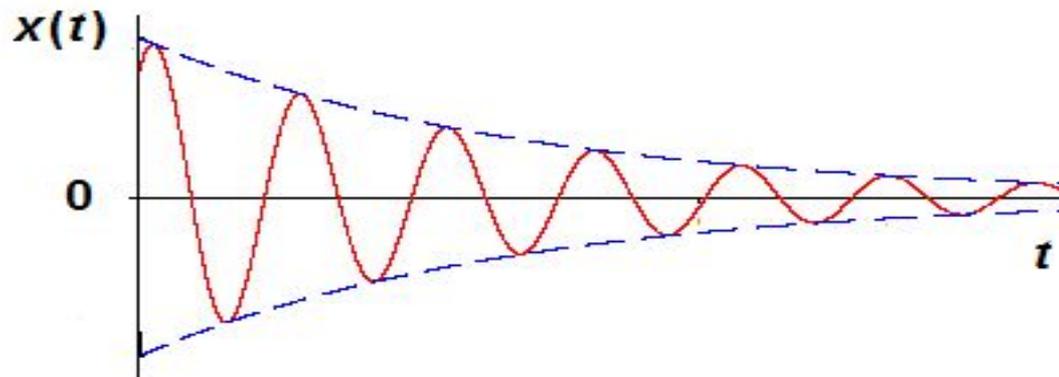
$$\beta = \frac{k_{\text{тр}}}{2m} \quad \text{- коэффициент затухания,}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{\text{упр}}}{m}} \quad \text{- собственная частота.}$$

Решение дифференциального уравнения можно записать в виде гармонического колебания, амплитуда которого затухает по закону экспоненты:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

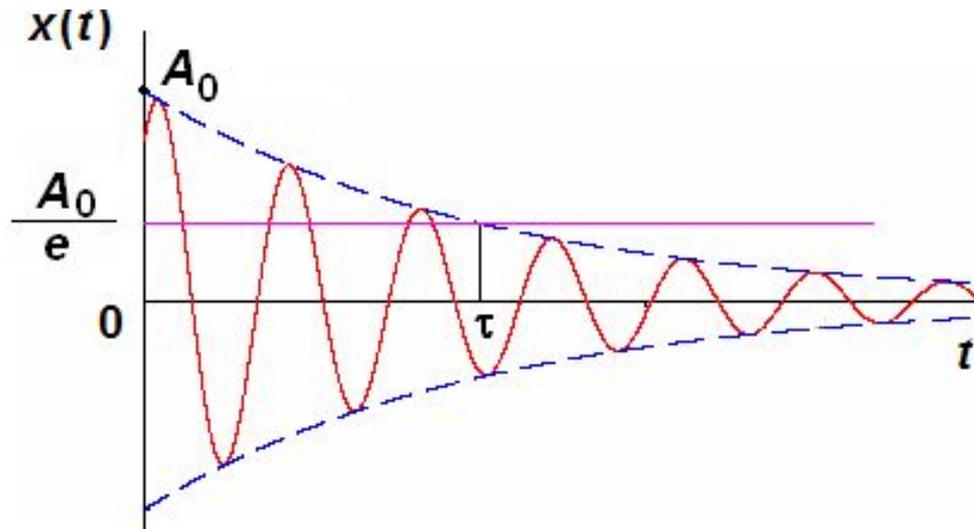
График затухающих колебаний:



Параметры затухающих колебаний

1. Частота затухающих колебаний: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

2. Время релаксации (постоянная затухания):



$$\frac{A_0}{e} = \frac{A_0}{2,7}$$

Время релаксации – это интервал времени, в течении которого амплитуда колебаний уменьшается в $e \approx 2,7$ раз.

3. Амплитуда колебаний:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}$$

4. Декремент затухания:

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t + T)} = e^{\beta T}$$

5. Логарифмический декремент затухания:

$$\ln \Delta = \beta T$$

6. Добротность:

$$Q \approx \frac{\pi}{\ln \Delta}$$

Добротность определяет характер затухания колебаний.

Чем медленнее происходит затухание свободных колебаний, тем выше добротность Q колебательной системы.

Добротность характеризует расход энергии колебательной системы на интервале времени, равном одному периоду колебаний.

Добротность равна отношению энергии, запасенной в колебательной системе, к потере энергии за один период колебаний.

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}.$$

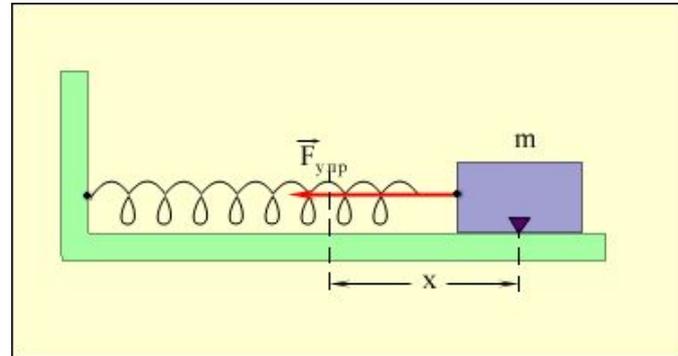
Начальные условия колебаний

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha).$$

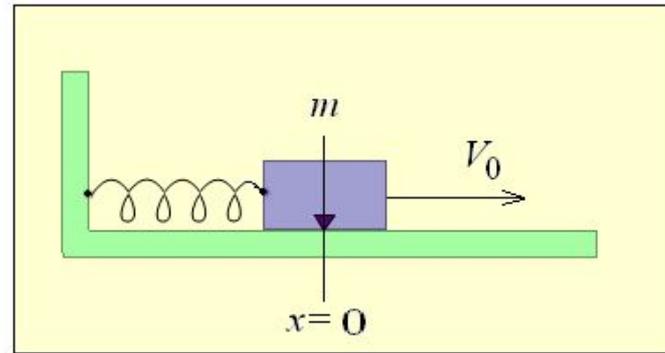
Амплитуда и начальная фаза колебаний определяются из начальных условий.

Два случая начальных условий:

1. $x_0 = A, \quad \alpha = 0.$



2. $x_0 = 0, \quad v = v_0.$



Если же грузу, находившемуся в положении равновесия, с помощью резкого толчка была сообщена начальная скорость $\pm V_0$, то

Из выражения $x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$

$$\text{при } t = 0 \quad 0 = A \cos(\alpha); \quad \alpha = \mp \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = A\omega \cos\left(\omega t \mp \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{При } t = 0 \quad v_0 = A\omega \cos\left(\mp \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right).$$

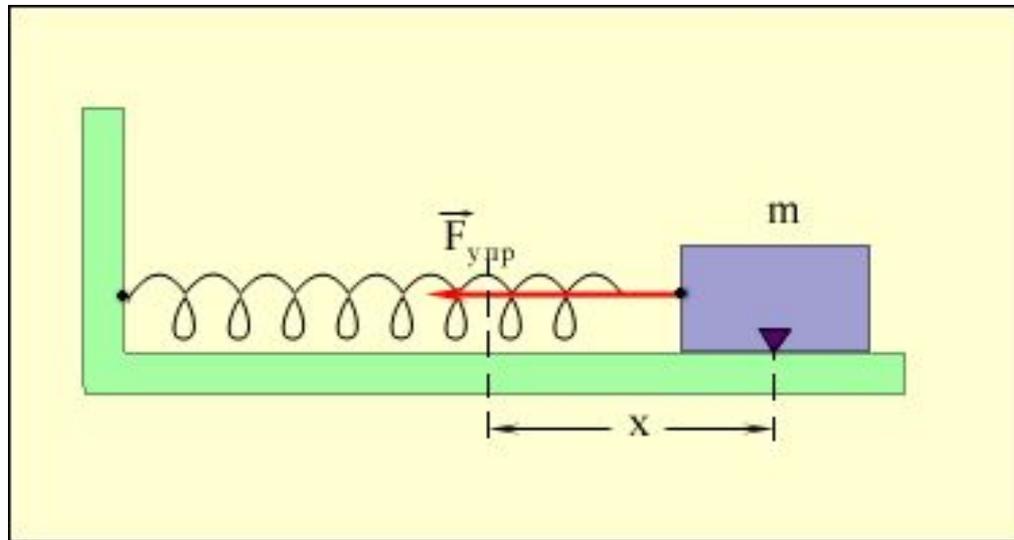
$$\text{Отсюда:} \quad A = \frac{v_0}{\omega}.$$

Вывод: амплитуда A свободных колебаний и его начальная фаза α определяются начальными условиями.

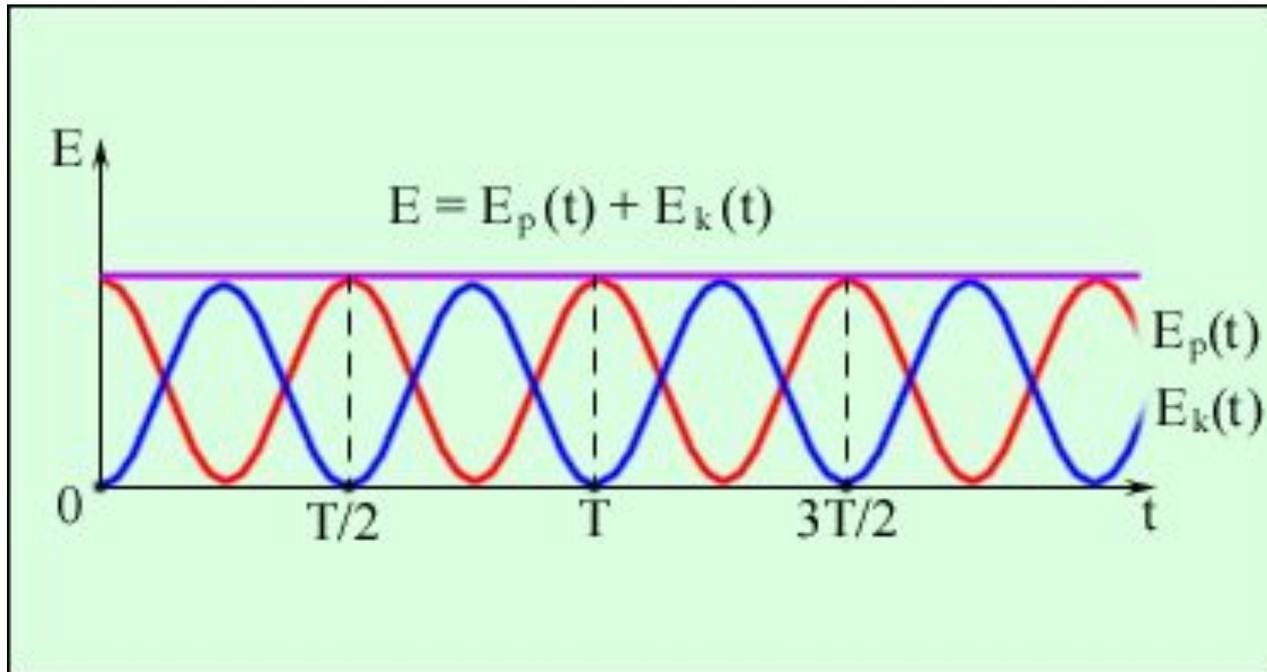
Превращения энергии при свободных механических колебаниях

При гармонических колебаниях происходит периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$



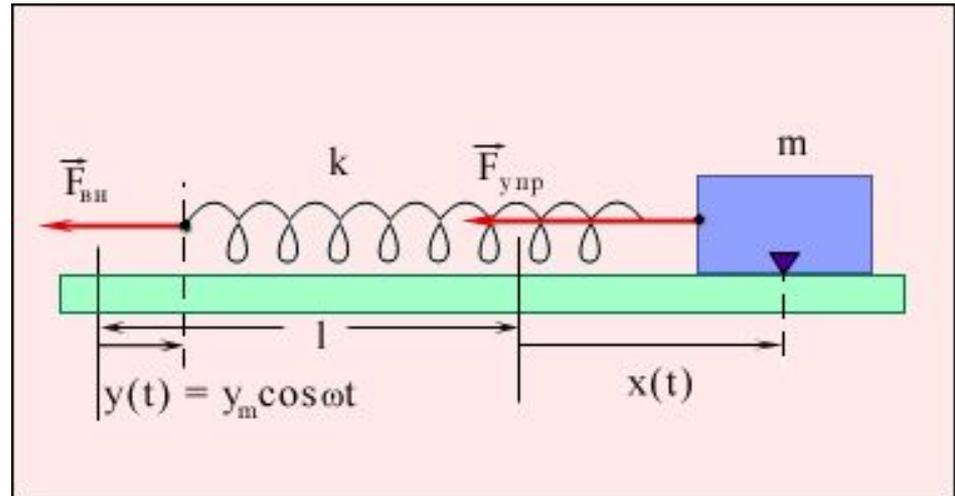
$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k(A\cos(\omega t))^2}{2} = \frac{kA^2}{4}(1 + \cos(2\omega t))$$



5.6. Вынужденные колебания

Вынужденными колебаниями называются такие, которые совершаются под воздействием внешней периодической силы.

Внешняя сила $F(t)$
приложена к свободному
концу пружины.



Величина силы изменяется по гармоническому закону. Свободный конец пружины перемещается в соответствии с выражением:

$$y(t) = y_m \cos(\omega t)$$

Общее перемещение груза:

$$l(t) \approx x(t) - y(t) = x(t) - y_m \cos(\omega t)$$

Второй закон Ньютона для такой системы: $ma = \sum F$.

Уравнение динамики колебательной системы:

$$ma = -k_{тр} \frac{dx}{dt} - k_{упр} \cdot l = -k_{тр} \frac{dx}{dt} - k_{упр} (x + y_m \cos(\omega t));$$

$k_{тр} \frac{dx}{dt}$ - сила трения, $k_{упр} x$ - сила упругости,

$k_{упр} y_m \cos(\omega t)$ - вынуждающая сила.

В окончательной форме уравнение *вынужденных колебаний* можно записать в виде:

$$\ddot{x} + 2\beta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_m}{m} \cos(\omega t)$$

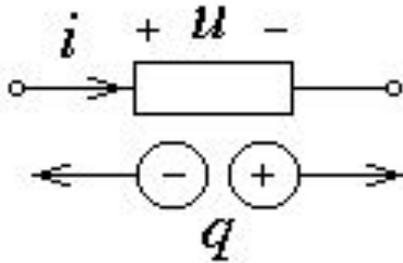
$$\beta = \frac{k_{тр}}{2m} \quad - \text{коэффициент затухания,}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{упр}}{m}} \quad - \text{собственная круговая частота свободных колебаний .}$$

5.7. Электромагнитные колебания в электрическом колебательном контуре.

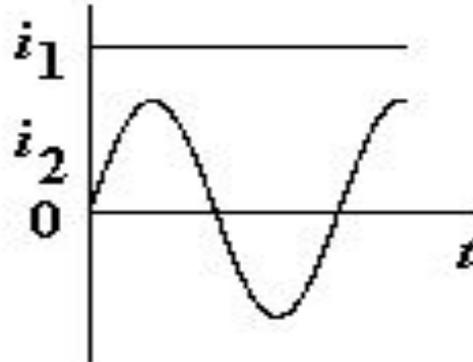
Электрический ток.

Электрическим током называется упорядоченное движение электрических зарядов.



$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad [\text{К/с}=\text{А}]$$

Виды электрического тока

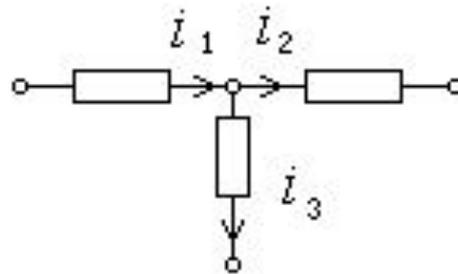


Закон токов Кирхгофа:

Алгебраическая сумма токов ветвей цепи, подключенных к узлу цепи равна нулю

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

. Узлом цепи называется такая точка в цепи, к которой подключены две или более ветвей



$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

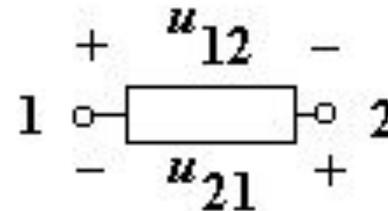
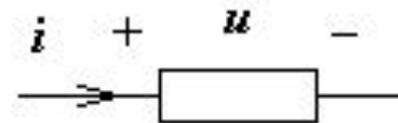
Электрическое напряжение.

Электрическим напряжением называется энергия, которую необходимо затратить на перемещение единицы заряда из одной точки в другую.

$$u = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{dw}{dq}.$$

Размерность напряжения:

$$[\text{Дж/Кл}=\text{В}]$$

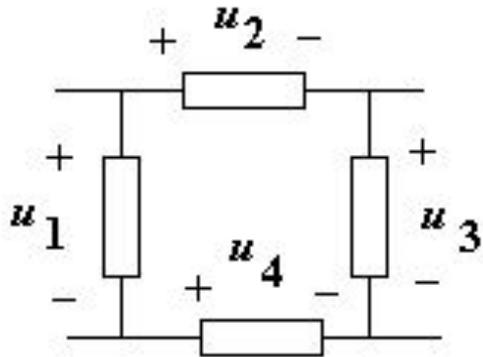


Закон напряжений Кирхгофа

Алгебраическая сумма напряжений ветвей цепи, входящих в контур, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0.$$

Контуром называется путь по ветвям цепи, который начинается и заканчивается в одном и том же узле.



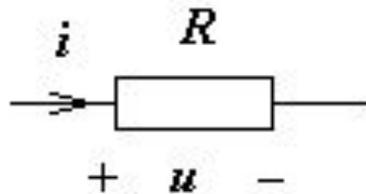
$$-u_1 + u_2 + u_3 - u_4 = 0.$$

Приемники электрической энергии.

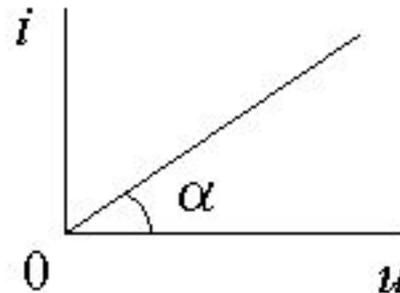
Приемниками называются устройства, потребляющие энергию или преобразующие электрическую энергию в другие виды энергии.

Резистор.

Резистором называется такой элемент цепи, в котором происходит необратимый процесс преобразования электрической энергии в тепловую энергию.



Вольт-амперная зависимость:

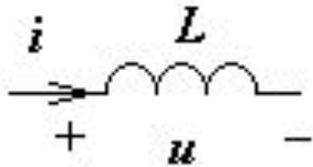


$$i = \frac{u}{R};$$

$$R = \frac{u}{i} \quad [A/B=Cm]$$

Катушка индуктивности.

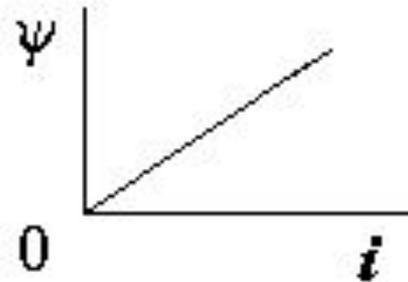
Катушкой индуктивности называется такой пассивный элемент цепи, в котором происходит процесс преобразования энергии электрического тока в энергию магнитного поля и наоборот.



Вебер-амперная зависимость:

$$\Psi = L \cdot i;$$

Ψ - потокосцепление.



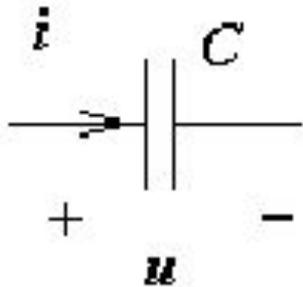
$$L = \frac{\Psi}{i} \quad [\text{Вб/А=Гн}]$$

Вольт-амперная зависимость:

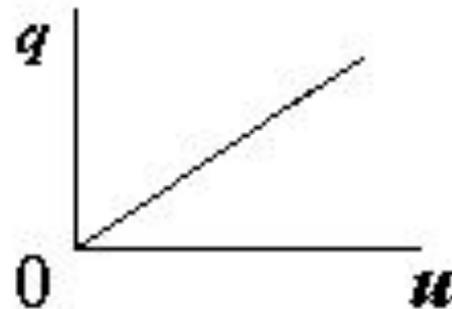
$$u = L \frac{di_L}{dt}.$$

Конденсатор.

Конденсатором называется такой пассивный элемент цепи, в котором происходит процесс преобразования энергии электрического тока в энергию электрического поля и наоборот.



Кулон-вольтная характеристика:



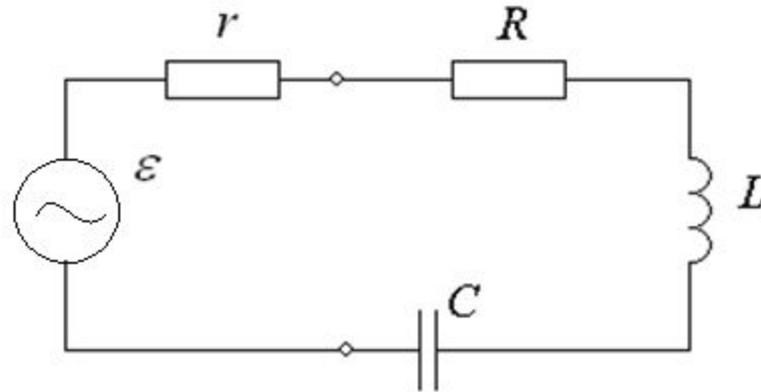
$$q = C \cdot u;$$

$$C = \frac{q}{u}; \quad [\text{Кл/В}=\text{Ф}]$$

Вольт-амперная зависимость:

$$i = C \frac{du_c}{dt}.$$

Вынужденные колебания в электрическом колебательном контуре.



Уравнение контура по закону Кирхгофа для напряжений:

$$-U + u_R + u_L + u_C = 0;$$

$$u_R + u_L + u_C = U.$$

$$u = iR; \quad u = L \frac{di}{dt}; \quad L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = U;$$

$$i = C \frac{du_c}{dt};$$

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U;$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{U}{LC}.$$

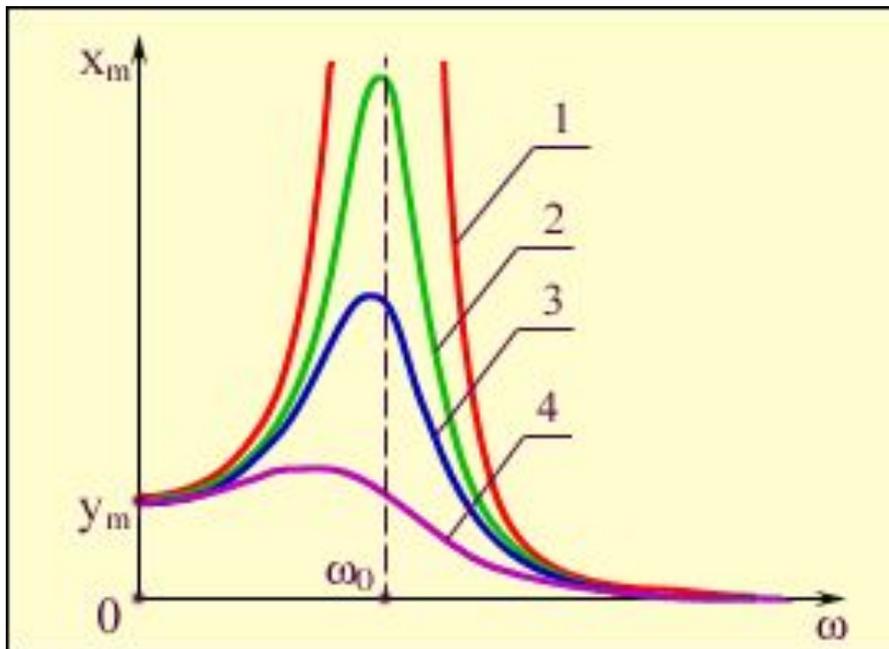
$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{U}{LC};$$

$$\beta = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\beta \frac{du_c}{dt} + \omega_0 u_c = \omega_0 U.$$

5.8. Явление резонанса

Резонансом называется явление резкого возрастания амплитуды колебаний при совпадении собственной частоты колебательной системы с частотой вынуждающей силы.

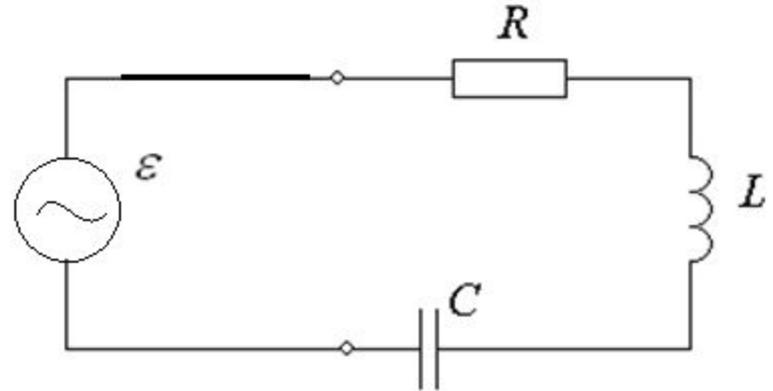


Зависимость амплитуды X_m вынужденных колебаний от частоты ω вынуждающей силы называется частотной характеристикой или резонансной кривой.

Резонансные явления в простых колебательных контурах

Резонанс в последовательном колебательном контуре

$$Z_{\text{вх}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} =$$



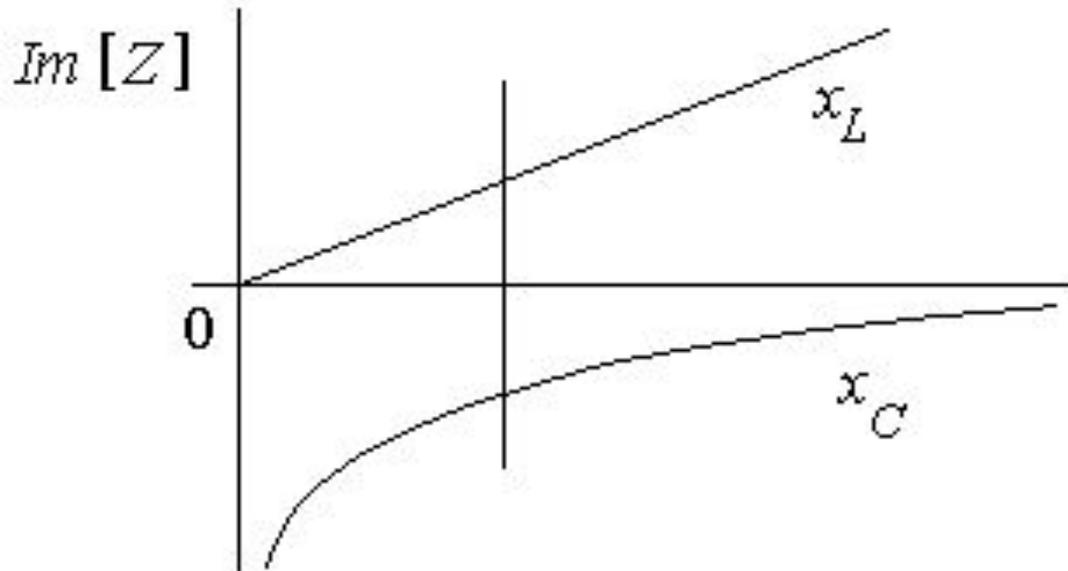
$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(x_L - x_C)$$

$$x_L - x_C = 0;$$

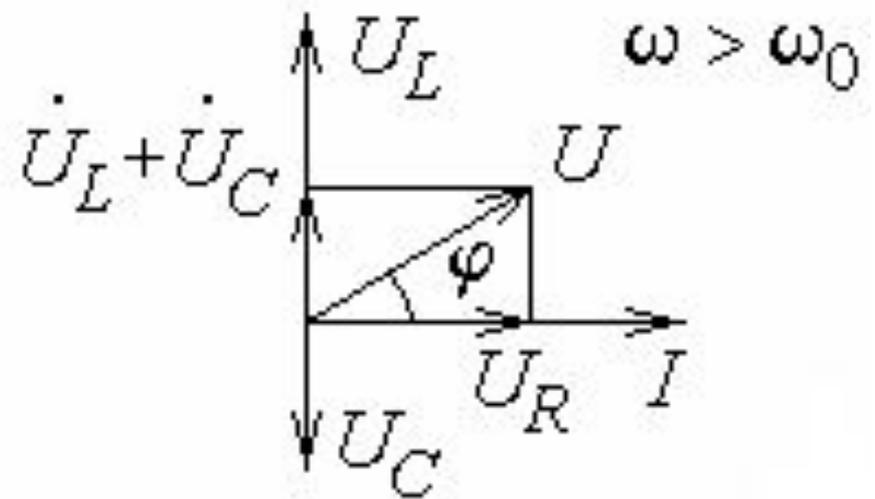
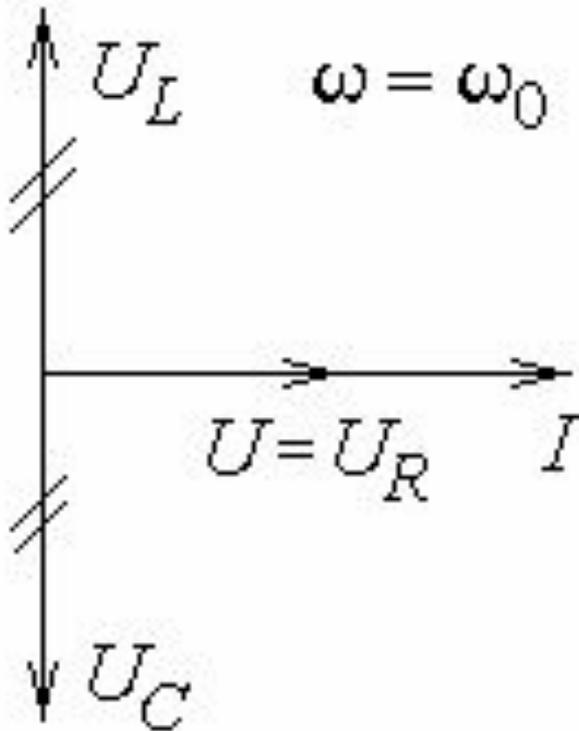
$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0;$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- резонансная частота контура

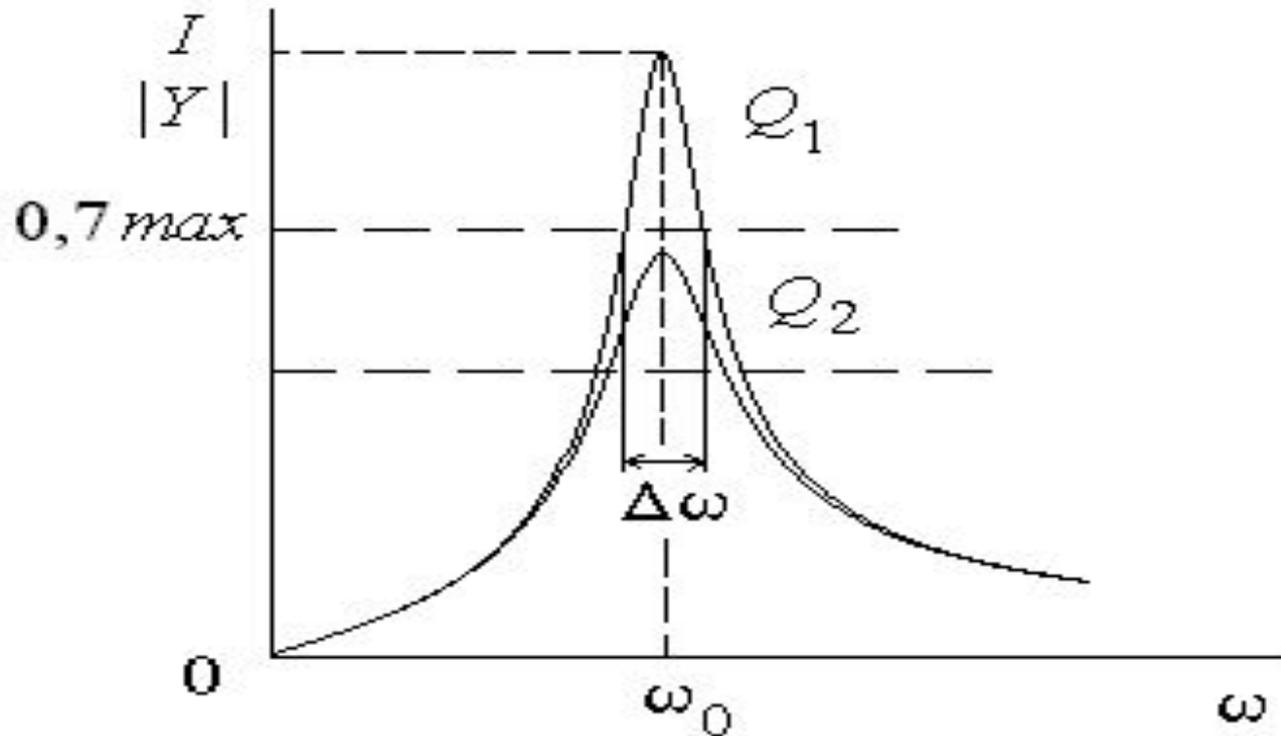


Векторные диаграммы



Свойства последовательного колебательного контура

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$



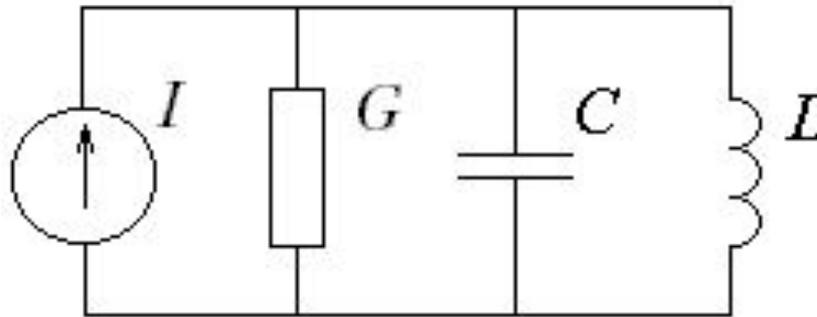
Ток в момент резонанса: $I = \frac{U}{R}$.

Волновое сопротивление: $\rho = \omega_0 L = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Добротность: $Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{I \cdot \omega_0 L}{I \cdot R} = \frac{\rho}{R}$.

Добротность по резонансной кривой: $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

Резонанс в параллельном колебательном контуре



$$Y_{вх} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} =$$

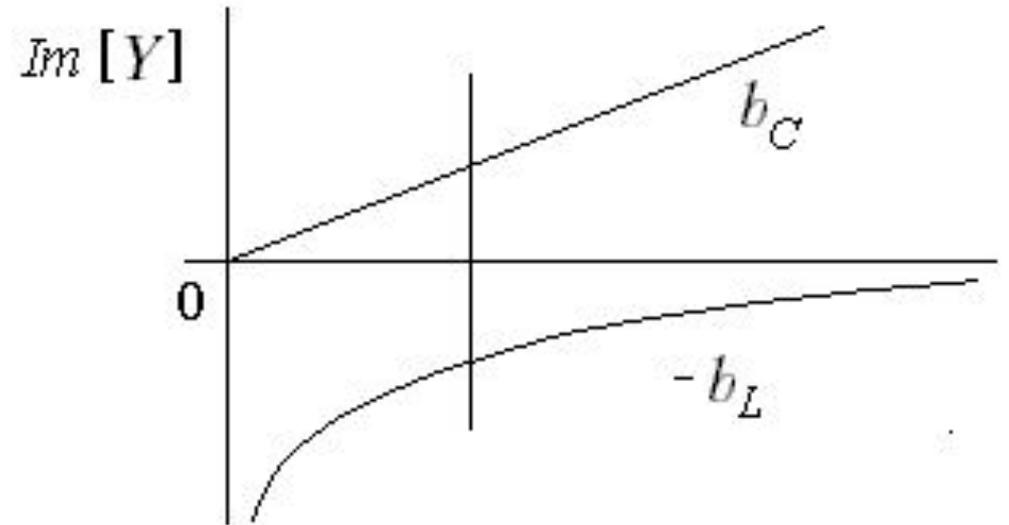
$$= G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + j(b_C - b_L)$$

$$b_C - b_L = 0;$$

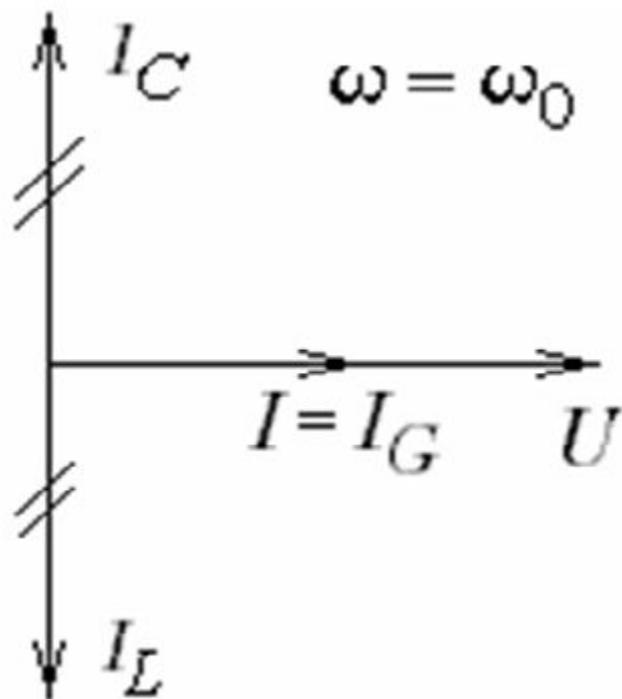
$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0;$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- резонансная частота контура.

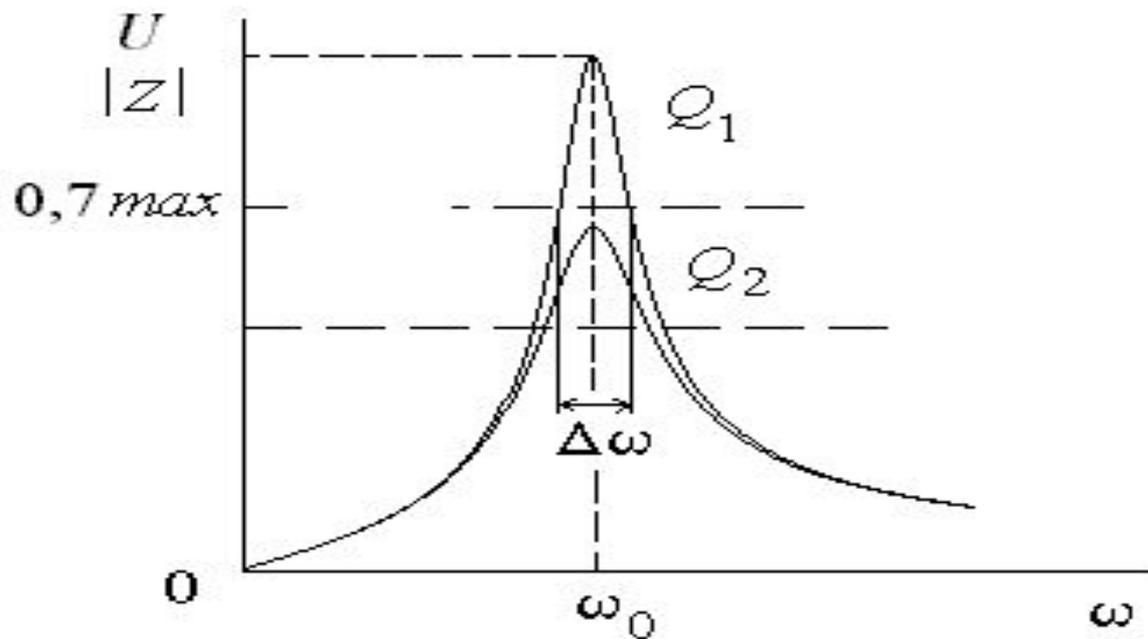


Векторная диаграмма



Свойства параллельного колебательного контура.

$$U = \frac{I}{|Y|} = \frac{I}{\sqrt{g^2 + b^2}} = \frac{I}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}.$$



Максимальное напряжение в момент резонанса:

$$U = \frac{I}{G}.$$

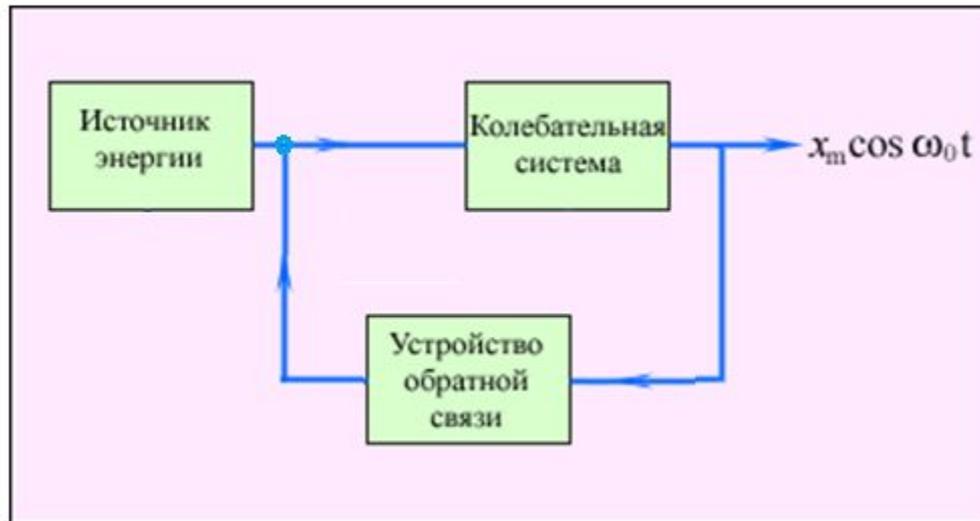
Добротность контура:

$$Q = \frac{I_{c0}}{I} = \frac{U \cdot \omega_0 C}{U \cdot G} = \frac{1}{\rho \cdot G}.$$

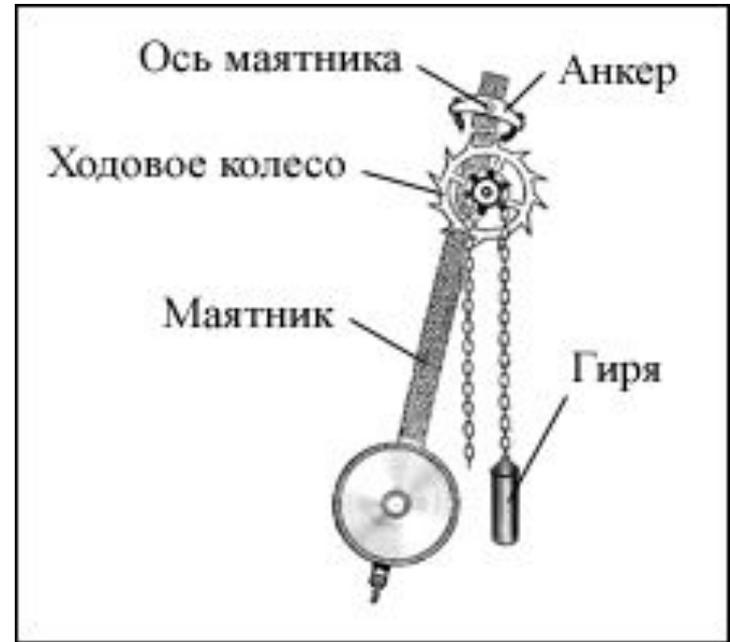
5.9. Автоколебания

Струны смычковых музыкальных инструментов, воздушные столбы в трубах духовых инструментов, голосовые связки при разговоре или пении и другие системы могут образовывать автоколебания.

Автоколебания происходят за счет способности таких систем регулировать поступление энергии от постоянного источника.



Пример механической автоколебательной системы – часовой механизм с анкерным ходом.



Источник энергии – поднятая вверх гиря или заведенная пружина.

Колебательная система – маятник на подвесе.

Обратная связь – взаимодействие анкера с ходовым колесом. Анкер позволяет ходовому колесу повернуться на один зубец за один полупериод.