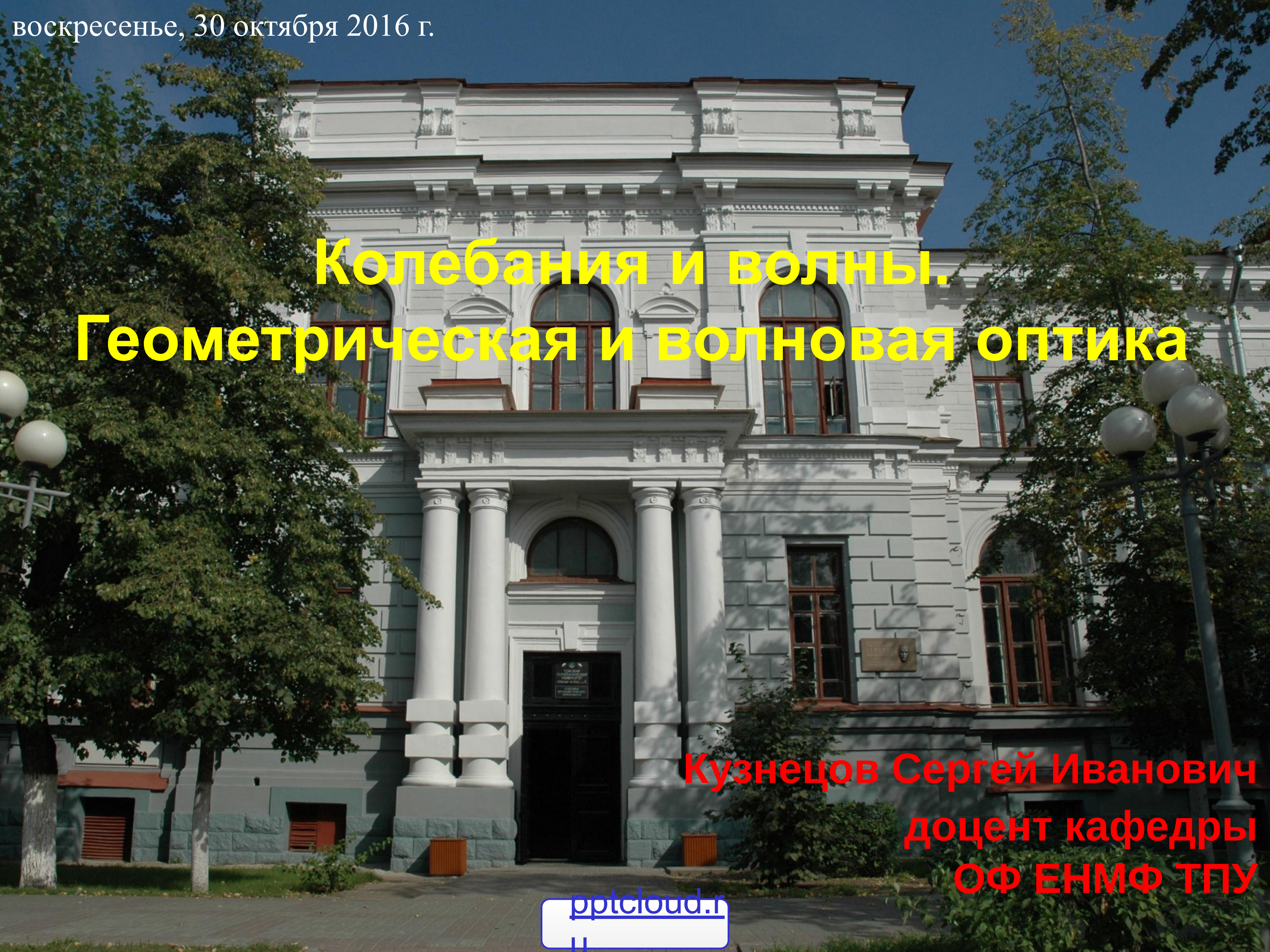
воскресенье, 30 октября 2016 г.

Колебания и волны. Геометрическая и волновая оптика

Кузнецов Сергей Иванович
доцент кафедры
ОФ ЕНМФ ТПУ



pptcloud.ru

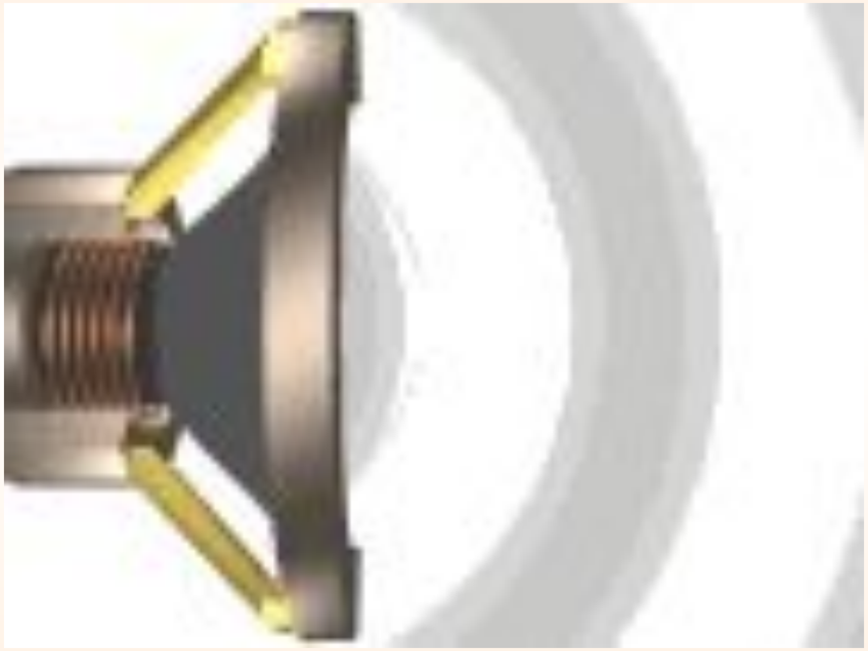
Сегодня: воскресенье, 30 октября 2016 г.

Тема 5 УПРУГИЕ ВОЛНЫ

5.1 Распространение волн в упругой среде

Колеблющиеся тело, помещенное в упругую среду, является источником колебаний, распространяющихся от него во все стороны.

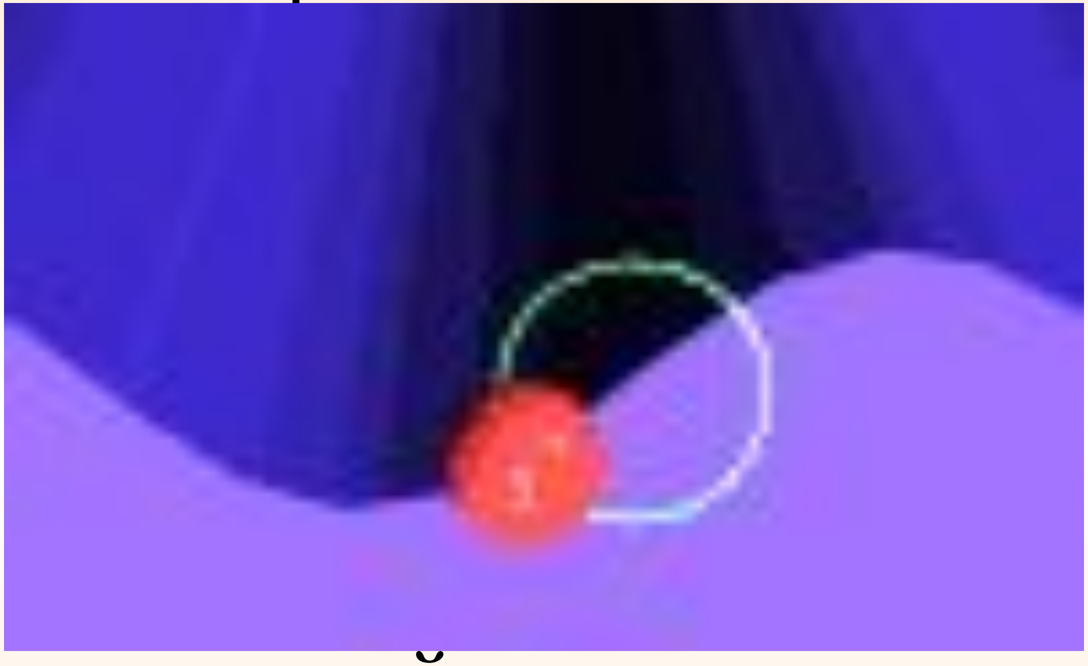
Круговая волна на поверхности жидкости, возбуждаемая точечным источником



Генерация акустической волны громкоговорителем.

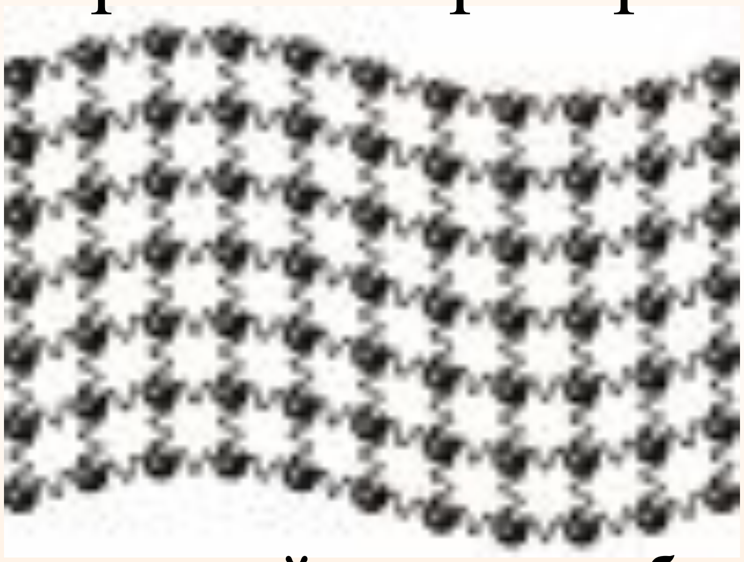
Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной

При распространении волны, частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия.

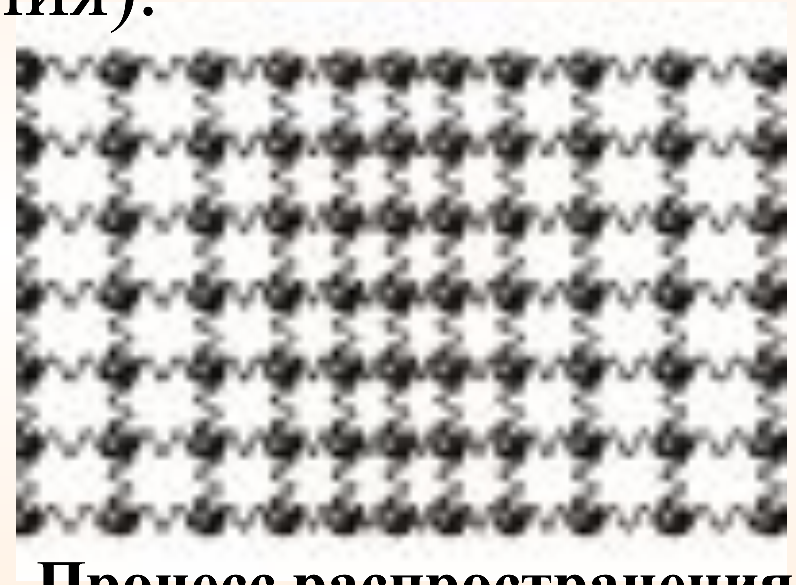


Вместе с волной от частицы к частице, передается лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому ***основным свойством всех волн независимо от их природы является перенос энергии без переноса вещества.***

Волны бывают поперечными (колебания происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения), и ***продольными*** (сгущение и разряжение частиц среды происходят в направлении распространения).



В поперечной волне колебания происходят в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны



Процесс распространения продольной упругой волны

Если взаимосвязь между частицами среды осуществляется ***силами упругости****, возникающими вследствие* ***деформации среды*** *при передаче колебаний от одних частиц к другим, то волны называются* ***упругими*** (звуковые, ультразвуковые, сейсмические и др. волны).

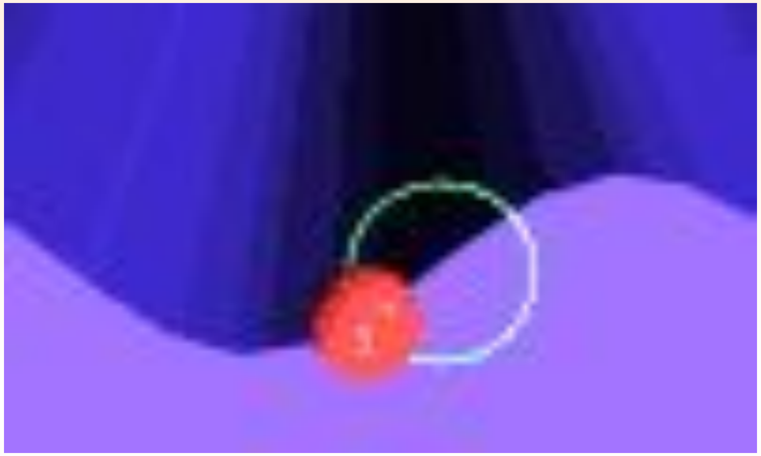
Упругие поперечные волны возникают в среде, обладающей сопротивлением сдвигу,

вследствие этого:

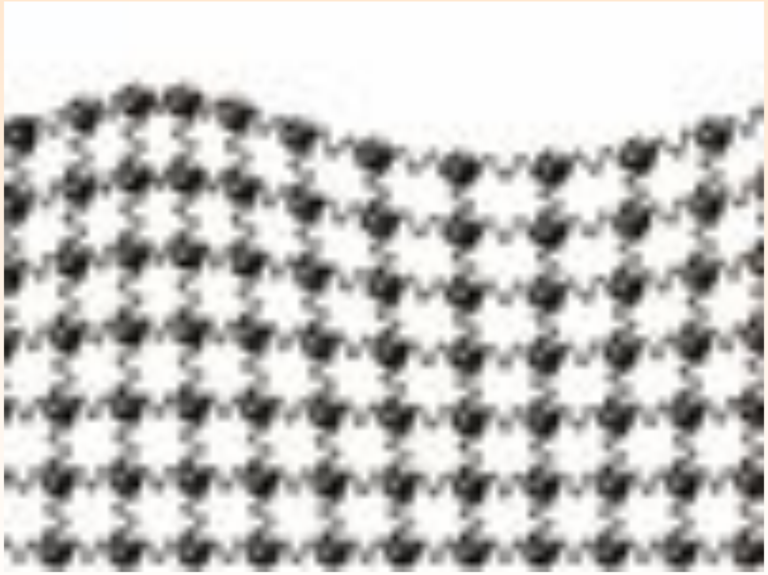
- ***в жидкой и газообразной*** средах возможно возникновение только ***продольных*** волн;
- ***в твердой*** среде возможно возникновение ***как продольных, так и поперечных волн.***

Наложение продольной и поперечной волн равной амплитуды, сдвинутых по фазе на $\pi/2$.

В результате каждая масса совершает круговые движения.



Волна на поверхности жидкости - суперпозиция продольного и поперечного движения молекул

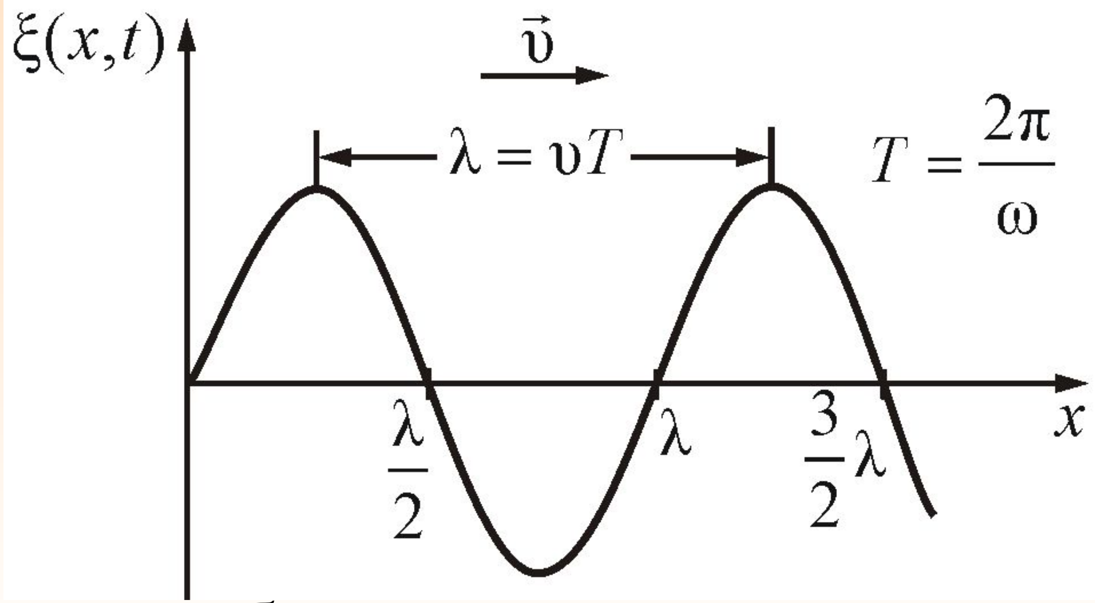


Движение молекул в волне на поверхности жидкости

У **поверхностных волн** взаимосвязь между соседними молекулами при передаче колебаний осуществляется **не силами упругости, а силами поверхностного натяжения и тяжести**. В случае малой амплитуды волны каждая молекула движется по окружности, радиус которой **убывает с расстоянием от поверхности**. Нижние молекулы находятся в покое

Волновая функция

$$\xi = \xi(x, y, z, t)$$



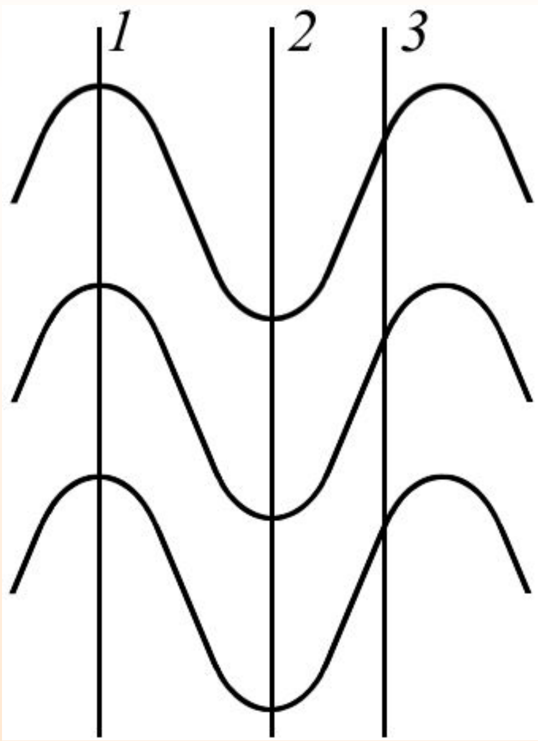
Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется ***длиной волны λ***: $\lambda = \upsilon T$

ν – частота $\qquad T = \dfrac{1}{\nu}$ – период

$\upsilon = \lambda \nu$ – скорость распространения волны : υ

В среде без дисперсии *скорость распространения волны* есть фазовая скорость, или *скорость распространения поверхности постоянной фазы*.

- ***Фронт волны*** ***– геометрическое место точек, до которых доходит возмущение в момент времени*** ***t***: это та поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебаний еще не возникли. (*В однородной среде направление распространения перпендикулярно фронту волны*)



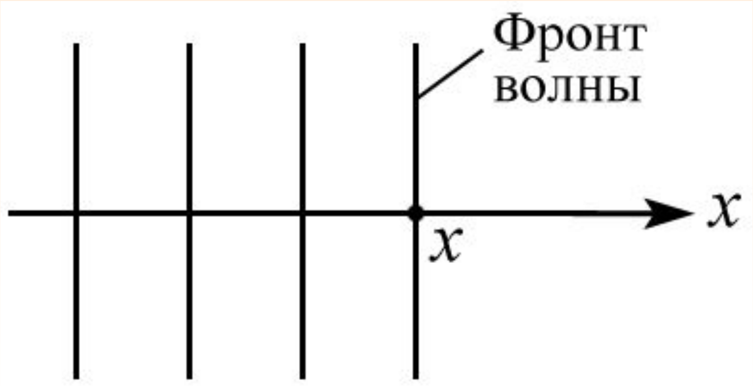
- ***Волновая поверхность*** ***– геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.***

- ***Число волновых поверхностей – бесконечно.***
- ***Фронт волны – один.***

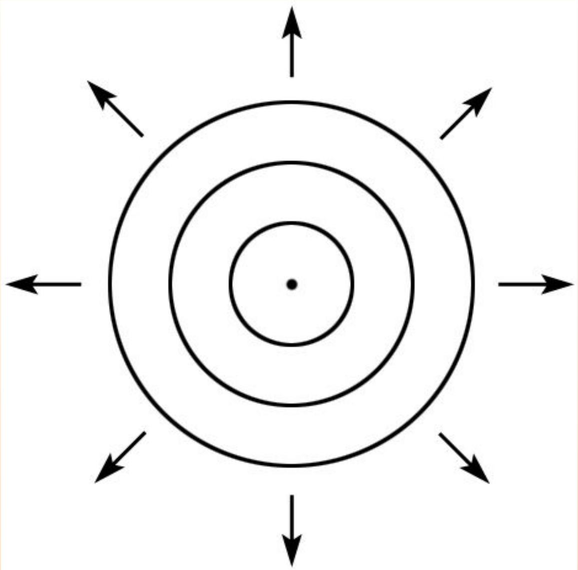
- ***Волновые поверхности неподвижны,***
- ***Фронт волны все время перемещается***

В зависимости от формы волновой поверхности различают

• ***плоские волны***: волновые поверхности – параллельные плоскости:



• ***сферические волны***: волновые поверхности – концентрические сферы.



5.2 Уравнение плоской и сферической волны

Уравнением волны – называется выражение, которое дает ***смещение*** *колеблющейся точки* как функцию ее координат (x, y, z) и времени t.

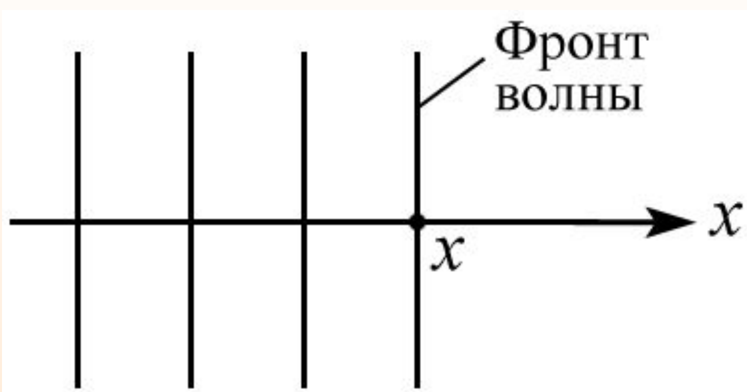
$$\xi = f(x, y, z, t) = \xi(x, y, z, t)$$

Уравнение плоской волны

Найдем вид волновой функции, ξ в случае плоской волны предполагая, что колебания носят гармонический характер: $\xi = A\cos\omega t + \phi_0$

Пусть $\phi_0 = 0$ $\xi = \xi(0,\, t) = A\cos\omega t$

Чтобы пройти путь ***x*** необходимо время $\tau = \dfrac{x}{\upsilon}$



$$\xi(x,\, t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$$

– это ***уравнение плоской волны.***

Введем ***волновое число*** $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

или в векторной форме $\vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$

Так как $\lambda = \upsilon T$, то $k = \dfrac{2\pi}{\upsilon T} = \dfrac{2\pi\nu}{\upsilon} = \dfrac{\omega}{\upsilon}$

Отсюда $\upsilon = \dfrac{\omega}{k}$

Тогда ***уравнение плоской волны*** запишется так:

$$\xi = A\cos(\omega t - kx)$$

$$\xi = A\cos(\omega t - kx + \phi_0)$$

При поглощении средой энергии волны:

$$\xi = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - kx + \phi_0)$$

-***наблюдается затухание волны*** (уменьшение интенсивности волны по мере удаления от источника колебаний);

β – коэффициент затухания;

A – амплитуда.

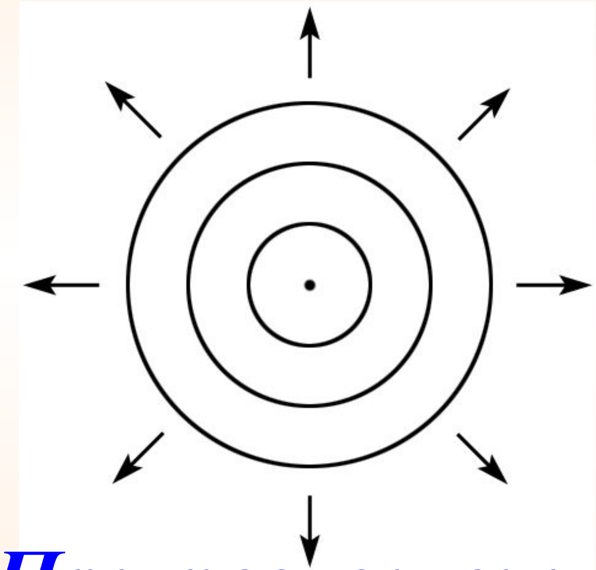
Уравнение сферической волны

Пусть $\phi_0 = 0$

Амплитуда колебаний убывает по закону $A \sim \dfrac{1}{r}$

Уравнение сферической волны:

$$\xi = \frac{A}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right)$$



или

$$k = \frac{\omega}{\upsilon} \qquad \xi = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr)$$

При поглощении средой энергии волны:

$$\xi = \frac{\grave{A}}{r}e^{-\beta t}\cos(\omega t - kr + \phi_0)$$

β – коэффициент затухания.

5.6 Волновое уравнение

Распространение волн в однородной среде в общем случае ***описывается волновым уравнением*** – дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

или

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Всякая функция, *удовлетворяющая этому уравнению, описывает* ***некоторую волну****, причем* υ *-фазовая скорость волны*

Решением волнового уравнения $$\nabla^2\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

является уравнение ***любой волны***, например

сферической: $$\xi = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr)$$

или ***плоской*** : $$\xi = A\cos(\omega t - kr)$$

Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси ***x***, ***волновое уравнение*** упрощается:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

Напоминаю, что оператор Лапласа: $$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

5.3 Фазовая скорость

– это скорость распространения фазы волны.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \upsilon$$

– скорость распространения фазы есть скорость распространения волны.

Для синусоидальной волны ***скорость переноса энергии равна фазовой скорости.***

5.4 Принцип суперпозиции. Групповая скорость

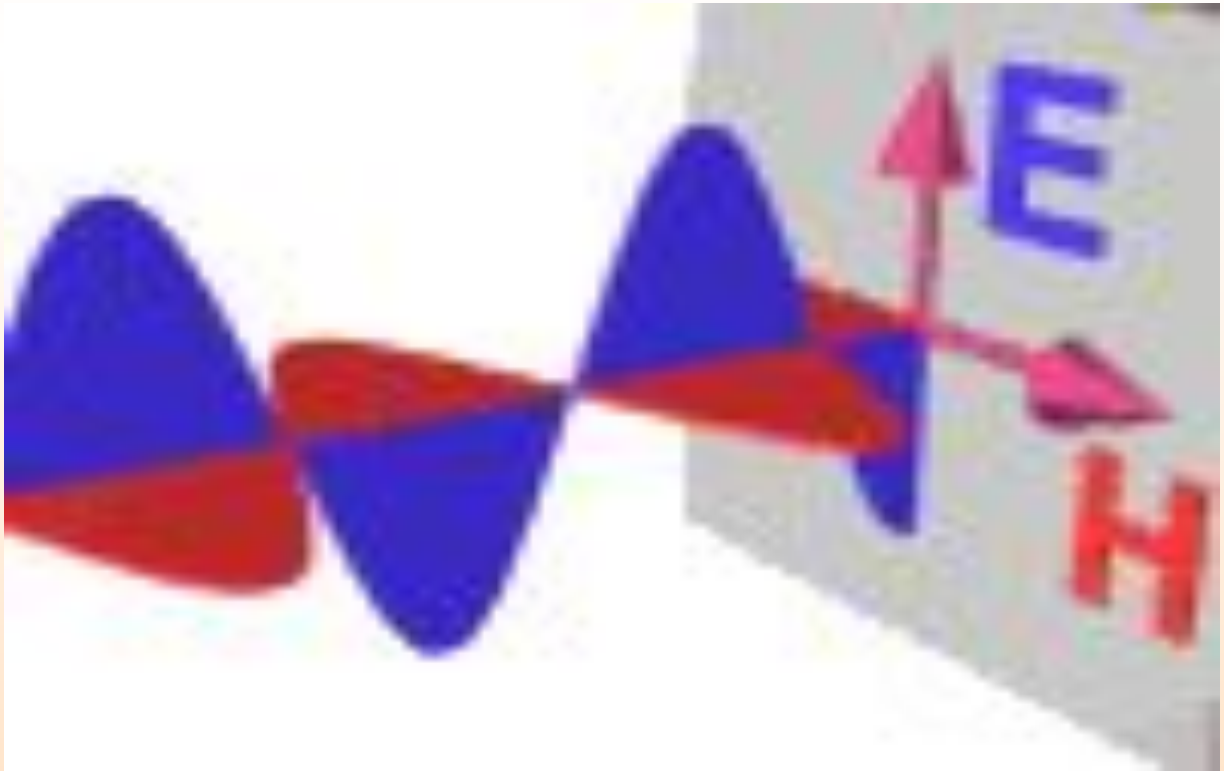
Принцип суперпозиции (***наложения волн***): ***при распространении в среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды равно геометрической сумме смещений частиц.***

Исходя из этого принципа и разложения Фурье, ***любая волна может быть представлена в виде волнового пакета или группы волн***.

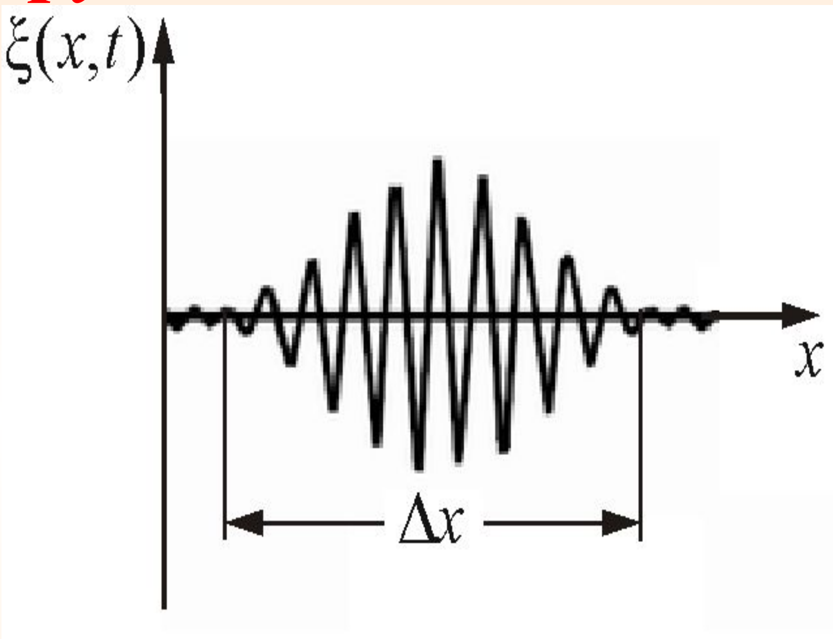
Строго ***монохроматическая*** волна представляет собой бесконечную во времени и пространстве последовательность «горбов» и «впадин».

$$\xi = A_0\cos(\omega t - kx + \phi)$$

Фазовая скорость этой волны $\upsilon = \lambda\nu$ или $\upsilon = \dfrac{\omega}{k}$

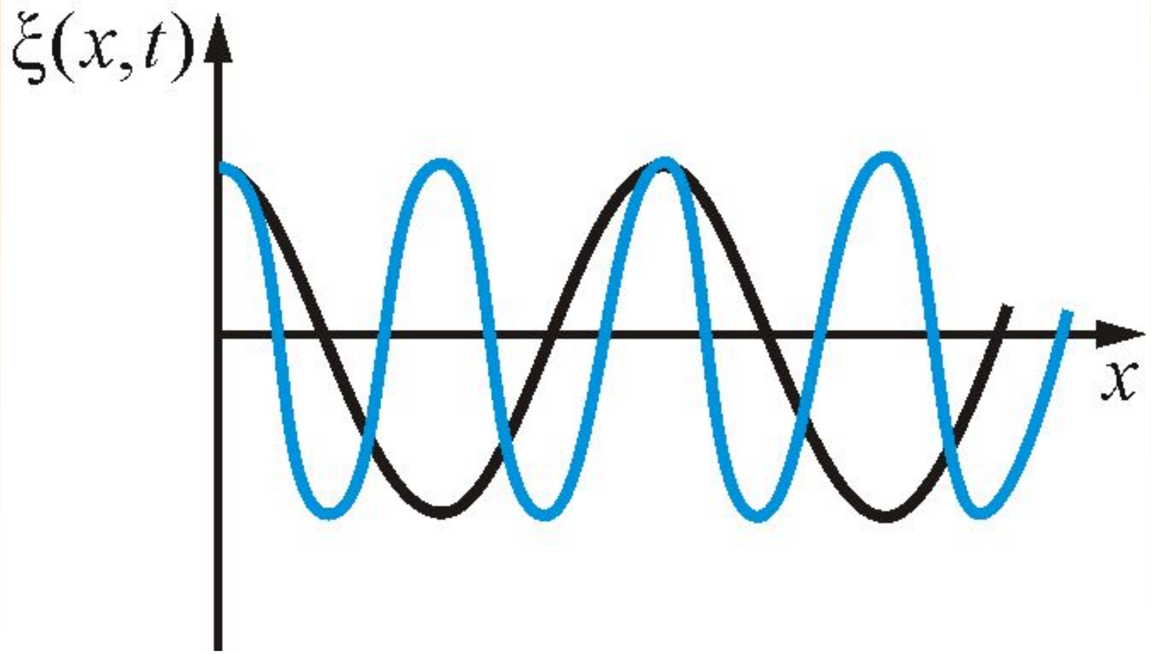


Суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, называется волновым пакетом или группой волн:



Выражение для группы волн:

$$\xi(x,t) = \int_{\omega-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega+\frac{\Delta\omega}{2}} A_{0\omega}\cos(\omega t - k_\omega x + \phi_\omega)\mathrm{d}\omega$$



Там где фазы совпадают, наблюдается усиление амплитуды, где нет – гашение (результат интерференции).

необходимо условие $\Delta\omega << \omega_0$

***Дисперсия* – *это зависимость фазовой скорости в среде от частоты*.**

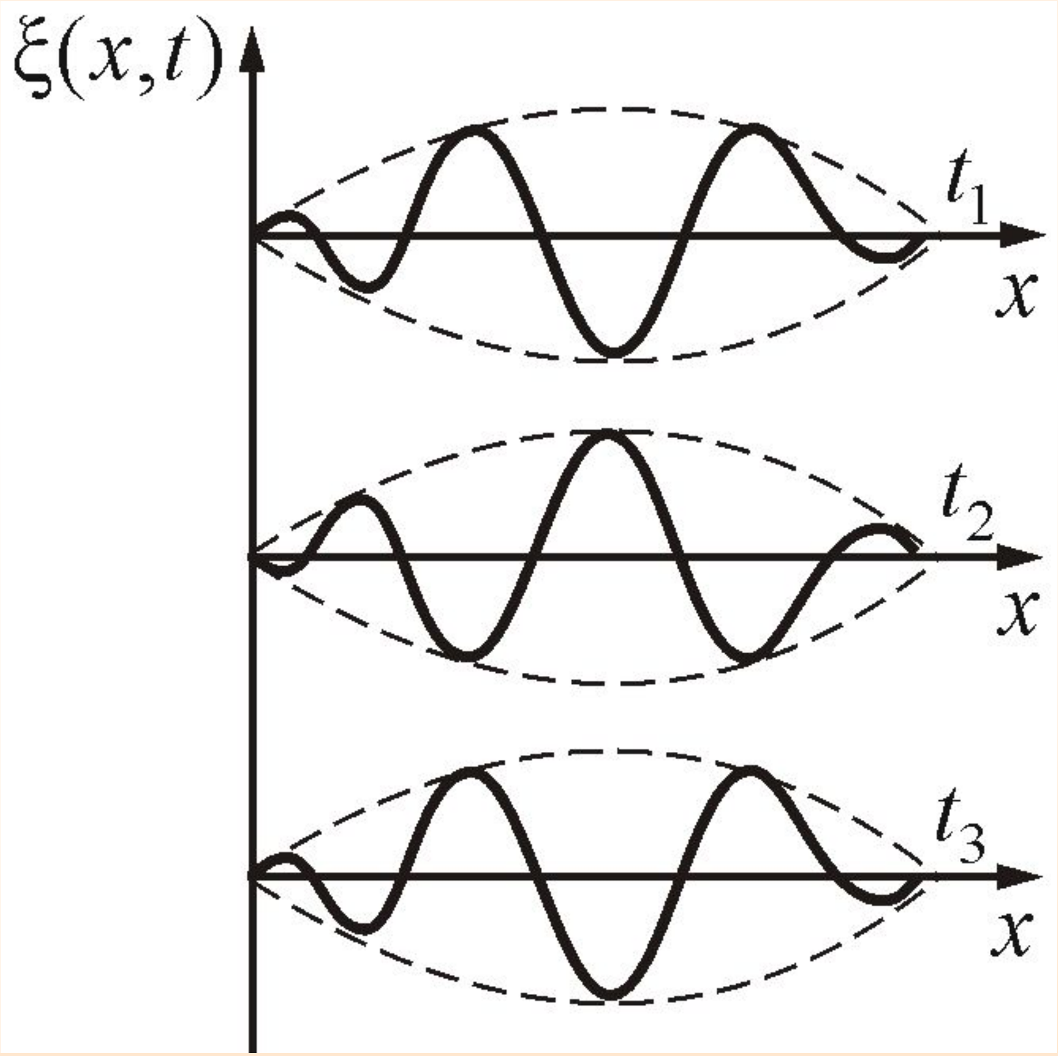
В ***недиспергирующей среде*** все плоские волны, образующие пакет, распространяются с ***одинаковой фазовой скоростью v***.

Скорость перемещения пакета ***u*** совпадает со скоростью ***v***: $u = \upsilon$

Скорость, с которой перемещается центр пакета (*точка с максимальным значением A*), ***называется групповой скоростью u*.**

В диспергирующей среде $u \neq \upsilon$

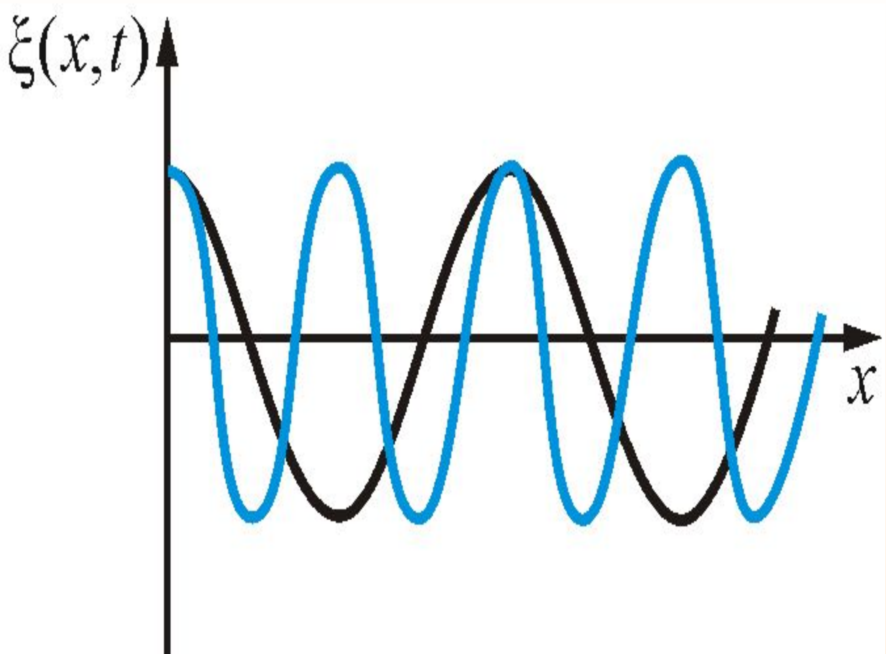
Если *дисперсия невелика то скорость перемещения пакета совпадает со скоростью* υ



Рассмотрим пример ***суперпозиции двух волн*** с одинаковой амплитудой и близкими длинами волн λ:

$$\xi_1 = A_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$\xi_2 = A_0 \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x]$$



$$k = \frac{\omega}{\upsilon_1}$$ Волновое число первой волны

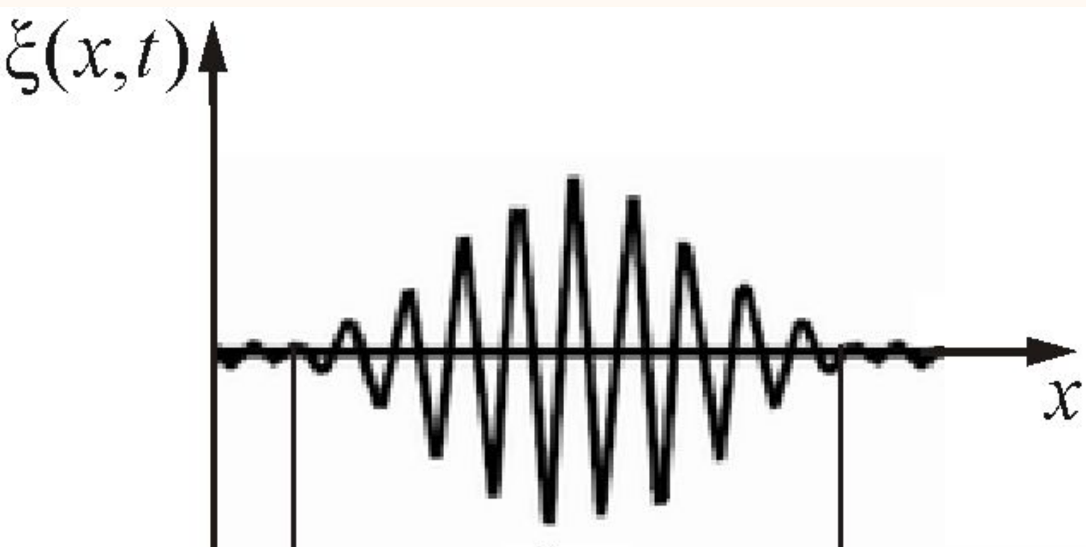
$$(k + \Delta k) = \frac{\omega + \Delta\omega}{\upsilon_2}$$

В результате суперпозиции двух волн получилась ***суммарная волна (волновой пакет)***:

$$\xi = \left[2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right) \right] \cos(\omega t - kx)$$

Эта волна отличается от гармонической тем, что её амплитуда – есть медленно изменяющаяся функция x и t :

$$A = \left| 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right) \right|$$

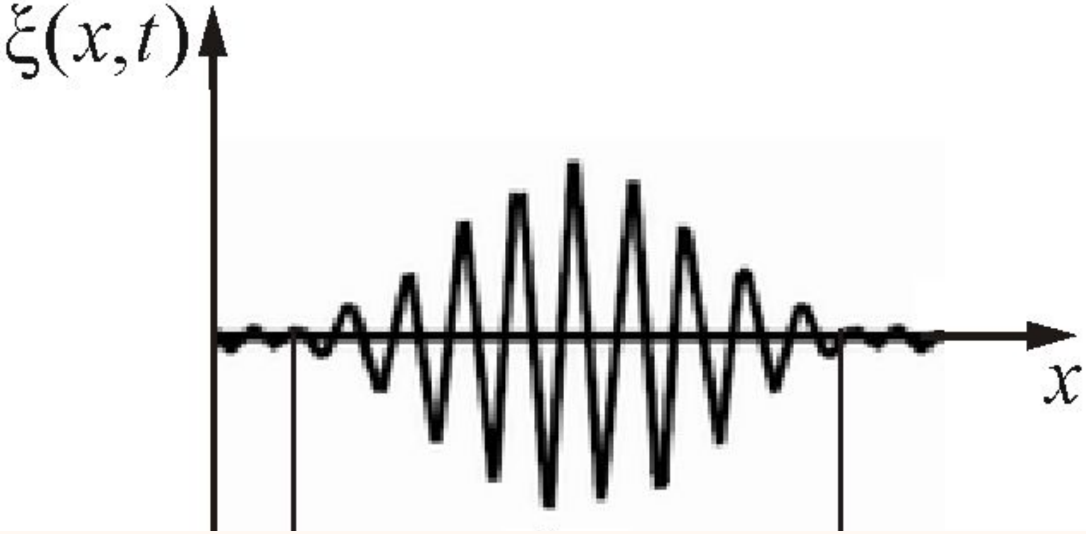


Максимум амплитуды :

$$\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x_{\max} = \pm m\pi$$

$$x_{\max} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t + \text{const}$$

- координаты максимума



За скорость распространения этого волнового пакета u принимают скорость максимума амплитуды, т.е. центра пакета:

$$\upsilon = \frac{\omega}{k}$$ – фазовая скорость

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$ – групповая скорость

Связь между групповой и фазовой скоростью:

$$u = \upsilon - \lambda \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\lambda}$$

u может быть как меньше, так и больше υ

В недиспергирующей среде: $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\lambda} = 0$ поэтому $u = \upsilon$

В диспергирующей среде: $u \neq \upsilon$

Групповая скорость может быть $u > c$ Фазовая скорость $\upsilon < c$

5.5 Стоячие волны

Если в среде распространяется несколько волн, то *колебания частиц среды оказывается геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности.*

Волны накладываются друг на друга не возмущая (*не искажая друг друга*) - ***принцип суперпозиции волн.***

Если две волны*, приходящие в какую либо точку пространства,* ***обладают постоянной разностью фаз, такие волны называются когерентными*****.**

При сложении когерентных волн *возникает* ***явление интерференции.***

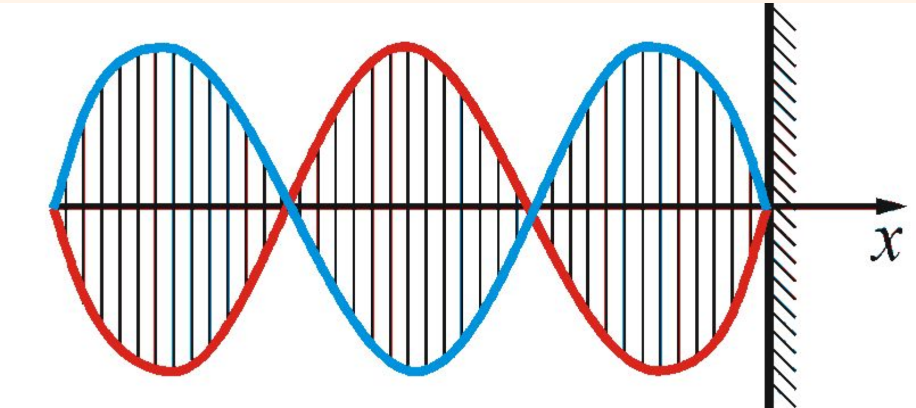
Очень важный ***случай интерференции*** наблюдается ***при наложении двух встречных плоских волн*** с одинаковой амплитудой.

Возникающий в результате колебательный процесс называется ***стоячей волной***.

Практически стоячие волны возникают при отражении от преград.

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= A\cos(\omega t - kx)\\ \xi_2 &= A\cos(\omega t + kx)\end{aligned}\right\}$$

$$\xi = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t$$



или $\xi = A^{*}\cos\omega t$

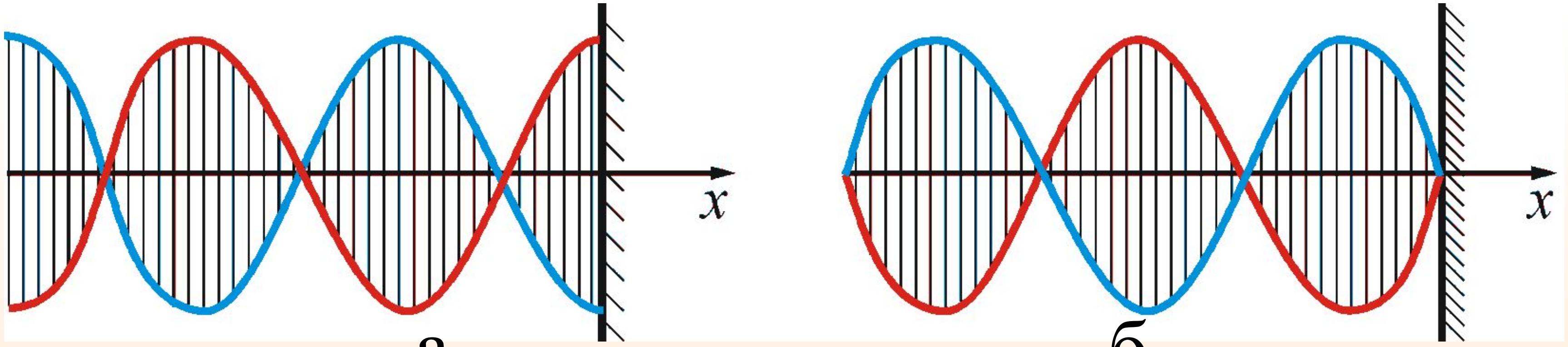
- уравнение стоячей волны – частный случай интерференции

$$\xi = A^{*}\cos\omega t$$

$$A^{*} = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$ ***- суммарная амплитуда***

Когда суммарная амплитуда равна максимальному значению $A^{*} = 2A$ - это ***пучности*** стоячей волны

Координаты пучностей: $x_{\text{пучн}} = \pm n\lambda / 2$ $(n=0, 1, 2..)$

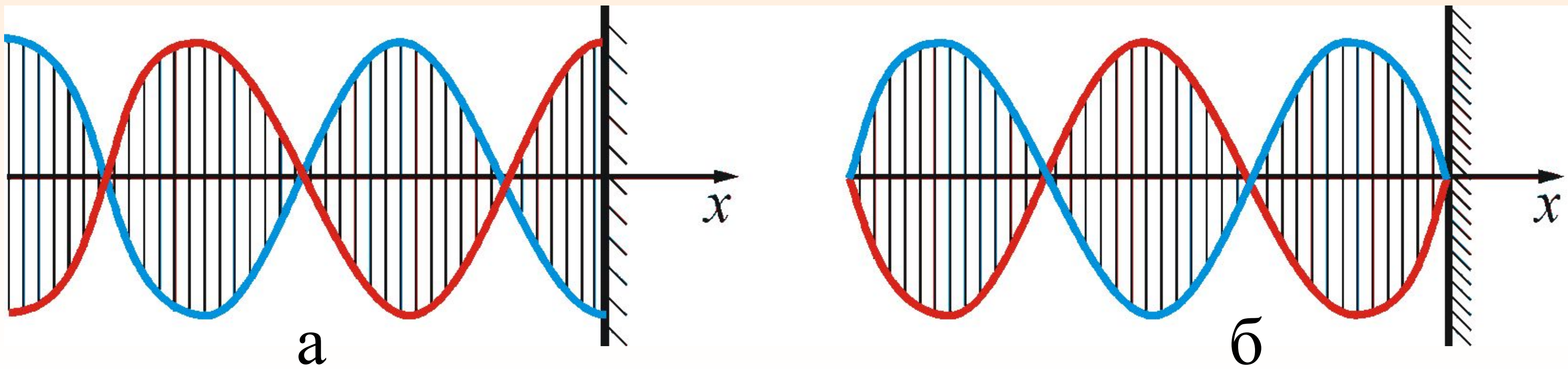


а б

Когда суммарная амплитуда колебаний равна нулю $A^{*} = 0$ ***– это узлы стоячей волны.***

Координаты узлов: $x_{узл} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$

Если среда, от которой происходит отражение, ***менее плотная***, то в месте отражения возникает пучность (а), если более плотная – узел (б).



Определим ***расстояние между соседними узлами (пучностями):*** т.к. $k\Delta x \equiv \pi$ тогда:

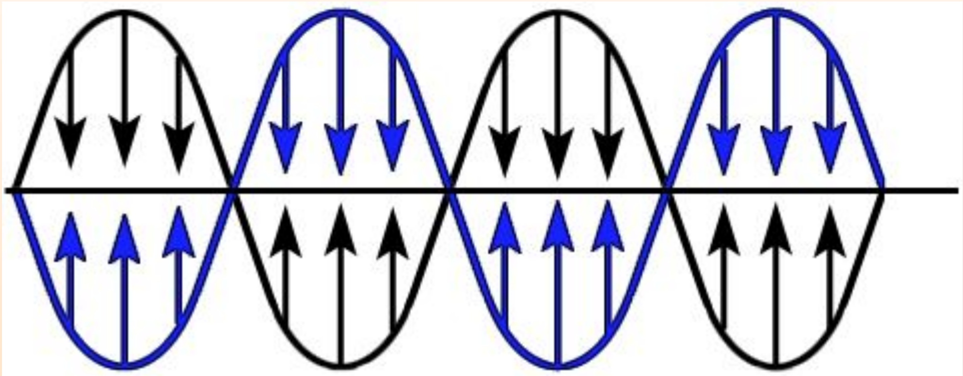
$$\Delta x \equiv \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$$

- расстояние между соседними пучностями, как и соседними узлами, одинаково и составляет ***половину длины волны.***

Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на ***четверть длины волны.***

Если рассматривать ***бегущую волну***, то в направлении ее распространения ***переносится энергия*** колебательного движения.

В случае же ***стоячей волны переноса энергии нет***, т.к. падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях.



Упругие волны

Рассмотрим продольную плоскую волну в твердой среде:

Деформация среды в плоскости x:
(взят символ частной производной,
т.к. $s = s(x,t)$)

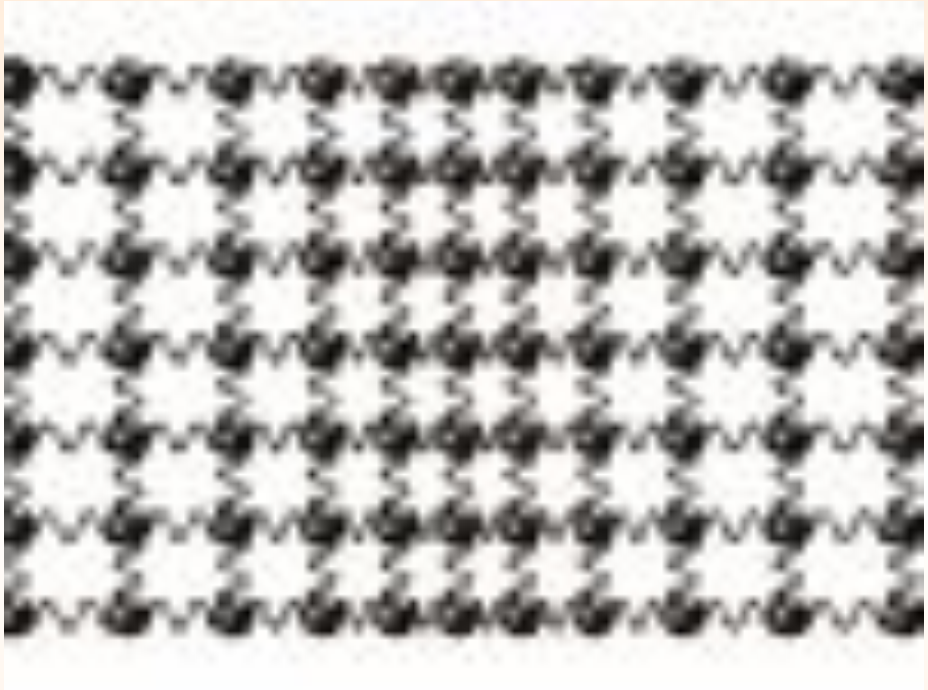
$$\varepsilon = \frac{\partial s}{\partial x}$$

Нормальное напряжение
пропорционально деформации
(для малых деформаций):

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial s}{\partial x}$$

где E – ***модуль Юнга*** среды.

- В положениях <u>максимального отклонения</u> частиц от положения равновесия ($\partial s/\partial x = 0$) **$\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$**
- В местах прохождения частиц через положения равновесия **ε, σ - максимальны** (с чередованием $\pm\varepsilon$, т.е. растяжений и сжатий)



Процесс распространения продольной упругой волны

Скорость продольной волны связана с характеристиками среды следующим образом:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

ρ – плотность среды.

Скорость поперечной волны

$$\upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G **– модуль сдвига.**

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \phi)$$

- *плотность энергии* упругой волны (как поперечной, так и продольной) в каждый момент времени в разных точках пространства различна.

Эффект Доплера

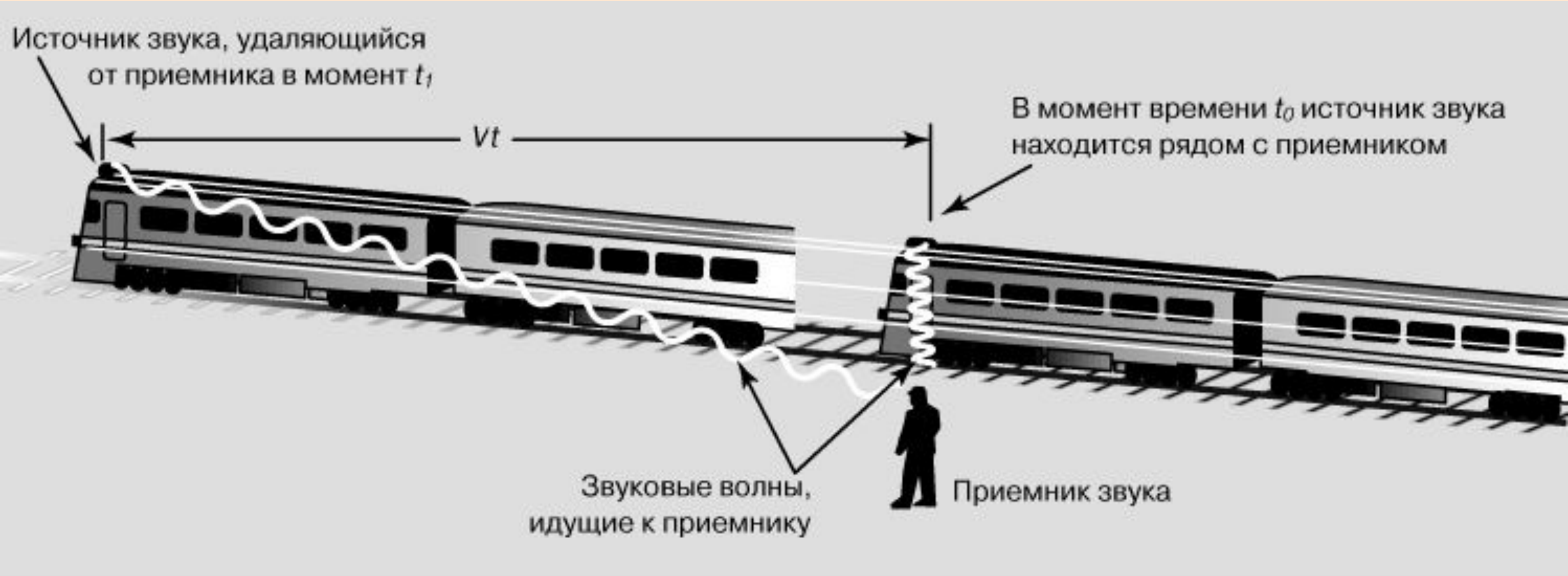
Зависимость длины волны

от относительной скорости

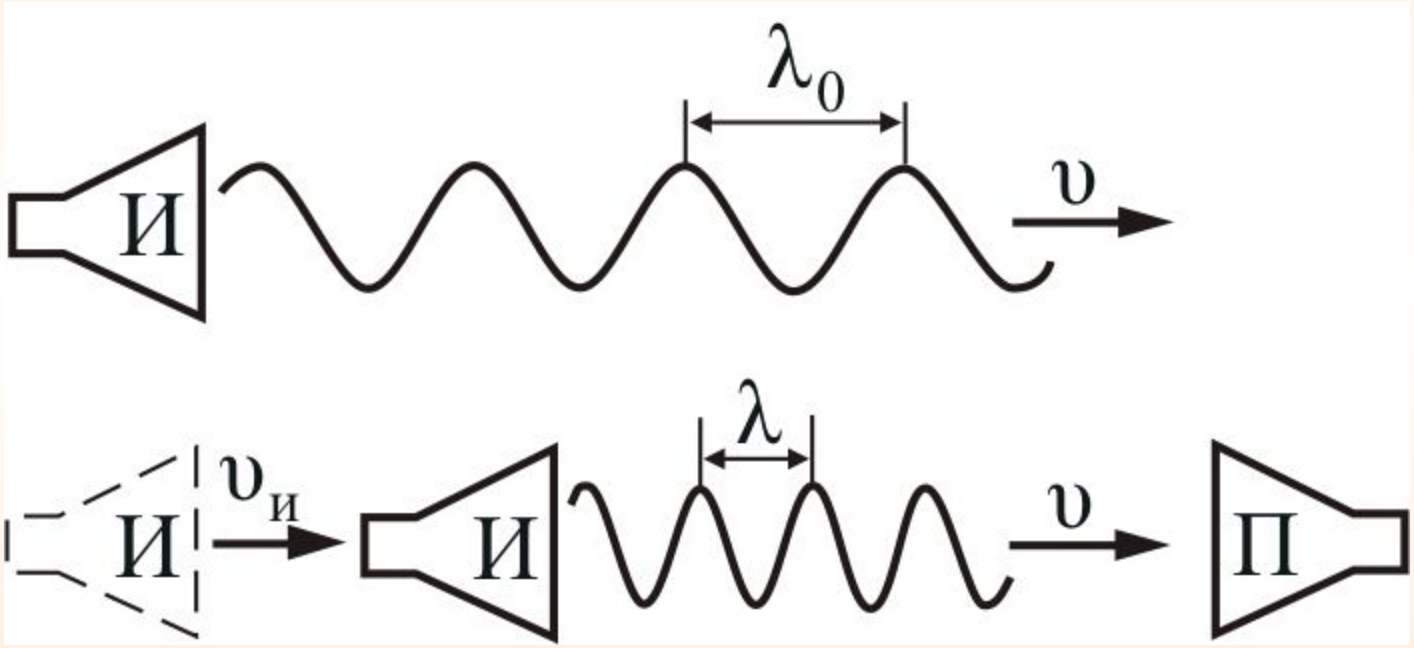
движения

5.7 Эффект Доплера

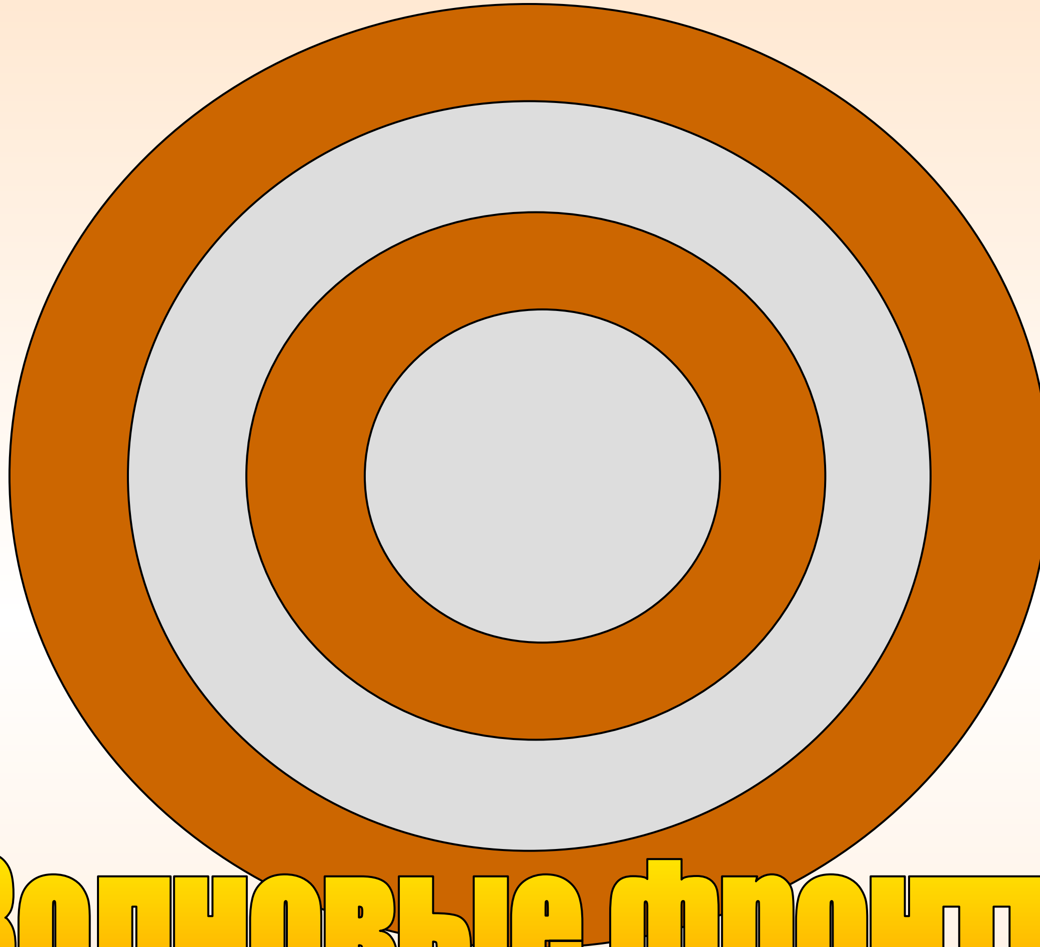
Доплер Христиан (1803 – 1853), австрийский физик и астроном, член Венской АН (1848 г.). Учился в Зальцбурге и Вене. С 1847 г. профессор Горной академии в Хемнице, с 1850 г. профессор Политехнического института и университета в Вене. Основные труды посвящены аберрации света, теории микроскопа и оптического дальномера, теории цветов и др. В 1842 г. теоретически обосновал зависимость частоты колебаний, воспринимаемых наблюдателем, от скорости и направления движения наблюдателя относительно источника колебаний.


Источник звука, удаляющийся
от приемника в момент t_1
Vt
В момент времени t_0 источник звука
находится рядом с приемником
Звуковые волны,
идущие к приемнику
Приемник звука

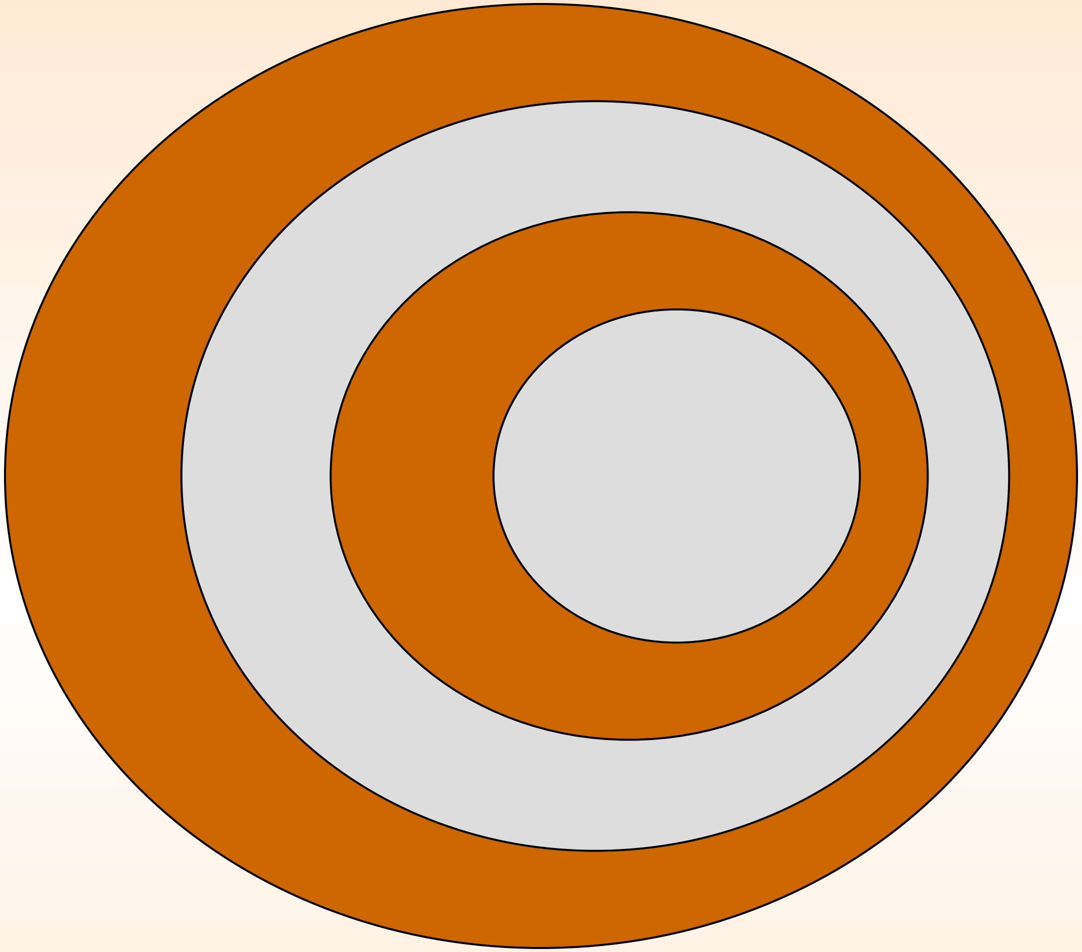
***Эффектом Доплера* называется изменение частоты волн, регистрируемых приемником, которое происходит вследствие движения источника этих волн и приемника.**



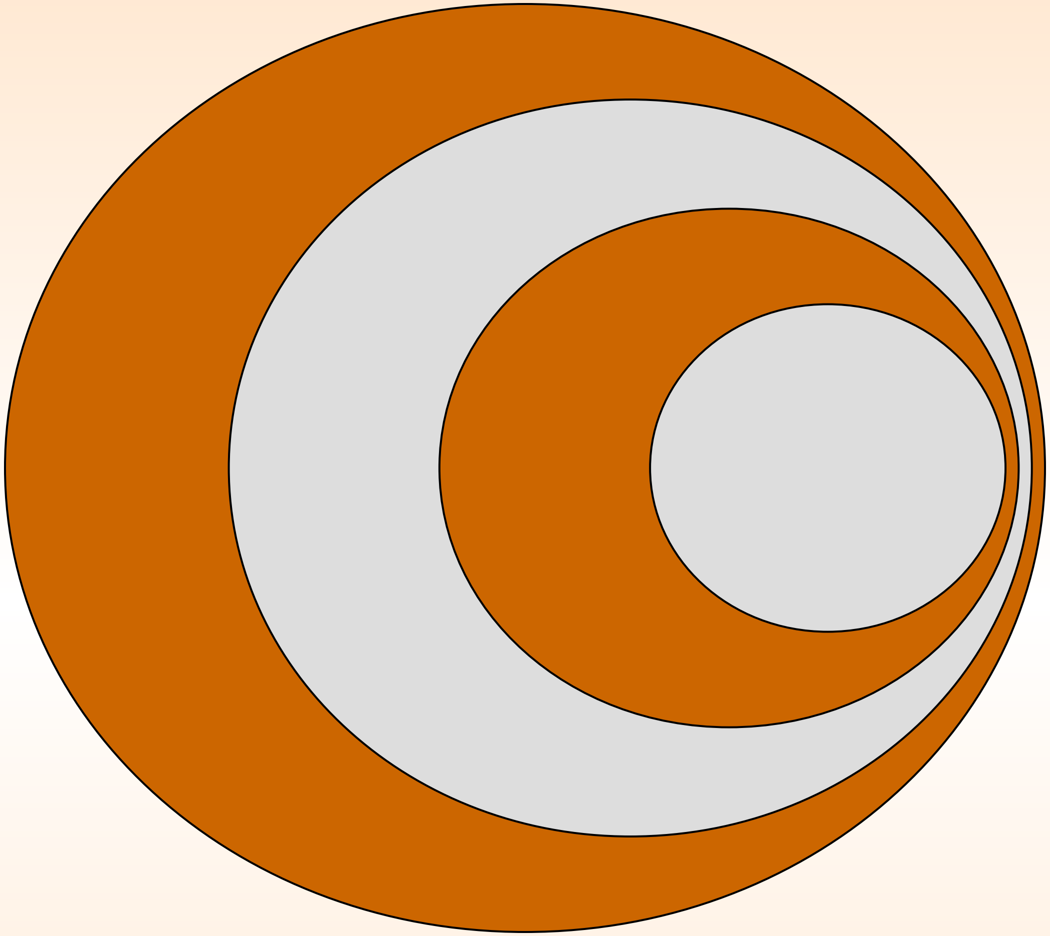
Источник, двигаясь к приемнику как бы сжимает пружину – волну



Волновые фронты неподвижного источника

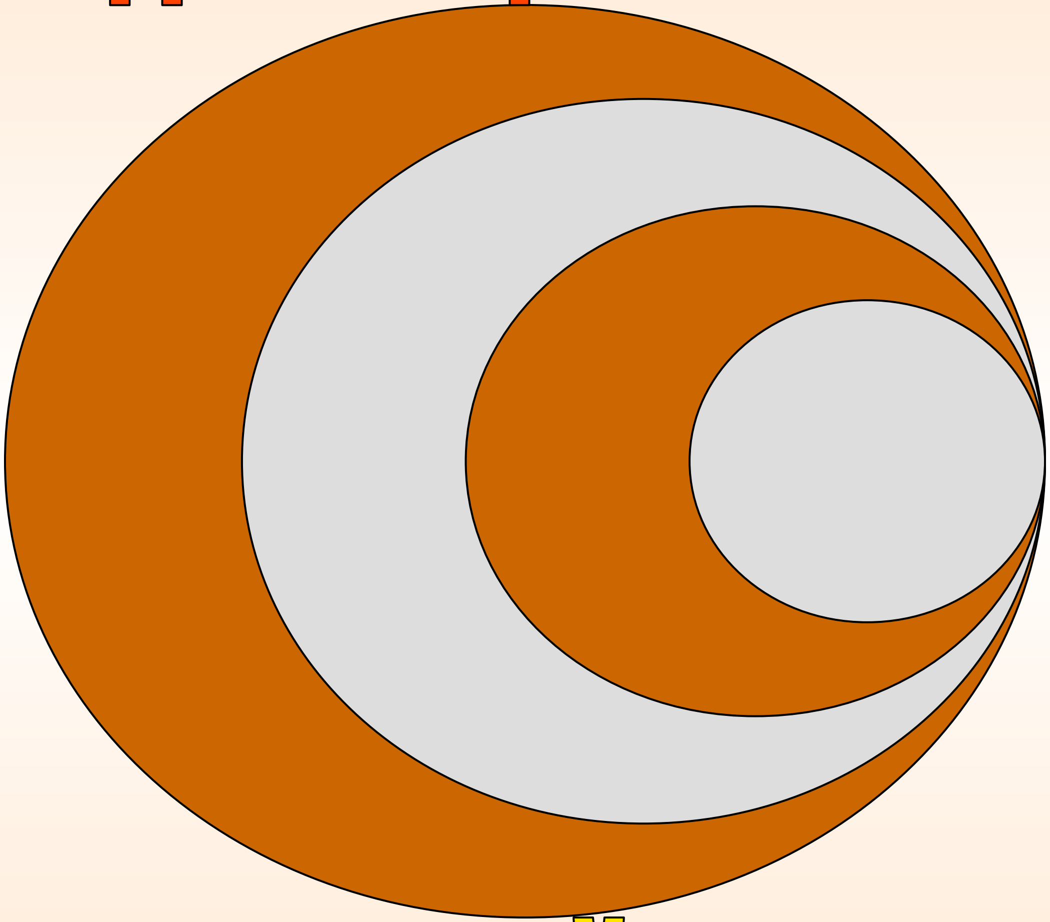


Источник движется вправо



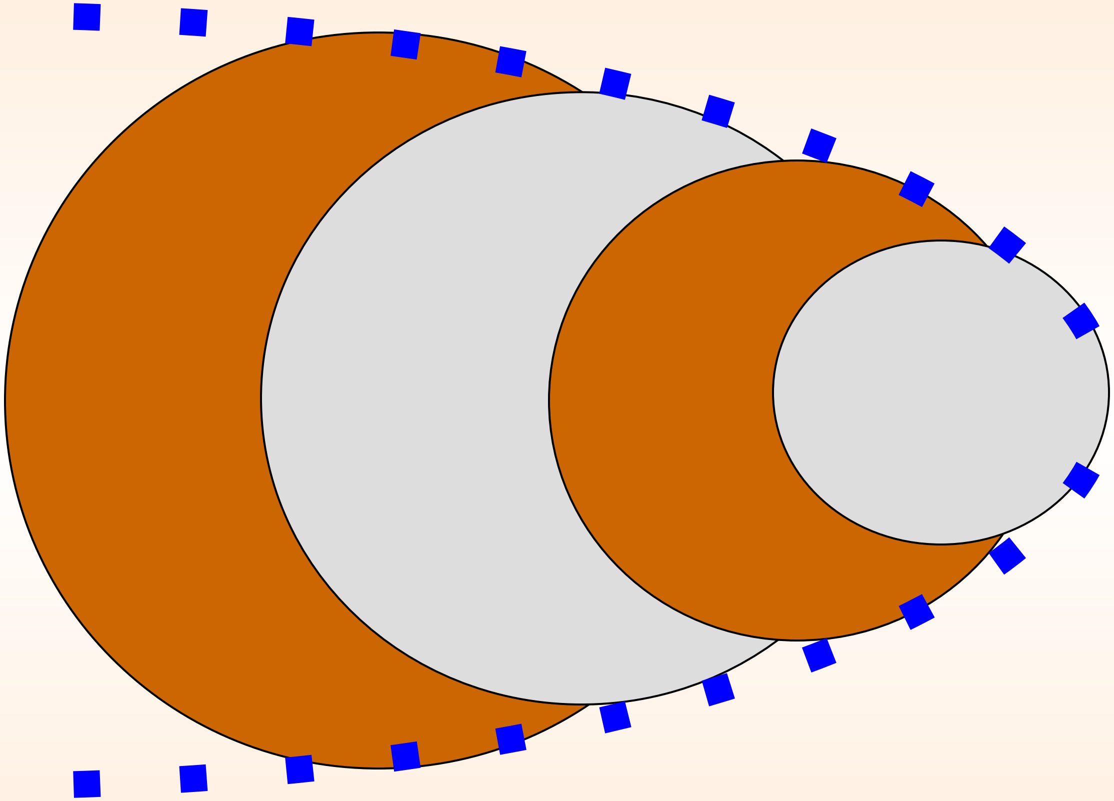
Скорость движется возросла

Скорость движущегося источника



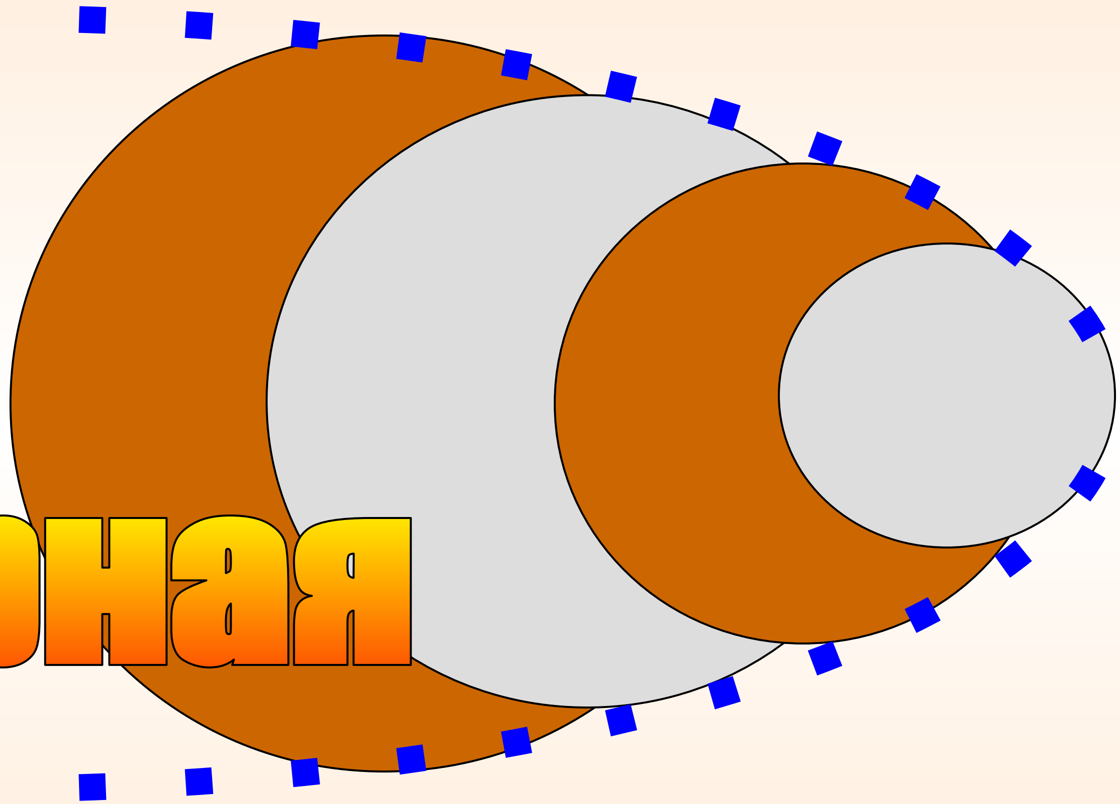
равна фазовой скорости

Скорость движущегося источника



выше фазовой скорости

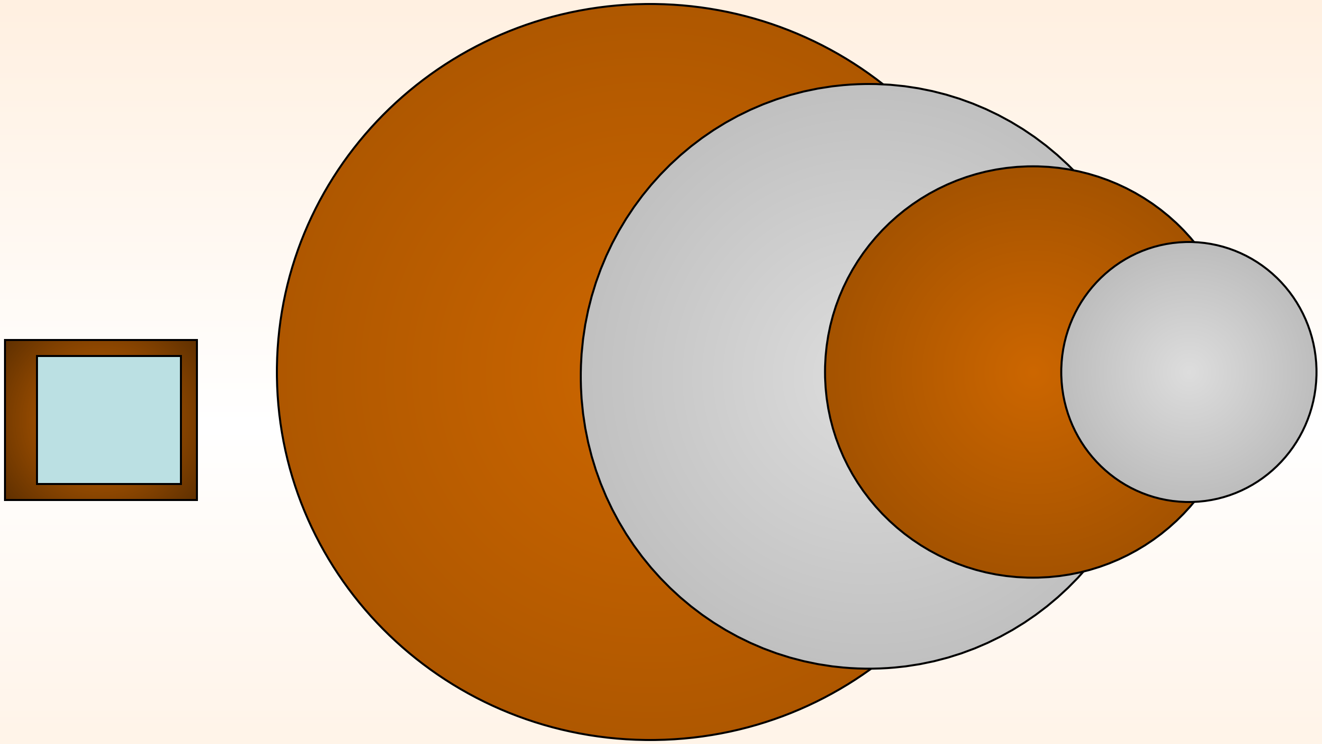
Формируется



ударная

волна

Динамика перехода

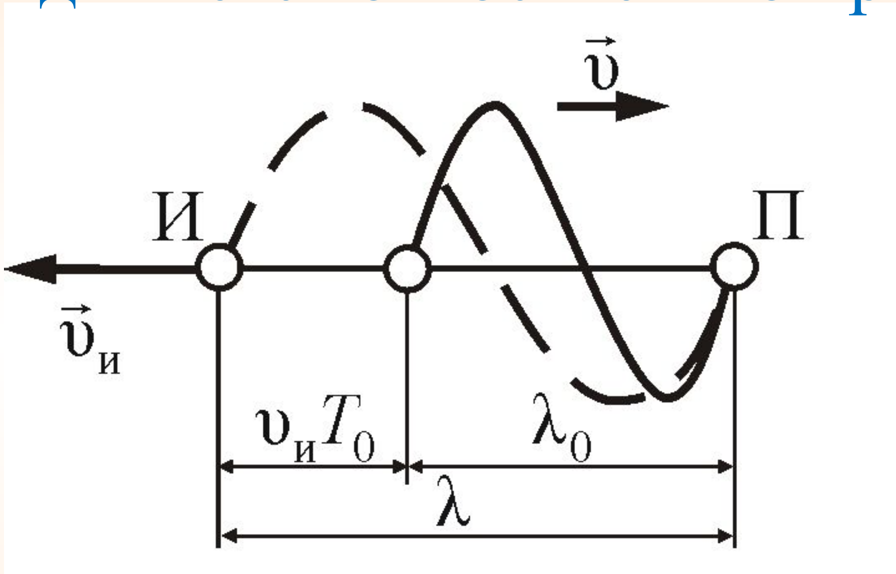


к конусу Маха

Акустический эффект Доплера

(несколько случаев проявления)

1. Источник движется относительно приемника



Источник смещается в среде за время, равное периоду его колебаний T_0, на расстояние

$$\upsilon_и T_0 = \frac{\upsilon_и}{\nu_0}$$

где ν_0 – частота колебаний источника, υ – фазовая скорость волны

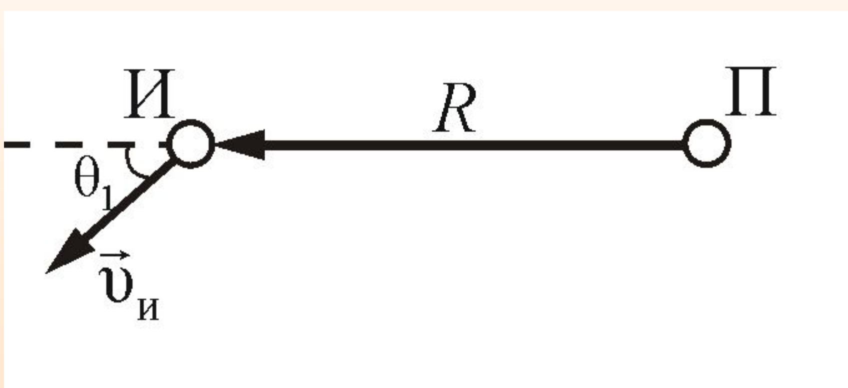
Длина волны, регистрируемая приемником,

$$\lambda = \lambda_0 + \upsilon_{и} T_0 = (\upsilon + \upsilon_{и}) T_0 = \frac{(\upsilon + \upsilon_{и})}{\nu_0}$$

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{\nu_0}{1 + \upsilon_{и} / \upsilon}$$

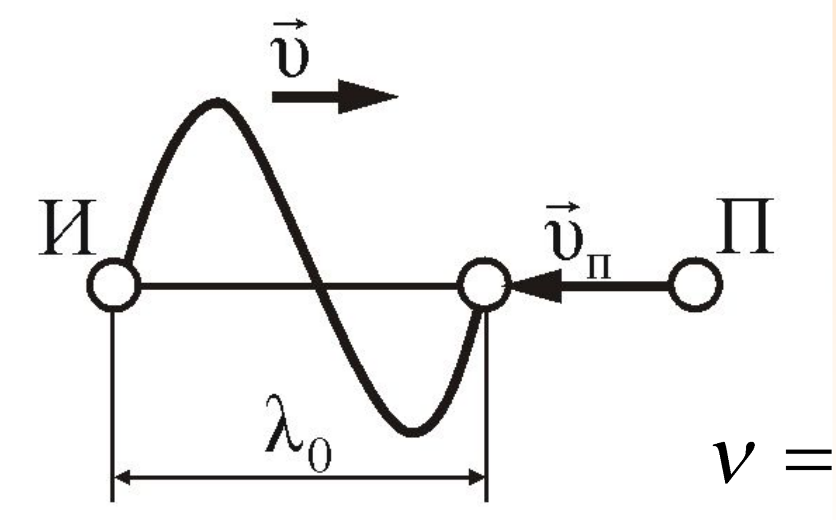
Частота волны, регистрируемая приемником,

Если вектор $\vec{\upsilon}_{и}$ скорости источника ***направлен под*** произвольным ***углом*** θ_1 к радиус-вектору $\vec{R}$



$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + (\upsilon_{\grave{e}} / \upsilon) \cos\theta_1}.$$

2. Приемник движется относительно источника

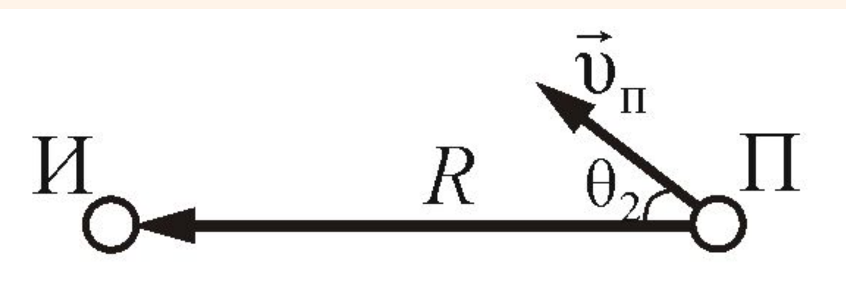


Частота волны, регистрируемая приемником:

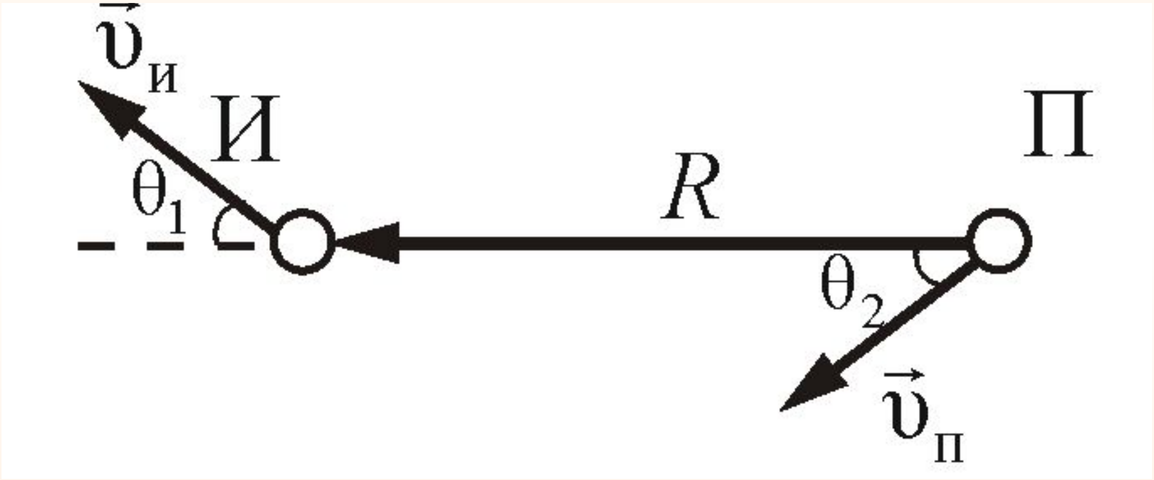
$$\nu = (\upsilon + \upsilon_{\text{ï}})/\lambda_0 = \nu_0(1 + \upsilon_{\text{ï}}/\upsilon).$$

Если приемник движется относительно источника под углом:

$$\nu = \nu_0[1 + (\upsilon_{\text{ï}}/\upsilon)\cos\theta_2]$$



3. В общем случае, когда и приемник и источник звуковых волн движутся относительно среды с произвольным скоростями



$$\nu = \nu_0 \frac{1 + (\upsilon_п / \upsilon)\cos\theta_2}{1 + (\upsilon_и / \upsilon)\cos\theta_1}$$

Если $\upsilon_{и} << \upsilon$

$$\nu \approx \nu_0[1-(\upsilon'/\upsilon)\cos\theta]$$

где $\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon}_{и} - \vec{\upsilon}_{п}$

– скорость источника волны относительно приемника, а θ – угол между векторами $\vec{\upsilon}'$ и $\vec{R}$

Величина $\upsilon'\cos\theta$, равная проекции $\vec{\upsilon}'$ на направление $\vec{R}$, называется ***лучевой скоростью источника.***

Оптический эффект Доплера

Соотношение, описывающее ***эффект Доплера для электромагнитных волн*** в вакууме, с учетом преобразований Лоренца, имеет вид:

$$\nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1+(\upsilon/c)\cos\theta} \qquad (1)$$

Если источник движется относительно приемника вдоль соединяющей их прямой, то наблюдается ***продольный эффект Доплера***:

Продольный эффект Доплера

- В случае сближения источника и приемника (θ = π)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1+\upsilon/c}{1-\upsilon/c}} > \nu_0$$

- В случае их взаимного удаления (θ = 0)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\upsilon/c}{1+\upsilon/c}} < \nu_0 \qquad (2)$$

Поперечный эффект Доплера

наблюдается при $\theta = \pi / 2$ $\theta = 3\pi / 2$

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2} < \nu_0$$

Поперечный эффект пропорционален отношению υ^2 / c^2 , следовательно, он значительно слабее продольного, который пропорционален υ / c

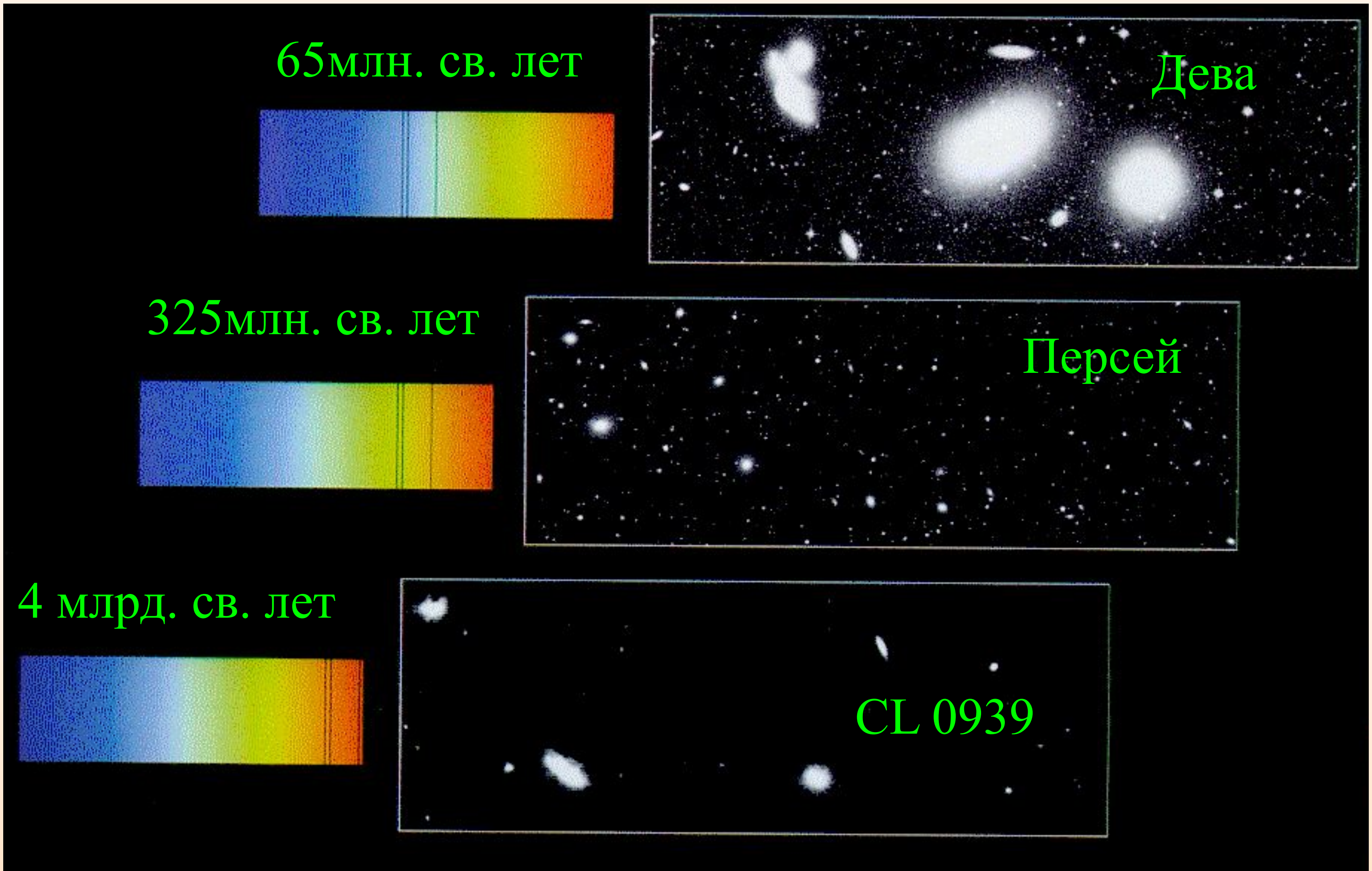
Впервые экспериментальная проверка существования эффекта Доплера и правильности релятивистской формулы (1) была осуществлена американскими физиками Г. Айвсом и Д. Стилуэллом в 30-ых гг.

Эффект Доплера нашел широкое применение в науке и технике. Особенно большую роль это явление играет в ***астрофизике***. На основании доплеровского смещения линий поглощения в спектрах звезд и туманностей можно определять лучевые скорости $\upsilon\cos\theta$ этих объектов по отношению к Земле: при $\upsilon << c$ по формуле (1)

$$\upsilon\cos\theta \approx (1-\nu/\nu_0)c$$

Американский астроном Э. Хаббл обнаружил в 1929 г. явление, получившее название ***космологического красного смещения*** и состоящее в том, что линии в спектрах излучения внегалактических объектов смещены в сторону меньших частот (больших длин волн).

Красное космологическое смещение линий спектра водорода



Космологическое красное смещение есть не что иное, как эффект Доплера. Оно свидетельствует о том, что Метагалактика расширяется, так что внегалактические объекты удаляются от нашей Галактики.

Под метагалактикой понимают совокупность всех звездных систем. В современные телескопы можно наблюдать часть Метагалактики, оптический радиус которой равен

$$R = 1{,}12 \cdot 10^{23} \text{ км}$$

Хаббл установил закон, согласно которому, ***относительное красное смещение*** z ***галактик растет пропорционально расстоянию r до них***.

Закон Хаббла:

$$\upsilon\cos\theta \approx cz = Hr$$

$H = 73{,}2$ км/(с·Мпк) – постоянная Хаббла.

1 пк (парсек) – расстояние, которое свет проходит в вакууме за 3,27 лет

$$1\,\text{пк} \approx 3{,}09 \cdot 10^{16}\ \text{м}$$

На эффекте Доплера основаны радиолокационные, лазерные методы измерения скоростей различных объектов на Земле (например, автомобиля, самолета и др.).

Лекция окончена!