# Инновационный Евразийский Университет

Кафедра «Стандартизация и технологическое оборудование»

**Слайд-лекции**

по дисциплине

**«Теоретическая механика»**

**Разработал: ст. преподаватель, Доброродный В.Ф.**

# Содержание

# Лекция 1

Теоретическая механика - это наука о наиболее общих законах механического движения и равновесия материальных объектов.

Основные понятия и определения теоретической механики возникли на основании многочисленных опытов и наблюдений над явлениями природы с последующим абстрагированием от конкретных условий каждого опыта. В теоретической механике пользуются предельными абстракциями: материальная точка и абсолютно твердое тело. Приведенные абстракции позволяют изучать самые общие законы механического движения, что и соответствует основной задаче теоретической механики. Теоретическая механика является основой для изучения таких дисциплин как сопротивление материалов и детали машин.

Курс теоретической механики состоит из трех частей: статики, кинематики и динамики.

Статика – раздел теоретической механики, в котором изучается статическое равновесие материальных тел, находящихся под действием приложенных к ним сил.

Основные понятия статики:

1 Если некоторое тело не перемещается по отношению к другому телу, то говорят, что первое тело находится в состоянии относительного равновесия. Тело, по отношению к которому рассматривается равновесие других тел, называется телом отсчета.

2 Любое тело под действием приложенных к нему сил изменяет свои гео метрические размеры и форму, т.е. деформируется. В теоретической механике эти деформации не учитываются и рассматриваются только недеформируемые – абсолютно твердые тела. Тело называется абсолютно твердым, если расстояние между его любыми двумя точками остается постоянным.

3 Мерой механического взаимодействия тел является сила. Сила – величина векторная, она характеризуется точкой приложения, направлением и модулем (рис. 1.1). Единица измерения силы – ньютон (Н).

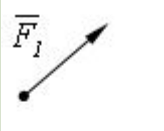



Рис.1.1

4 Совокупность сил, действующих на какое-либо тело, называется системой сил. Обозначается система $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n\}$ – система, состоящая из n сил.

5 Уравновешенной, или эквивалентной нулю, системой сил называется такая система сил, которая, будучи приложенной к твердому телу, не нарушает его состояния. То есть, если некоторое тело не изменяло свое положение относительно тела отсчета до приложения уравновешенной системы сил, то оно не изменит его и после приложени $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n\}$ той системы. Обозначается уравновешенная система сил так: <=>0 (<=> - знак эквивалентности).

6 Если к некоторому телу приложена систем $\{\bar F_1, \bar F_2, \bar F_3, \dots \bar F_n\}$ и к нему прикладываем еще $\{\bar Q_1, \bar Q_2, \bar Q_3, \dots \bar Q_n\}$, сил такую, что вместе с первой она будет составлять уравновешенную систему сил. В $\{\bar Q_1, \bar Q_2, \bar Q_3, \dots \bar Q_n\}$, систему называют уравновешивающей системой сил. Если уравновешивающая система сос $\bar Q_1$ оит из одной силы , то эта сила называется урав $\{\bar F_1, \bar F_2, \bar F_3, \dots \bar F_n\}$ щей силой для системы сил

7 Если каждая из двух систем си $\{\bar F_1, \bar F_2, \bar F_3, \dots \bar F_n\}$ и $\{\bar Q_1, \bar Q_2, \bar Q_3, \dots \bar Q_n\}$, равновешиваются одной и той же системой сил { , , , … }, то первые две системы сил эквивалентны $\{\bar F_1, \bar F_2, \bar F_3, \dots \bar F_n\}$ і $\{\bar Q_1, \bar Q_2, \bar Q_3, \dots \bar Q_n\}$, Вывод: замена системы сил, действующей на тело, системой ей эквивалентной не изменяет состояния, в котором находится данное тело.

8 Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется равнодействующей данной системы сил.

## Аксиомы статики

Аксиома 1. Свободное абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил, тогда и только тогда, когда силы действуют по одной прямой в противоположные стороны и имеют равные модули.

Аксиома 2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней присоединить или от нее отбросить систему сил эквивалентную нулю.

$$\{\bar F_1, \bar F_2, \bar F_3, \dots \bar F_n\} \Leftrightarrow \{\bar F_1, \bar F_2, \bar F_3, \dots \bar F_n, \bar Q_1, \bar Q_2, \bar Q_3, \dots \bar Q_n\};$$

$$\{\bar Q_1, \bar Q_2, \bar Q_3, \dots \bar Q_n\} \Leftrightarrow 0$$

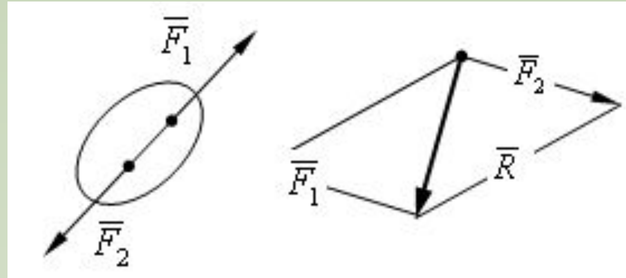



Рис. 1.2 Рис. 1.3

Аксиома 3. Две силы, приложенные в одной точке тела, эквивалентны равнодействующей, приложенной в той же точке и определяемой как диагональ параллелограмма, построенного на силах как на сторонах.

$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2\} \Leftrightarrow \overline{R}$

Аксиома 4. Силы взаимодействия двух тел равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Тело называется свободным, если его перемещения в пространстве ничем не ограничены. Если на перемещение точек тела накладываются ограничения, то тело называется несвободным или связанным. Материальные тела, ограничивающие перемещения данного тела называются связями. Сила, с которой связь действует на данное тело, называется реакцией связи. Сила действует на связь, а реакция связи на тело.

Аксиома 5. (Аксиома освобождения от связей). Равновесие тела не нарушится, если наложенные на него связи заменить реакциями связей.

Аксиома 6. (Аксиома о затвердевании). Равновесие деформируемого тела не изменится, если на него наложить дополнительные связи или оно станет абсолютно твердым.

## Следствия из аксиом

Следствие 1. Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно переносить в любую точку ее линии действия. При этом действие силы на тело не изменится.

Доказательство:

Пусть на твердое тело действует сила $\overline{F}$ , приложенная к точ $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2\} \Leftrightarrow 0,$ 4). Приложим в некоторой точке **B** линии дей $\overline{F}_1 = \overline{F} = \overline{F}_2$ силы F систему сил ч то допускается на основани $\{\overline{F}, \overline{F}_1, \overline{F}_2\} \Leftrightarrow \overline{F}.$ Примем $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2\} \Leftrightarrow 0$

В результате получим систему сил . Заметим, что $\overline{F} \Leftrightarrow \{\overline{F}, \overline{F}_1, \overline{F}_2\} \Leftrightarrow \overline{F}_1.$ основании аксиомы 2 эту систему сил можно отбросить. Получаем

Вывод: Сила является скользящим вектором.

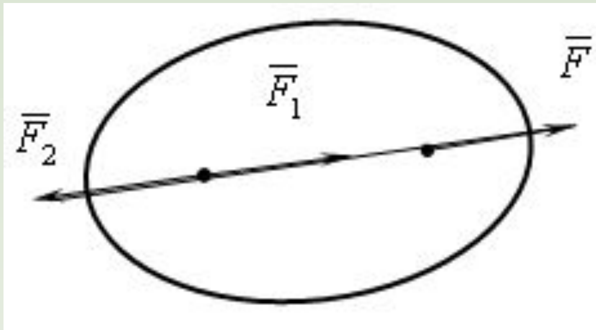



Рис. 1.4

Следствие 2. Теорема о необходимом условии равновесия тела, находящимся под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости.

Если свободное тело находится в состоянии равновесия под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Доказательство:

Пусть к телу приложены три силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ (рис. 1.5). $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\} \Leftrightarrow 0$. Поскольку линии действия сил непараллельны, то любые две из них (пусть и ) пересекутся в некоторой точке **О**. Перенесем $F_1$ и $F_2$ в точку **О** и заменим эти силы равнодействующей . Получим $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\} \Leftrightarrow \{\overline{R}, \overline{F}_3\}$, а для того чтобы тело находилось в равновесии, необходимо выполнение усл $\overline{R} = \overline{F}_3$, , и они должны быть направлены по одной прямой в противоположные стороны. То есть линия действия силы должна проходить через точку пересечения линий действия сил $F_1$ и $F_2$ .

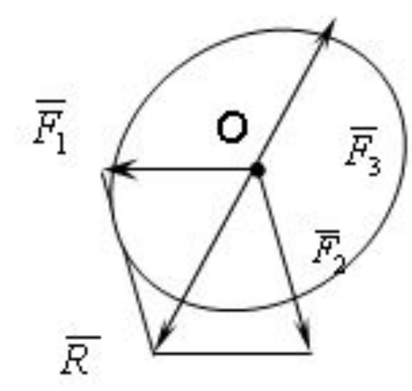



Рис. 1.5

# Лекция 2

## Виды связей и их реакции

При решении технических задач возникает необходимость поиска реакций различных связей. Общее правило, которое следует применять, состоит в следующем: если ограничиваются перемещения какой-либо точки тела, то реакцию следует прикладывать в этой точке в сторону, противоположную направлению, в котором ограничивается перемещение.

**Основные типы связей:**

1 Гладкая поверхность или опора. Гладкой считается поверхность, трением о которую можно пренебречь. Реакция гладкой поверхности сводится только к реакции , направленной по общей нормали к контактирующим поверхностям, в предположении, что эта нормаль существует (рис. 2.1.а). Если общей нормали не существует, то есть одна из поверхностей имеет угловую точку или «заострение», реакция направлена по нормали к другой поверхности (рис. 2.1.б).

2 Шероховатая поверхность - это поверхность трением, по которой пренебрегать нельзя. Реакц $\overline{F}_{тр}$ R шероховатой поверхности складывается из нормальной реакции N и силы трения . (рис 2.2). Модуль *R* о

$$R=\sqrt{N^2+F_{тр}^2}\ . \qquad (2.1)$$

3 Гибкая связь. К этому типу связи относятся связи, осуществляемые с помощью цепи, троса, каната и т. д. Реакция такой связи всегда направлена

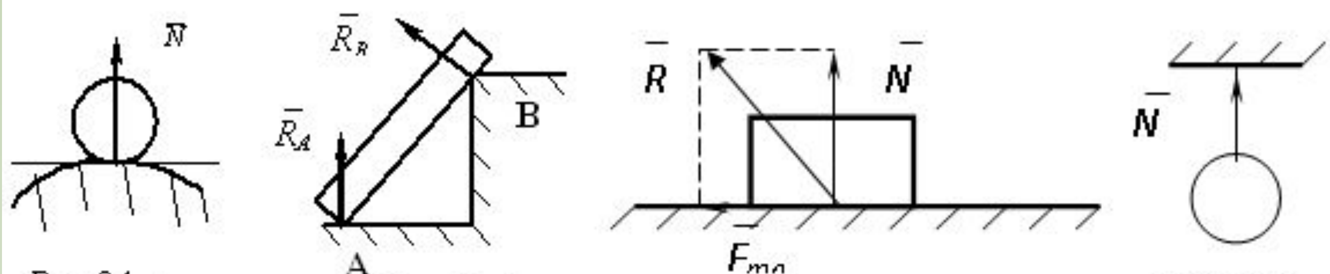


Рис. 2.1. а Рис. 2.1 б Рис. 2.2 Рис. 2.3

4 Цилиндрический шарнир (рис. 2.4) и подшипник (опора В рис.2.5). Цилиндрическим шарниром называется соединение двух или более тел по средством цилиндрического стержня, так называемого пальца, вставленного в отверстия в этих телах. Цилиндрический шарнир препятствует перемеще нию по любому направлению в плоскости XOY. Реакция R неподвижного цилиндрического шарнира (шарнирно-неподвижной опоры) представляется в виде неизве $\overline{R}_x$ и $\overline{R}_y$, составляющих , линии действия которых параллельны или совпадают с осями координат (рис. 2.4).

5 Подпятник (опора А рис. 2.5) и сферический шарнир (рис. 2.6). Такой вид связи можно представить в виде стержня, имеющего на конце сферическую поверхность, которая крепится в опоре, представляющей собой часть сферической полости. Сферический шарнир препятствует перемещению по любому направлению в пространстве, поэтому реакция его представляется в виде трех сос $\overline{R}_x, \overline{R}_y, \overline{R}_z,$ к параллельных соответствующим координатным осям.

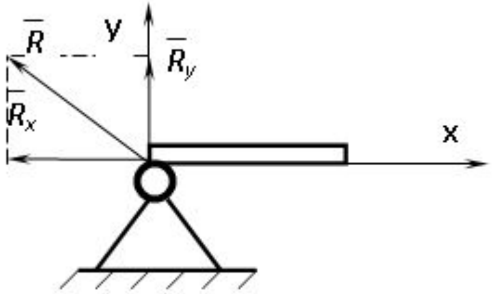



Рис. 2.4

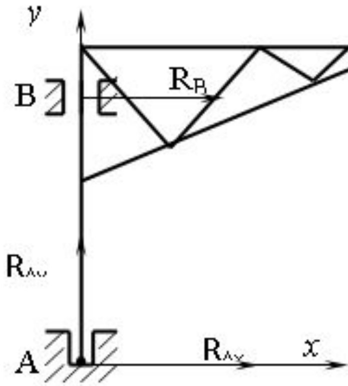



Рис.2.5

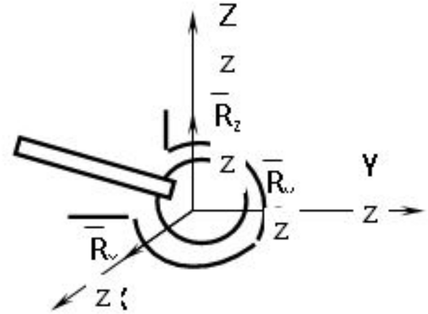



Рис. 2.6

6 Шарнирно-подвижная опора. Этот вид связи конструктивно выполняется в виде цилиндрического шарнира, который может свободно перемещаться вдоль поверхности. Реакция шарнирно-подвижной опоры всегда направлена перпендикулярно опорной поверхности (опора А рис. 2.7).

7 Шарнирно-неподвижная опора. Реакция R шарнирно-неподвижной опоры представляется в виде неизвестных составляющи $\bar{R}_x$ и $\bar{R}_y$, линии действия которых параллельны или совпадают с осями координат (опора В рис. 2.7).

8 Невесомый стержень (прямолинейный или криволинейный), закрепленный по концам шарнирами. Реакция такого стержня является определенной и направлена вдоль линии, соединяющей центры шарниров (рис. 2.8).

9 Жесткая заделка. Это необычный вид связи, так как кроме препятствия перемещению в плоскости XOY, жесткая заделка препятствует повороту стержня (балки) относительно точки **А**. Поэтому реакция связи сводится не только к реакции R ($R_{ax}$, $R_{ay}$), но и к реактивному моменту $M_{pa}$ (рис. 2.9).

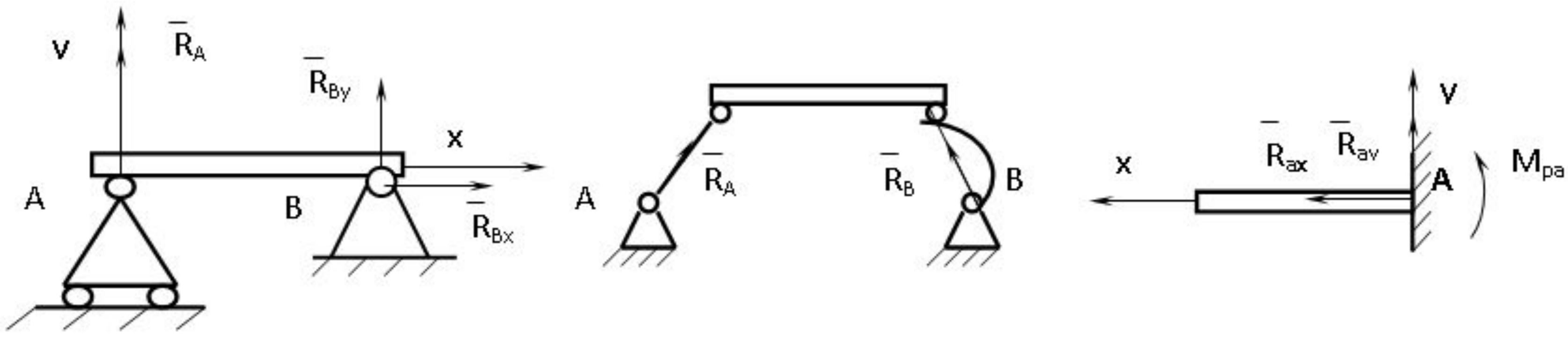



Рис. 2.7 Рис. 2.8 Рис. 2.9

## Плоская система сходящихся сил

Системой сходящихся сил называется система сил, линии, действия которых пересекаются в одной точке. Эту точку называют точкой схода сил.

**Геометрический метод сложения сил**

Теорема. Система сходящихся сил на плоскости эквивалентна равнодействующей, приложенной в точке схода и равной геометрической сумме сил.

Дока $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n\}$

Пусть система сходящихся сил, а точка **О** – точка схода (рис. 2.10). Пользуясь $(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \Leftrightarrow \overline{R}_{12}$, статики, привед $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n\}$ сил к точке схода, и заменим систему сил то есть получим $\{\overline{R}_{12}, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n\}$, эквивалентную $(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \Leftrightarrow \overline{R}_{123}$

$$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n\} \Leftrightarrow \overline{R}.$$

Затем заменим и т. д., в итоге получим одну силу, приложенную в точке **О**, то

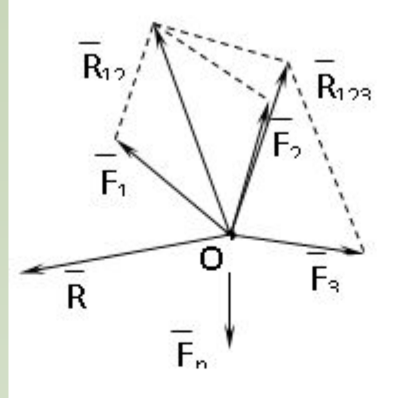



Рис. 2.10

**Аналитический способ нахождения равнодействующей**

Геометрический способ нахождения равнодействующей системы сил сопряжен с определенными трудностями, особенно в случае большого числа сил. Поэтому предпочтительнее аналитический метод нахождения ра$\{\bar F_1, \bar F_2, \bar F_3, \dots \bar F_n\}$ующей.

Пусть $\bar R_x$ и $\bar R_y$ система сходящихся сил на плоскости имеет равно действующую . Обозна$\bar X_1, \bar Y_1; \bar X_2, \bar Y_2; \dots \bar X_n, \bar Y_n;$ проекции это$\{\bar F_1, \bar F_2, \bar F_3, \dots \bar F_n\}$ействующей на оси системы координат XOY, а через проекции сил на те же оси. Из математики известно, что проекция суммы векторов на какую – либо ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

Тог

$$\left.\begin{aligned} R_x &= X_1 + X_2 + X_3 \dots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \\ R_y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 \dots + Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i. \end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

Модуль равнодействующей равен:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \qquad (2.3)$$

Направляющие косинусы вектора R можно найти по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{R_x}{R}, \\ \cos\beta &= \frac{R_y}{R}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Условие равновесия системы сходящихся сил в геометрической и аналитической форме.

В геометрической форме: для равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием плоской сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник был замкнут (рассмотрим на примере пло $\{\bar F_1, \bar F_2, \bar F_3, \bar F_4\}$ йся системы сил (рис. 2.11).

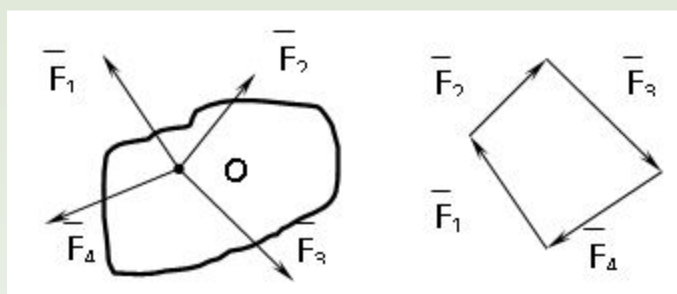



Рис. 2.11

В аналитической форме: Для равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием плоской сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из осей равнялась нулю:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} X_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n} Y_j &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (2.5)$$

# Лекция 3

## Момент силы относительно точки

Рассмотрим силу F и точку **О**, не лежащую на линии действия силы (рис. 3.1). Из точки **О** опустим перпендикуляр на линию действия силы. Длина этого перпендикуляра *h* называется плечом силы относительно точки **О**. Очевидно сила F вызовет вращение тела относительно точки **О**. Вращательный эффект действия силы на тело можно определить как алгебраический момент силы относитель

$$M_o(F) = \pm Fh. \quad (3.1)$$

Момент силы *F* считается положительным, если сила стремится повернуть плоскость, в которой она лежит, против направления движения часовой стрелки вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости и проходящей через точку **О**.

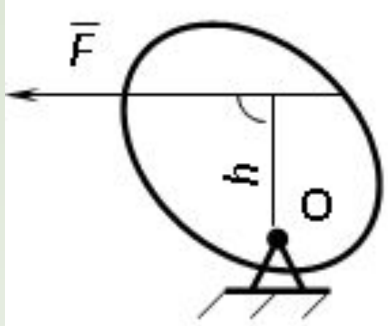



Рис. 3.1

## Момент силы относительно оси

Вращательный эффект действия силы на тело относительно оси определяется моментом силы относительно оси. Момент силы относительно оси находится иначе, чем момент силы относительно точки.

Алгебраический момент силы относительно некоторой оси равен алгебраическому моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения плоскости с осью (рис. 3.2).

**Правило нахождения момента относительно оси:**

1 Необходимо спроецировать силу F на плоскость α перпендикулярную оси **z**.

2 Подсчитать момент проекции силы $\bar{F}_{\alpha}$ относительно точки пересечения оси с плоскостью

$$M_z(F) = \pm F_{\alpha} h. \qquad (3.2)$$

Момент силы относительно оси считается положительным, если при взгляде с положительного направления оси проекция силы $\bar{F}_{\alpha}$ стремится повернуть тело против часовой стрелки.

Аксиома: сила, параллельная оси, и сила пересекающая ось, не создают вращения относительно этой оси, то есть моменты таких сил относительно оси равны нулю.

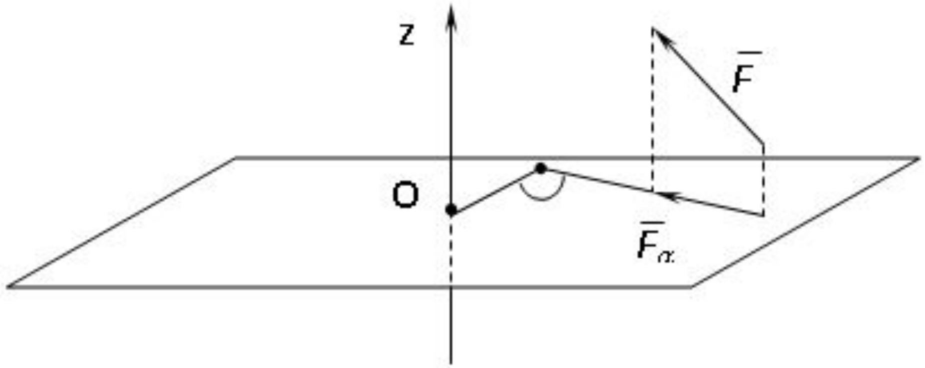



Рис. 3.2

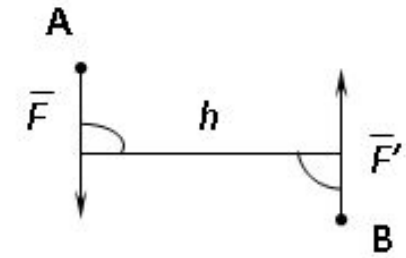



Рис. 3.3

Парой сил называется система двух сил $\bar{F}$ и $\bar{F}'$ (рис. 3.3), приложенных к твердому телу, удовлетворяющая следующим условиям:

1 Линии действия сил параллельны.

2 Модули сил равны ($F = F'$).

3 Направления действия сил противоположны.

Плоскость, на которой лежат линии действия пары сил, называется плоскостью действия пары. Расстояние *h* между линиями действия сил $\bar{F}$ и $\bar{F}'$ называется плечом пары. Совокупность пар, приложенных к телу, называется системой пар.

Пара сил, приложенная к телу, стремится сообщить ему некоторое вращение. Вращательный эффект пары характеризуется ее моментом. Моментом пары сил называется произведение модуля одной из сил пары на ее плечо, взятое со знаком «+» или «−»

$$M = \pm Fh. \qquad (3.3)$$

Момент пары считается положительным, когда пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и отрицательным - когда по ходу часовой стрелки.

Теорема об эквивалентных парах. Две пары сил, лежащие на одной плоскости и имеющие равные алгебраические величины моментов, эквивалентны.

Доказатель $(\overline{F}, \overline{F}')$ и $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$

Пусть $M(\overline{F}, \overline{F}') = M(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$. две пары сил, лежащие в одной плоскости и имеющие равные моменты Продолжим линии действия сил пересечения друг с

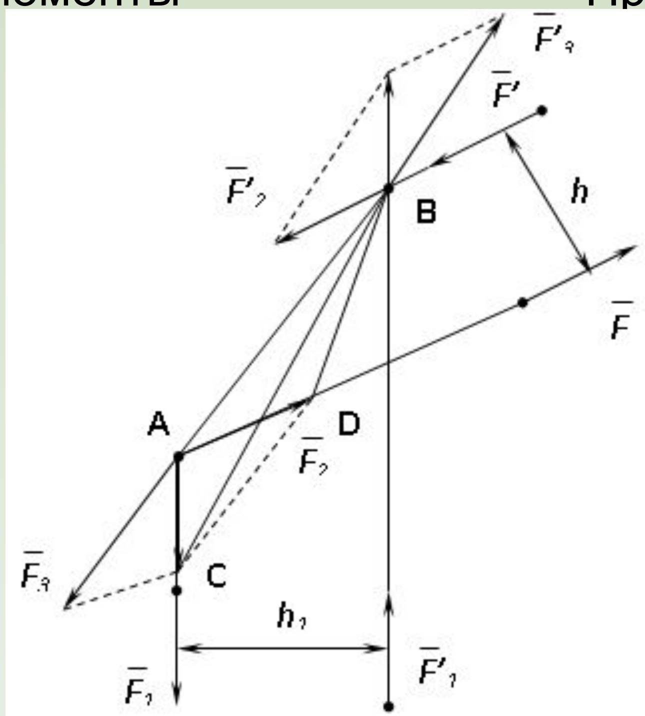



Рис. 3.4

Перенесем силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_1'$ по линиям действия в точки **A** и **B** и разложим каждую из них на составляющие. $\{\overline{F}_1, \overline{F}_1'\} <=> \{\overline{F}_2, \overline{F}_2', \overline{F}_3, \overline{F}_3'\}$.

Из построения имеем $\overline{F}_2 = -\overline{F}_2'$, $\overline{F}_3 = -\overline{F}_3'$, так как $\overline{F}_3$ и $\overline{F}_3'$ направлены по одной прямой, то

$\{\overline{F}_3, \overline{F}_3'\} <=> 0$, а $\{\overline{F}_1, \overline{F}_1'\} <=> \{\overline{F}_2, \overline{F}_2'\}$.

Докажем эквивалентность пар $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$ и $(\overline{F}, \overline{F}')$. Для этого достаточно до $\overline{F}_2 = \overline{F}$ что $(\overline{F}_2, \overline{F}_2')$ и $(\overline{F}, \overline{F}')$ рав $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$ мент пары численно $(\overline{F}_2, \overline{F}_2')$

равен удвоенной площади треугольника **ABC**, а момент пары – удвоенной площади треугольника **ABD**. Но площади этих треугольников равны, так как у них общее основание $\overline{F}_2 = \overline{F}$, тогда $(\overline{F}, \overline{F}') <=> (\overline{F}_2, \overline{F}_2')$ и $(\overline{F}_1, \overline{F}_1') <=> (\overline{F}, \overline{F}')$. вершин **C** и **D**, то есть $F_2h=F_1h_1$, но так как $Fh=F_1h_1$, то $F_2h=Fh$, следовательно,

Следствия из теоремы об эквивалентных парах:

1 Пару сил можно переносить в любое место плоскости ее действия.

2 Действие пары сил на тело не изменится, если изменить значения модуля силы и плеча, оставляя величину момента прежней.

3 Пару сил можно переносить в плоскость, параллельную плоскости действия.

Теорема о сложении пар сил. Пары сил, лежащие в одной плоскости можно складывать. В результате сложения получается лежащая на той же плоскости пара сил с моментом, равным алгебраической сумме моментов слагаемых пар.

Доказательство:

Докажем для двух пар. Пусть $(\overline{F}_2, \overline{F}_2')$ и $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$ – пары, лежащие на одной плоскости и имеющие моменты $M_1 = F_1 h_1$ и $M_2 = F_2 h_2$. Возьмем произвольный отрезок **AB**=$h$ (рис. 3.5). На основании теоремы об эк $(\overline{F}_3, \overline{F}_3')$ и $(\overline{F}_4, \overline{F}_4')$, можно заменить вве $F_3 = \frac{|M_1|}{h}; F_4 = \frac{|M_2|}{h}$. эквивалентными им парами … Сложив силы в точке **A**, получим

$$\overline{F} = \overline{F}_3 + \overline{F}_4;\ \text{в точке } \mathbf{B} - \overline{F}' = \overline{F}_3' + \overline{F}_4';\ \overline{F} = -\overline{F}'.$$

$$M = Fh = (F_3 + F_4)h = F_3 h + F_4 h = M_1 + M_2.$$

Справедливо для любого числа пар:

$$M_\Sigma = M_1 + M_2 \ldots + M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i. \qquad (3.4)$$

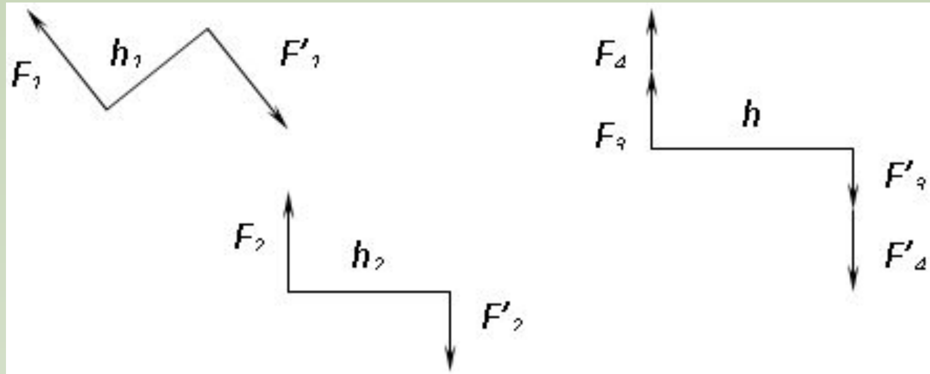



Рис. 3.5

## Равновесие рычага

Рычагом называется твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси и находящееся под действием сил, лежащих в плоскости перпендикулярной к этой оси. Если на рычаг действует сходящаяся система сил, то равновесие рычага достигается, когда линия действия равнодействующей проходит через точку **О** (рис. 3.6), а алгебраическая сумма моментов приложенных к нему сил относительно точки **О** равна нулю:

$$F_2 h_2 - F_1 h_1 = 0,$$

$$F_2 h_2 = F_1 h_1, \qquad (3.5)$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Рассмотрим случай, когда на рычаг действует система параллельных сил, лежащих в одной плоскости. Приложенная к рычагу система параллельных сил может быть приведена или к одной равнодействующей, или к паре.

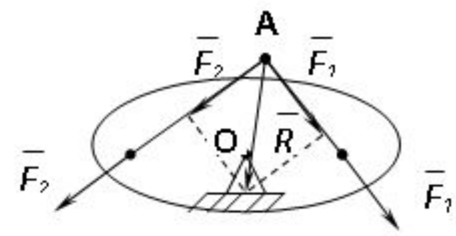



Рис. 3.6

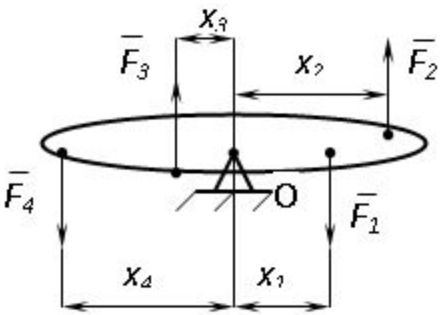



Рис. 3.7

Сложим все силы, направленные ввер $\overline{R} = \sum_{i=1}^{k} \overline{F_i}$

и вниз: $\overline{R}' = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$ , соответственно.

Найти точки приложения равнодействующих можно по формулам

$$x_R = \frac{\sum_{i=1}^{k} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} F_i},$$

$$x_{R'} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \qquad (3.6)$$

В итоге возможны три случая:

1) $\bar{R} \neq \bar{R}'$ , тогда система сводится к одной равнодействующей.

2) $\bar{R} = \bar{R}'$ - система не имеет равнодействующей и сводится к паре сил.

3) $\bar{R} = \bar{R}'$ , и они направлены по одной прямой, тогда система представляет собой уравновешенную систему сил.

Если система параллельных сил, приложенная к рычагу, сводится к паре, то равновесия рычага быть не может, так как реакция шарнира **О** (рис. 3.7) не может уравновесить пару. То есть, при равновесии рычага приложенная к нему система параллельных сил приводится к равнодействующей силе, проходящей через неподвижную точку рычага.

**Произвольная плоская система сил**

Лемма Пуансо. Действие силы на твердое тело не изменится, если перенести эту силу параллельно своему первоначальному положению в любую точку тела, приложив при этом к телу пару с моментом, равным моменту исходной силы относительно этой точки.

Доказательство: Пусть сила F приложена к телу в некоторой его точке **А** (рис. 3.8). Приложим в произвольной точке **О** параллельно направлению линии действия силы F $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, ы , равные по модулю силе и направленные в противоположные стороны. П $\{\bar{F}, \bar{F}', \bar{F}''\} <=> \bar{F}$. ема сил Эту систему сил можно считать состоящей из силы , полученной параллельным переносом силы $(\bar{F}, \bar{F}'')$, у **О**, и пары называемой присоединенной парой с моментом, равным моменту силы F относительно точки **О**.

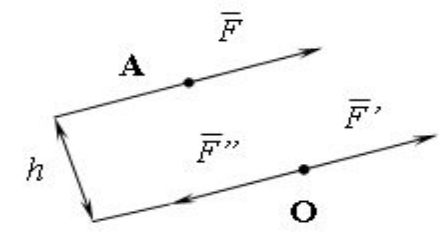



Рис. 3.8

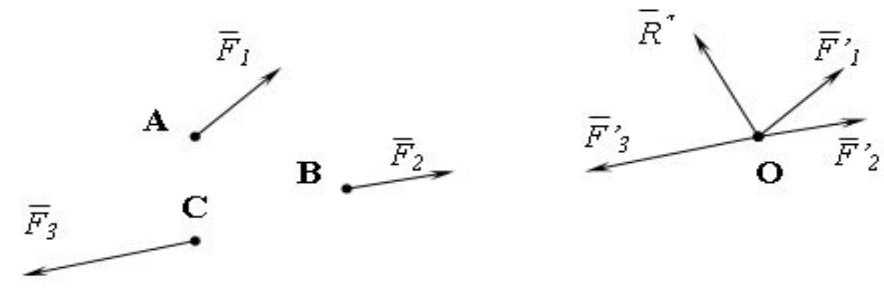



Рис. 3.9

**Приведение произвольной плоской системы сил к точке (основная теорема статики для произвольной плоской системы сил)**

Рассмотрим на примере трех сил. Пусть к телу в точках **A**, **B**, **C** приложена плоская сист $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ { } (рис. 3.9). Выберем произвольную точку **O**, перен $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ ее силы Согласно лемме Пуансо п $\overline{F}_1', \overline{F}_2', \overline{F}_3'$ сходящуюся $(\overline{F}_1, \overline{F}_1''), (\overline{F}_2, \overline{F}_2''), (\overline{F}_3, \overline{F}_3'')$ } и систему пар с моме $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ $_1$, $M_2$, $M_3$, равными моментам

сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ относительно точки **O**.

Слож ка, получим:

$$\overline{R}^* = \overline{F}_1' + \overline{F}_2' + \overline{F}_3' = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3. \qquad (3.7)$$

Вектор $\overline{R}^*$, равный геометрической сумме сил системы, называется главным вектором данной системы сил.

Теперь сложим пары сил, в результате получим пару сил с моментом

$$M_0 = M_1 + M_2 + M_3. \qquad (3.8)$$

$M_0$ - равен алгебраической сумме моментов сил и называется главным моментом системы сил относительно точки.

Теорема Вариньона. Если система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействующей относительно любой точки равен сумме моментов всех сил системы относительно той же точки.

Доказательство:

Пусть система си $\{\overline{F}_1', \overline{F}_2', \overline{F}_3'\}$ имеет равнодействующую (рис. 3.10), приложенную в некоторой точке **O**$_1$ плоскости действия сил. Перенесем вектор в точку **O**, при этом согласно лемме Пуан $(\overline{R}', \overline{R}'')$ одимо добавить пару с моментом $M_0=M(\mathrm{R})$. Но $M_0$ – главный момент системы сил относительно точки **O**, который равен алгебраической сумме моментов всех сил системы ьно этой точки:

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} M(\overline{F}_i).$$

Следовательно $$M_o(\overline{R}) = \sum_{i=1}^{n} M_o(\overline{F}_i).$$

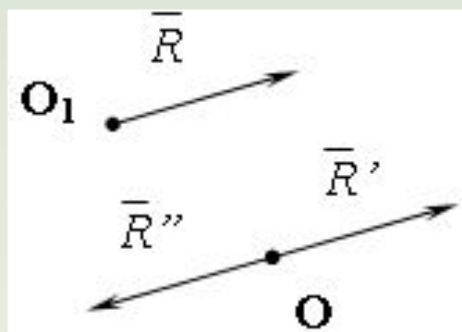



Рис. 3.10

Следствия из теоремы:

1. Главный вектор $\overline{R}^{*}$ не изменится при изменении центра приведения.
2. Главный момент при перемене центра приведения изменится на величину момента силы $\overline{R}^{*}$, приложенной в точке **О**, относительно нового центра.

**Условия равновесия**

Свободное твердое тело под действием произвольной плоской системы сил находится в равновесии, если главный вектор и главный момент этой системы относительно любой точки равны нулю: $\overline{R}^{*}=0$, $M_O=0$. Разложим $\overline{R}^{*}$ по осям

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_{kx}=0,\\&\sum F_{ky}=0,\\&\sum M_0(F_i)=0\end{aligned}\right\} \quad (3.9)$$

Условие равновесия для произвольной пространственной системы сил:

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_{kx}=0,\\&\sum F_{ky}=0,\\&\sum F_{kz}=0,\\&\sum M_x(F_i)=0,\\&\sum M_y(\overline{F}_i)=0,\\&\sum M_z(\overline{F}_i)=0.\end{aligned}\right\} (3.10)$$

# Лекция 4

**Кинематика**

В кинематике изучается движение материальных тел в пространстве с гео метрической точки зрения, без учета сил, определяющих это движение.

Всякое движение тел совершается в пространстве и во времени. Движение тел в пространстве рассматривается относительно выбранной системы координат, которая в свою очередь связана с каким-либо телом, называемым телом от счета. Тело отсчета и связанная с ним система координат называются системой отсчета. Пространство в механике рассматривается как трехмерное. За единицу длины при измерении расстояний принимается метр. Время в механике считается универсальным, то есть протекающим одинаково во всех системах отсчета. За единицу времени принимается секунда.

**Кинематика точки**

Непрерывная кривая, описываемая движущейся точкой в пространстве, называется траекторией точки.

**Способы задания движения точки**

Задать движение точки – значит задать ее положение относительно некоторой системы отсчета в любой момент времени.

Естественный способ задания движения точки (рис. 4.1). Задать движение точки естественным образом – значит:

а) задать траекторию движения точки в некоторой системе отсчета;

б) на траектории выбрать начало **O** и положительное направление отсчета расстояний $S$=**OM**;

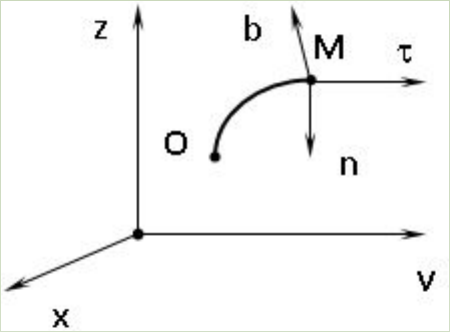



Рис. 4.1

в) указать закон движения точки *S=f(t)*, а также начало отсчета времени $t_0$.

Функция *S=f(t)* должна быть однозначной, непрерывной, дифференцируемой.

Закон движения точки может быть задан графически: кривой, отражающей зависимость *S* от *t*. Это графическое изображение закона движения точки называют графиком движения точки.

На рис. 4.1 т - ось, касательная к траектории движения точки, направленная в сторону положительного отсчета расстояния *S*; n – нормаль к траектории дви жения точки, направленная в сторону вогнутости траектории, b – бинормаль, перпендикулярна к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую тройку. Эти оси называются естественными осями.

Координатный способ. Положение точки в пространстве трех измерений можно однозначно определить, задав три ее координаты в некоторой системе отсчета. Задать движение точки в координатной форме – значит задать координаты этой точки как функции времени: *x=f(t), y=f(t), z=f(t).* Эти уравне ния называются уравнениями движения точки.

**Скорость точки**

Пусть движение точки задано естественным способом, и пусть в некоторый момент времени *t* точка занимала на траектории положение **M**, а в некоторый момент времени $t_1$ – по $\overline{MM_1}$ ение **M**$_1$ (рис. 4.2). Вектор называется вектором

$$\Delta t = t_1 - t$$

перемещения точки за промежуток времени: . Отношение вектора перемещения к промежутку времени, за который произошло это

ом средней скорости точки за промежуток

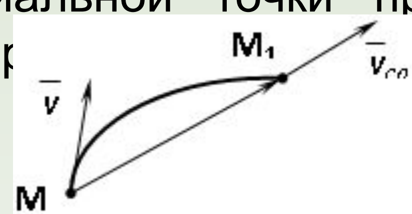
$$\bar{v}_{cp} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}. \qquad (4.1)$$

Вектором скорости в точке в момент времени *t* называется предел вектора

ежутка Δt к нулю,

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \qquad (4.2)$$

То есть скорость материальной точки при движении по произвольной криволинейной траектор по касательной к траектории в сторону движения.



Если движение точки задано координатным способом, и движущаяся точка в момент времени $t$ занимала положение **M** (x, y, z), а в момент времени $t_1$ – положение $\mathbf{M_1}$ (x+Δx, y+Δy, z+Δz), то вектор ср $\bar{v}_{cp} = \dfrac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$ скорости имеет

$\bar{v}_{cp}\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t};\dfrac{\Delta y}{\Delta t};\dfrac{\Delta z}{\Delta t}\right)$ ааты

, а вектор скорости в момент вре $v_x = \dfrac{dx}{dt},\ v_y = \dfrac{dy}{dt},\ v_z = \dfrac{dz}{dt}.$ ты $\bar{v}\left(\dfrac{dx}{dt};\dfrac{dy}{dt};\dfrac{dz}{dt}\right)$ .

Проекции вектора скорости на оси координат:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \qquad (4.3)$$

Косинусы углов, с $\cos\alpha = \dfrac{v_x}{v},\ \cos\beta = \dfrac{v_y}{v},\ \cos\gamma = \dfrac{v_z}{v}.$ корости с осями координат, можно найти из соотношени

**Ускорение точки**

Величину, определяющую изменение вектора скорости точки в зависимости от времени, называют ускорением точки.

Пусть движение точки задано естественным способом (рис. 4.3), а траекторией движения точки является дуга окружности. Допустим, что в некоторый момент времени $t$ точка занимала положение **M** на траектории и имела скорость $v$, а в момент времени $t_1=t + \Delta t$ – положение $\mathbf{M_1}$ и скорость $v_1$. Перенесем вектор в точку **M** и построим вектор:

$$\overline{NL} = \Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}. \qquad (4.4)$$

Вектор Δv называется вектором приращения скорости. Вектор $\bar{a}_{ср}$ равен отношению приращения скорости Δv к соответствующему приращению времени $\Delta t$.

$$\bar{a}_{ср} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}. \qquad (4.5)$$

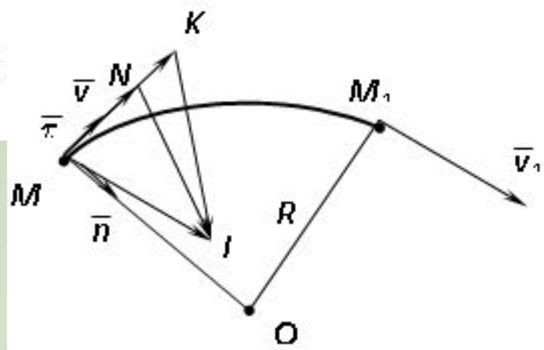


Рис. 4.3

Вектором ускорения $\bar{a}$ точки в момент времени *t* называется предел вектора среднего ускорения при стремлении промежутка времени *Δt* к нулю.

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}. \qquad (4.6)$$

От точки **М** отложим по линии действия вектора $\bar{v}$ вектор $\overline{MK}$, равный по абсолютной величине вектору $\bar{v}_1$. Приращение скорости представим в

$$\Delta \bar{v} = \overline{NK} + \overline{KL}. \qquad (4.7)$$

-

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{NK} + \overline{KL}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{NK}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{KL}}{\Delta t}. \qquad (4.8)$$

Вычислим первый предел. Для этого введем на касательной к траектории движения точки в точке **М** единичный вектор $\bar{\tau}$.

$$\overline{NK} = NK\bar{\tau} = (MK - v)\bar{\tau} = (v_{1a} - v_a)\bar{\tau} = \Delta v_a \bar{\tau}, \qquad (4.9)$$

где $\Delta v_a$ – приращение алгебраической величины скорости.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \overline{NK} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_a}{\Delta t}\bar{\tau} = \frac{dv_a}{dt}\bar{\tau} = \bar{a}_\tau. \qquad (4.10)$$

$\bar{a}_\tau$ - тангенциальное (касательное) ускорение точки, характеризующее изменение алгебраической величины вектора скорости.

Второй предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{KL}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} = \bar{a}_n. \qquad (4.11)$$

Вектор $\bar{a}_n$ направлен перпендикулярно касательной к траектории движения точки, причем в сторону ее вогнутости. Вектор $\bar{a}_n$ носит название нормального ускорения точки и характеризует изменение направления вектора скорости. Введем на нормали единичный вектор n и запишем формулу для полного ускорения точки

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n = \frac{dv_a}{dt}\bar{\tau} + \frac{v^2}{R}\bar{n}. \qquad (4.12)$$

Модуль и направляющие косинусы полного ускорения найдутся по формулам:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ , \qquad (4.13)$$

$$\cos\alpha = \frac{a_\tau}{a};$$

$$\qquad (4.14)$$

$$\cos\beta = \frac{a_n}{a},$$

где *α* - угол между направлением вектора полного ускорения и единичного вектора *τ*, *β* - угол между направлением вектора полного ускорения и единичного вектора *n*.

# Лекция 5

**Виды движения точки в зависимости от ускорения**

Прямолинейное движение. В этом случае траектория движения точки – прямая, причем точка движется вдоль этой прямой в одном направлении. Радиус кривизны прямой R равен бесконечности (прямую можно считать окружностью бесконечно большого р$a_n = \frac{v^2}{R} = 0$а). Тогда , поэтому может изменяться только алгебраическая величина скорости точки. Это изменение полностью характеризуется к$a = a_\tau = \frac{dv}{dt}$ьным ускорением .

Равномерное криволинейное движение. Так как при равномерном движении точки модуль скорости остается постоянным, то есть $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$nst, тогда . Вектор полного ускорения a, следовательно, направлен по главной нормали в сторону вогнутости, модуль пол$a = a_n = \frac{v^2}{R}$скорения равен .

Равномерное прямолинейное движение. В этом случа$a_n = \frac{v^2}{R} = 0$ и$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ , а значит *a = 0*. Единственный вид движения, в котором ускорение точки все время остается равным нулю, - равномерное прямолинейное движение.

Равнопеременное криволинейное движение. Равнопеременным называется такое криволинейное движение точки, при котором касательное ускорение остается все время величинс$a_\tau = \frac{dv}{dt} = const$нной: . Если при равномерном криволинейном движении точки модуль скорости возрастает, то движение называется равноускоренным, а если убывает – равнозамедленным.

**Кинематика движения твердого тела**

При произвольном движении твердого тела отдельные его точки движутся по различным траекториям и имеют в каждый момент времени различные ско рости и ускорения. Основными задачами кинематики твердого тела являются:

а)установление способа задания движения тела;

б) изучение кинематических характеристик движения;

с) определение траекторий, скоростей и ускорений всех точек движущегося тела.

**Поступательное движение твердого тела**

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором отрезок прямой, соединяющий две произвольные точки тела, остается во время движения параллельным своему первоначальному положению.

Основная теорема поступательного движения. При поступательном движении твердого тела все его точки описывают конгруэнтные траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Доказательство:

Пусть твердое тело, совершающее движение относительно некоторой системы координат, занимает в момент времени $t$ положение I, в момент $t_1$ – положение II, в момент $t_2$ – положение III и т. д. (рис. 5.1). Выберем в теле две произвольные точки **A** и **B** и построим вектор .

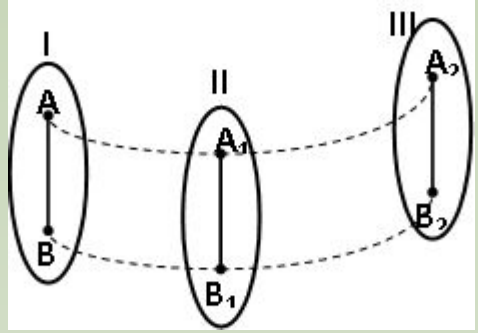



Рис. 5.1

Обозначим через $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_2}$ положения, которые занимают точки **А** и **В** в моменты времени $t_1$ и $t_2$ соответственно. Длина вектора АВ как расстояние между точками абсолютно твердого тела, постоянна. Направление АВ не изменяется в силу того, что тело движется поступательно. В этом случае траекторию точки **В** можно получить параллельным переносом на вектор АВ траектории точки **А**. Следовательно, кривые $\mathbf{BB_1B_2}$ и $\mathbf{AA_1A_2}$ при наложении совпадают. $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ $\overline{AA_1}=\overline{BB_1}.$

Так как векторы равны, будут равны пере $\Delta t = t_2 - t_1$ ещения точек **А** и **В**, то есть

$$\frac{\overline{AA_1}}{\Delta t}=\frac{\overline{BB_1}}{\Delta t}$$

есем эти перемещения к отрезку времени , за который они произошли

$$\bar{v}_A=\bar{v}_B=\bar{v}\ , \qquad (5.1)$$

зе к пределу при Δt→0, получим в твии с определением скорости точки,

$\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$

где – скорости точек **А** и **В**.

Точки **А** и **В** выбраны произвольно, следовательно при поступательном движении твердого тела векторы скоростей всех его точек в данный момент времени равны друг другу.

Так как равенство (5.1) имеет место в любой мом $\bar{v}_A(t) = \bar{v}_B(t) = \bar{v}(t)$ , то . Дифференцируя (5.1) по $t$ получи $\frac{d\bar{v}_A}{dt} = \frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ , или

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B = \bar{a}. \qquad (5.2)$$

В силу произвольности выбора точек А и В из равенства (5.2) следует, что векторы ускорения всех точек поступательно движущегося твердого тела равны между собой.

Следствия из теоремы:

а) поступательное движение твердого тела вполне определено движением одной из его точек;

б) если скорость поступательного движения постоянна ($v = const$), то все точки тела совершают прямолинейное и равномерное движение.

**Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси**

Вращательным движением твердого тела называется движение, при котором две его точки **А** и **В** остаются неподвижными. Так как тело абсолютно твердое, то вместе с точками **А** и **В** будут неподвижны все точки, лежащие на прямой **АВ**. Эта прямая называется осью вращения (рис. 5.2). Все точки тела при вращательном движении описывают дуги окружностей с центрами в основаниях перпендикуляров, опущенных из этих точек на ось вращения. Проведем через ось вращения две полуплоскости, одну из которых зафиксируем, а другую свяжем с телом. Двугранный угол ϕ, угол поворота, между этими полуплоскостями будет однозначно определять положение тела. Задавая значение угла ϕ в каждый момент времени $t$, можно тем самым определить положение тела для любого $t$.

Уравнение

$$\varphi = f(t) \qquad (5.3)$$

носит название закона вращательного движения тела. Функция (5.3) предполагается дважды дифференцируемой.

Главными кинематическими характеристиками вращательного движения тела будут угловая скорость ω ($c^{-1}$) и угловое ускорение ε ($c^{-2}$).

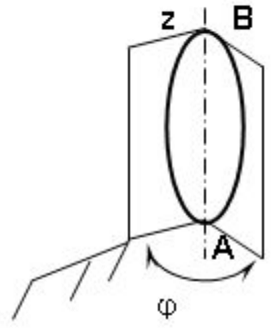
Пусть за некоторый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ угол *ϕ* получит приращение $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Величина называется средней угловой скоростью тела. Предел, к которому стремится средняя угловая скорость при Δt→0, называется угловой скоростью тела в данный момент времени *t*.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (5.4)$$

Если тело совершает вращательное движение по произвольному закону, то угловая скорость является функцие $\omega = f(t)$. ни:

Пусть за некоторый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ угловая скорость получила приращение $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Величина $\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ называется средним угловым ускорением. Предел, к которому стремится среднее ускорение при *Δt→ 0*, называется угловым ускорением в данный момент времени t.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (5.5)$$



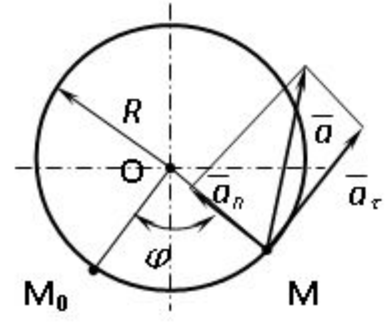




Рис. 5.2 Рис. 5.3

**Связь угловых характеристик вращающегося твердого тела с линейными кинематическими характеристиками вращающегося тела**

Как уже отмечалось, траекторией любой точки **M** вращающегося тела является дуга окружности, лежащая в плоскости перпендикулярной оси вращения. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки до оси. Рассмотрим траекторию движения некоторой точки **M** тела, вращающегося вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через центр окружности (рис. 5.3).

Если отсчитывать дуговую координату s точки **M** от ее начального положения $\mathbf{M_0}$ в направлении $s(f) = R\varphi(f)$. ия угла ϕ, то закон движения точки **M** по дуге окружности будет иметь вид . В этом случае алгебраическое формуле:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\varphi) = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega. \qquad (5.6)$$

Найдем ускорение точки **M**:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n = \frac{dv_a}{dt}\bar{\tau} + \frac{v^2}{R}\bar{n}.$$

Продифференцировав (5.6) по времени, определим алгебраическую величину касательного ускорения:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon. \qquad (5.7)$$

Нормальное ускорение получим, подставляя (5.6) в выражение для нормального ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R. \qquad (5.8)$$

Следовательно, для вектора ускорения имеем:

$$a = R\varepsilon\overline{\tau} + \omega^2 R\overline{n}. \qquad (5.9)$$

Для модуля ускорения точки М имеем формулу:

$$a = \sqrt{R^2\varepsilon^2 + R^2\omega^4} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (5.10)$$

Из выражений (5.6) и (5.10) следует, что линейные кинематические характеристики точек зависят от угловых характеристик вращающегося твердого тела, а коэффициентом пропорциональности является радиус вращения.

**Сложное движение точки**

До сих пор движение точки рассматривалось по отношению к неподвижной системе координат, но в ряде случаев целесообразно изучать движение точки одновременно в двух системах отсчёта, из которых одна является неподвижной, а другая - подвижной, совершающей определённым образом движение относительно первой. Движение точки, в этом случае, называют сложным.

На рис. 5.4 изображены две системы координат: неподвижная **Oxyz** и подвижная $O_1x_1y_1z_1$. Движение, совершаемое точкой **M** по отношению к подвижной системе координат $O_1x_1y_1z_1$ называется относительным движением.

Движение подвижной системы отсчёта $O_1x_1y_1z_1$ и всех точек пространства с ней связанных по отношению к неподвижной системе **Oxyz** называется переносным движением. Движение точки **M** относительно неподвижной системы координат **Oxyz** называется абсолютным. Скорость точки **M** по отношению к неподвижной системе координат называется абсолютной скоростью точки.

Скорость точки **M** по отношению к подвижной системе координат называется относительной скоростью точки.

Переносной скоростью точки **M** называется скорость подвижной системы относительно неподвижной, в которой в данный момент времени находится движущаяся точка **M**.

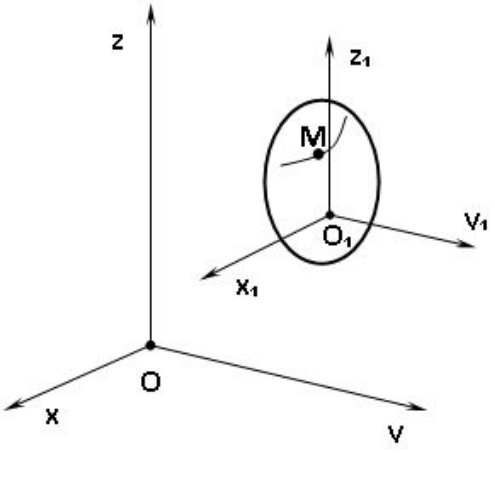



Рис. 5.4

Теорема о скорости точки в сложном движении.

Вектор абсолютной скорости точки в данный момент времени равен геометрической сумме векторов относительной и переносной скоростей в тот же момент времени.

Доказательство.

Пусть тело **S**, неизменно связанная с ним подвижная система отсчёта $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и точка $\mathbf{M_1}$ занимают в момент времени $t_1$ положение I (рис. 5.5) относительно неподвижной системы **Oxyz**. Пусть в момент времени $t_2=t_1+\Delta t$ тело **S** и система $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ займут положение II, а точка $\mathbf{M_1}$ перейдёт в точку $\mathbf{M_2}$. Буквой **M'** обозначим положение той точки тела **S**, в которую переместится за время $\Delta t$ его точка, сов

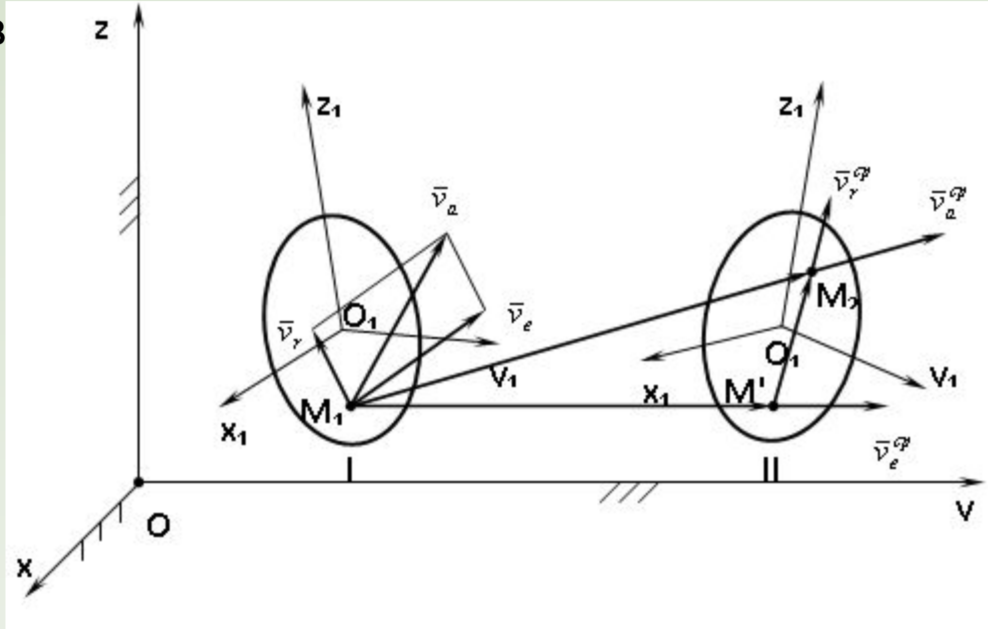



Рис. 5.5

Вектор $\overline{M_1M'}$ изображает абсолютное перемещение точки, вектор относительное перемещение, вектор переносное перемещение точки за время *Δt*. Для этих векторов справедливо следующее равенство

$$\overline{M_1M_2} = \overline{M_1M'} + \overline{M'M_2}. \quad (5.11)$$

Разделив (5.11) почлено на *Δt*, получим

$$\bar{v}_a^{cp} = \bar{v}_e^{cp} + \bar{v}_r^{cp}, \quad (5.12)$$

где

$\bar{v}_a^{cp} = \dfrac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t}$ - средняя абсолютная скорость;

$\bar{v}_e^{cp} = \dfrac{\overline{M_1M'}}{\Delta t}$ - средняя переносная скорость;

$\bar{v}_r^{cp} = \dfrac{\overline{M'M_2}}{\Delta t}$ - средняя относительная скорость.

Переходя в (5.12) к пределу при *Δt* стремящемся к нулю, получим

$$\lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_a^{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_e^{cp} + \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_r^{cp}, \text{ или } \bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r \quad (5.13)$$

Теорема доказана.

Согласно доказанной теореме вектор абсолютной скорости $\bar{v}_a$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на векторах переносной $\bar{v}_e$ и относительной скоростей $\bar{v}_r$. Модуль вычисляется по теореме косинусов

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos\gamma}, \quad (5.14)$$

где γ - угол между векторами переносной и относительной скоростей.

**Понятие о плоскопараллельном движении твердого тела**

Движение твердого тела называется плоскопараллельным, если все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой фиксированной плоскости (основной плоскости).

Пусть некоторое тело V совершает плоское движение, π - основная плоскость (рис. 5.4). Из определения плоскопараллельного движения и свойств абсолютно твердого тела следует, что любой отрезок прямой AB, перпендикулярный плоскости π, будет совершать поступательное движение. То есть траектории, скорости и ускорения всех точек отрезка AB будут одинаковы. Таким образом, движение каждой точки сечения s параллельного плоскости π, определяет собой движение всех точек тела V, лежащих на отрезке перпендикулярном сечению в данной точке.

Примерами плоскопараллельного движения являются: качение колеса по прямолинейному отрезку, так как все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости, перпендикулярной оси колеса; частным случаем такого движения является вращение твердого тела вокруг неподвижной оси, в самом деле, все точки вращающегося тела движутся в плоскостях параллельных некоторой перпендикулярной оси вращения неподвижной плоскости.

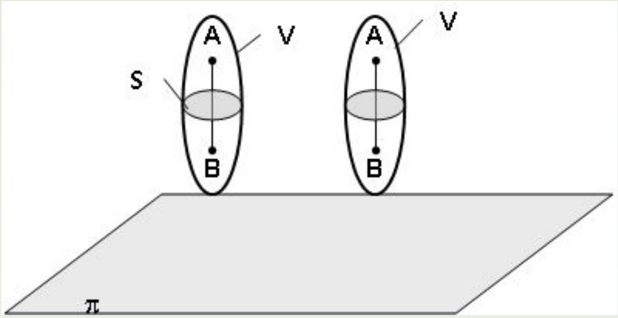



Рис. 5.4

Теорема о возможности представления плоскопараллельного движения в виде совокупности двух движений: поступательного и вращательного.

Пусть некоторое тело совершает плоскопараллельное движение. Рассмотрим некоторое сечение этого тела параллельное основной плоскости.

Произвольно выбранную точку сечения или плоскости, которой принадлежит сечение и которая неизменно связана с сечением, называют полюсом.

Теорема. Всякое перемещение плоской фигуры в её плоскости может быть представлено в виде совокупности двух движений: поступательного и вращательного.

Доказательство.

Пусть плоская фигура за некоторый промежуток времени $\Delta t$ переместилась из положения I в положение II (рис. 5.7). Положение произвольно выбранного отрезка неизменно связанного с фигурой, определяет положение всей фигуры в любой момент времени. Выберем две произвольные точки фигуры $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{B_1}$ и примем точку $\mathbf{A_1}$ за полюс. Отрезок $\mathbf{A_1B_1}$ через промежуток времени $\Delta t$ займёт положение $\mathbf{A_2B_2}$. Поступательным перемещением фигуры совместим точки $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$. Точка $\mathbf{B_1}$ при этом займёт положение $\mathbf{B'_2}$, а сама фигура перейдёт в положение, отмеченное пунктиром. Поступательное перемещение фигуры определится вектором , и отрезок $\mathbf{A_1B_1}$ будет параллелен отрезку $\mathbf{A_2B'_2}$. Если теперь повернуть фигуру вокруг полюса $\mathbf{A_2}$ на угол $\Delta\varphi = \angle\ \mathbf{B'_2A_2\ B_2}$, то отрезок $\mathbf{A_2B'_2}$ займёт положение $\mathbf{A_2B_2}$, а сама фигура - положение II, что и требовалось доказать. Теорема рассматривает не реальное, а возможное движение точки.

Следствие из теоремы: Угловая скорость плоской фигуры не зависит от выбора полюса.

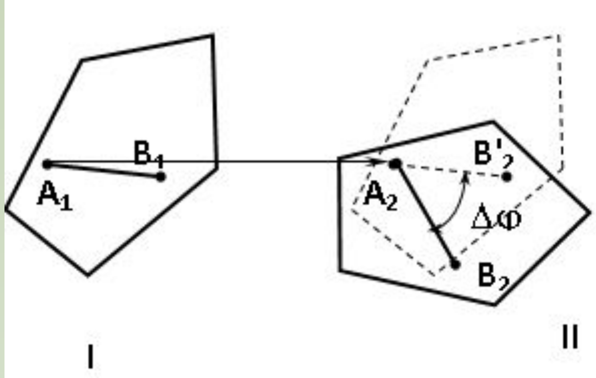



Рис. 5.7

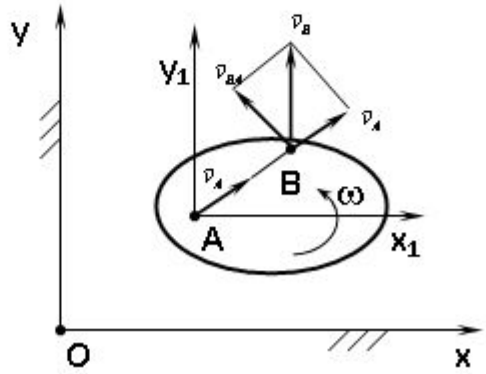



Рис. 5.8

**Скорость точки плоской фигуры**

Теорема. Скорость $\bar{v}_B$ любой точки **В** плоской фигуры в данный момент времени есть геометрическая сумма скорости $\bar{v}_A$ некоторого полюса и скорости $\bar{v}_{BA}$, возникающей вследствие вращения фигуры вокруг полюса, то есть

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}. \qquad (5.15)$$

Доказательство

Пусть фигура S (рис. 5.8) совершает плоское движение. Любое перемещение этой фигуры может быть составлено из поступательного перемещения вместе с полюсом **А** и поворота вокруг этого полюса. Представим движение произвольной точки **В** как сложное: за переносное примем поступательное движение системы координат $\mathbf{Ax_1y_1}$, за относительное - движение, совершаемое точкой **В** при вращении плоской фигуры вокруг полюса **А**.

На основании теоремы о скорости точки в сложном движении име $\bar{v}_B^a = \bar{v}_B^e + \bar{v}_B^r$

В этом выражени $\bar{v}_B^a = \bar{v}_B$, $\bar{v}_B^e = \bar{v}_A$, так как переносное движение поступательное,

а $\bar{v}_B^r = \bar{v}_{BA}$ , так как относительным будет движение точки **B** по окружности радиуса **AB**. Следо $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$ , что и дока $v_{BA} = \omega BA$ теорему .

## Мгновенный центр скоростей

Мгновенным центром скоростей называется такая точка плоской фигуры (или неизменно связанной с этой фигурой плоскости), скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Пусть фигура S (рис. 5.9) совершает плоскопараллельное движение, причем угловая скорость этого движения не равна нулю. Примем произвольную точку **A** фигуры S за полюс.

Повернём вектор скорости точки **A** вокруг его начала в сторону вращения на угол $\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA}$ ложим в п $v_{PA} = |\omega|$ ном направлении отрезок **AP** $\bar{v}_{PA}$ Действительно из (5.15) имеем $\bar{v}_{PA} = -\bar{v}_A$ $\bar{v}_P = 0$ , причем **AP=v$_A$** , а направление вектора противоположно . Следовательно $\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{AP}$ и $\bar{v}_P = 0$, тогда $\bar{v}_A = \bar{v}_{AP}$, $v_A = |\omega|$

Приняв за полюс мгновенный центр скоростей, получим выражение для скорости произвольной точки **A** в виде: ,но , **AP**, то есть скорости точек плоской фигуры в данный момент времени распределены таким образом, как если бы эта фигура вращалась вокруг мгновенного центра скоростей с угловой скоростью ω.

Если **A** и **B** - произвольные точки тела, **P** - мгновенный центр скоростей (рис. 5.10), то пос $v_A = v_{AP} = |\omega|\,\mathbf{AP},\ v_B = v_{BP} = |\omega|\,\mathbf{BP}$ получим

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}. \qquad (5.16)$$

Таким образом, скорости точек плоской фигуры прямо пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей.

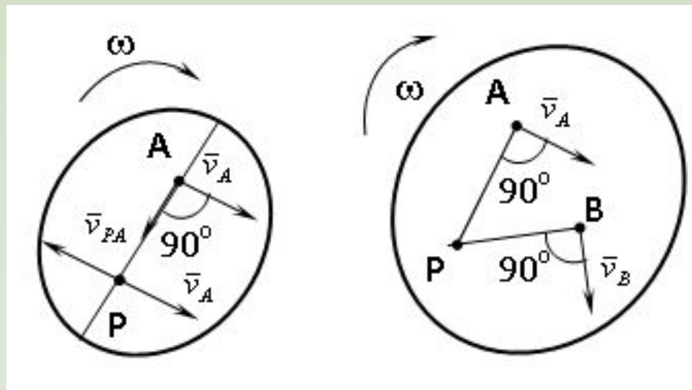



Рис. 5.9 Рис. 5.10

# Лекция 6

## Динамика

Динамика – раздел теоретической механики, изучающий движение материальных объектов и причины его вызывающие. Движение тела считается известным, если известно движение каждой его точки; поэтому изучение динамики начинается с изучения движения материальной точки. Под материальной точкой понимают тело, размеры которого таковы, что различием в перемещениях отдельных его частиц можно пренебречь. Материальную точку можно рассматривать как геометрическую точку, имеющую конечную массу.

## Законы Галилея - Ньютона

Закон инерции. Изолированная материальная точка движется с нулевым ускорением.

Первый закон указывает на одно из важнейших свойств материи – инертность. Свойство инертности проявляется в способности тела сохранять свое движение при отсутствии внешних воздействий, а также изменять его под дей ствием сил не мгновенно, а постепенно. Это изменение происходит тем мед леннее, чем больше вещества содержится в теле. Величина, являющаяся мерой инертности тела и определяющая количество вещества, содержащегося в теле, называется инертной массой тела.

Основной закон динамики. Модуль силы, действующий на материальную точку, равен произведению массы точки на модуль ее ускорения, а направление силы совпадает с направле

$$\bar{F} = m\bar{a}. \tag{6.1}$$

Таким образом, причиной возникновения движения является сила.

Закон равенства действия и противодействия. Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2 \Rightarrow m_1\bar{a}_1 = m_2\bar{a}_2. \qquad (6.2)$$

Следствие. Пусть к точке массы *m* приложена система сил $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \ldots \bar{F}_n\}$. Каждая сила $\bar{F}_k$ сообщает точке ускорение $\bar{a}_k$, ускорение $\bar{a}$, определяемое всей системой сил, равно:

$$\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k. \qquad (6.4)$$

**Принцип Даламбера. Силы инерции**

Пусть материальная точка М массы m, на которую наложены некоторые связи, совершает движение, вызываемое приложенной к ней активной силой $\bar{F}_a$. Освободим точку от связей и заменим их действие реакциями $\bar{R}$; сложив силы $\bar{F}_a$ и $\bar{R}$, получим силу :

$$\bar{F} = \bar{F}_a + \bar{R}, \qquad (6.5)$$

под действием которой теперь уже свободная точка совершает движение (рис.6.1).

На основании второго закона Ньютона:

$$m\bar{a} = \bar{F} = \bar{F}_a + \bar{R}. \qquad (6.6)$$

Введем обозначение $-m\bar{a} = \bar{\Phi}$, тогда

$$\bar{F}_a + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \qquad (6.7)$$

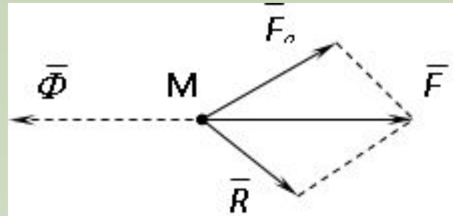



Рис. 6.1

Вектор Ф, направленный в сторону противоположную ускорению точки, и по модулю равный произведению массы точки на модуль ее ускорения, называется силой инерции материальной точки.

Принцип Даламбера. Если к действующим на точку активным силам и реакциям связей добавить силу инерции, мысленно приложенную к точке, то в каждый момент времени полученная система сил будет уравновешенной. Принцип Даламбера представляет собой формальный математический прием, удобный для решения задач динамики, так как позволяет динамические урав нения движения записывать в форме уравнений равновесия.

**Работа**

В качестве характеристики действия силы на материальную точку (или тело) можно рассматривать работу силы. Работа – это мера действия силы по отношению к расстоянию, пройденному точкой ее приложения. Точка приложения постоянной силы движется по прямой, совпадающей с линией действия силы. Работа этой силы равна произведению ее модуля *F* на длину пути s, пройденного точкой приложения силы, взятому со знаком «+» или «−».

$$A = \pm Fs. \qquad (6.8)$$

Знак «+» берется в случае, когда направления силы и перемещения совпадают, знак «−» - когда эти направления противоположны.

Размерность единицы работы в Международной системе единиц (СИ) – джоуль (Дж). Один джоуль – это работа, совершаемая силой в один ньютон на прямолинейном участке пути длиной один метр.

При этом считается, что линия действия силы совпадает с прямой, по которой движется точка ее приложения.

Если точка приложения силы также перемещается по прямой, совпадающей с линией действия силы, но модуль силы F есть величина переменная, зависящая от точки приложения силы, то для того, чтобы найти работу переменной силы на отрезке пути длиной *l*, разобьем этот отрезок на достаточно большое число n малых участков $\Delta s_1$, $\Delta s_2$ ,... $\Delta s_n$. Тогда можно считать, что в пределах $\Delta s_i$ модуль силы постоянен и равен некоторому своему значению $F_i$ в какой-либо точке отрезка. Элементарную работу силы F

$$\Delta A = F_i \Delta s_i \,. \qquad (6.9)$$

Вычисляя сумму элементарных работ и переходя к пределу, найдем работу переменной силы *F* на прямолинейном участке:

$$A = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta s_i = \int_a^b F ds \,. \qquad (6.10)$$

Для того чтобы взять этот интеграл, модуль силы следует выразить как функцию переменной *s*: *F=f(s)*.

**Работа силы на криволинейном участке**

Рассмотрим общий случай нахождения работы переменной силы, точка приложения которой движется по криволинейной траектории. Пусть точка M приложения переменной силы F движется по произвольной непрерывной криво $d\bar{s}$ Обозначим через вектор бесконечно малого перемещения точки M. Этот вектор направлен по касательной к кривой в ту же сторону, что и вектор скорости.

$d\bar{s}$ лементарной работой переменной силы F на беск $d\bar{s}$ ечно малом перемещении

$$dA = Fds\cos\alpha\,, \qquad (6.11)$$

оизведение векторов F и :

$d\bar{s}$

где $\alpha$ - угол между векторами F и :

То есть элементарная работа силы равна произведению модулей векторов силы и бесконечно малого перемещения, умноженному на косинус угла между этими векторами.

$\bar{F}_\tau$

Разложим вектор силы F на две составляющие: - направленную по касательной $\bar{F}_n$ к траектории – и – направленную по нормали (рис. 6.2). Линия действия силы перпендикулярна касательной к траектории, по которой движется точка,

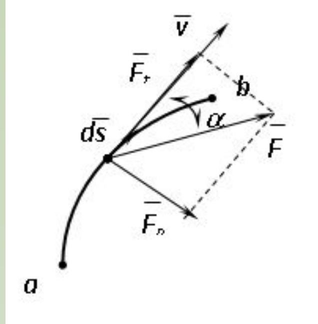
$$dA = \bar{F}_\tau d\bar{s}\,. \qquad (6.12)$$

да:

Для того, чтобы вычислить работу переменной силы F на конечном участке

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b Fds\cos\alpha = \int_a^b F_\tau ds\,. \qquad (6.13)$$

слить интеграл от элементарной работы:



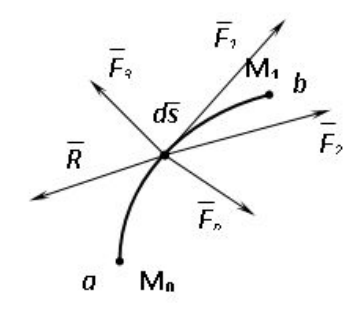



Рис. 6.2 Рис. 6.3

Теорема. Работа равнодействующей системы сил на некотором пути равна сумме работ составляющих сил на том же пути.

Доказательство:

Пусть точка **M** приложения системы си $\{\bar F_1, \bar F_2, \bar F_3, \dots \bar F_n\}$ перемещается из положения $\mathbf{M_0}$ в положение $\mathbf{M}_1$; кроме того, пусть

$$\bar R = \bar F_1 + \bar F_2 + \dots + \bar F_n , \qquad (6.14)$$

Вычислим элементарную работу силы R. Для этого умножим равенство (6.14) скал $d\bar s$ оно на :

$$\bar R_\tau d\bar s = \bar F_{1\tau} d\bar s + \bar F_{2\tau} d\bar s + \dots + \bar F_{n\tau} d\bar s , \qquad (6.15)$$

то есть элементарная работа равнодействующей равна сумме элементарных работ составляющих.

Представляя модули $F_1$, $F_2$, $F_3$, ... $F_n$ как функции s и интегрируя выражение (6.15) в соответствующих пределах, получим:

$$\int_a^b R_\tau ds = \int_a^b F_{1\tau} ds + \int_a^b F_{2\tau} ds + \dots + \int_a^b F_{n\tau} ds . \qquad (6.16)$$

Поскольку $A = \int_a^b R_\tau ds\,, \quad A_1 = \int_a^b F_{1\tau} ds\,, \ldots, A_n = \int_a^b F_{n\tau} ds$ окончательно имеем:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n\,, \qquad (6.17)$$

что и требовалось доказать.

# Лекция 7

**Мощность**

Две различные силы могут совершать одну и ту же работу за разные промежутки времени. Характеристикой, позволяющей оценить быстроту совершения работы, является мощность.

Мощностью называется работа, произведенная в единицу времени:

$$P_{ср} = \frac{\Delta A}{\Delta t} \Rightarrow P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}. \qquad (7.1)$$

Если в любые равные промежутки времени производится одна и та же работа, то мощность может быть вычислена по формуле:

$$P = \frac{A}{t}. \qquad (7.2)$$

В международной системе единиц (СИ) в качестве единицы мощности принят ватт – работа в один джоуль, произведенная за одну $Вт = \frac{Дж}{с}$ у .

Если в формуле (7.1) вместо элементарной работы ΔA подставить ее выражение из (6.12), получим еще одно соотношение для вычисления мощности:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_\tau ds}{\Delta t} = F_\tau \frac{ds}{dt} = F_\tau v. \qquad (7.3)$$

При эксплуатации любой машины часть потребляемой ею мощности тратится на преодоление различных сопротивлений, то есть на совершение полезной работы расходуется только часть потребляемой мощности.

Отношение полезной мощности (работы) ко всей потребляемой мощности (работе) называется коэффициентом полезного действия (КПД) машины:

$$\eta = \frac{P_{пол}}{P} = \frac{A_{пол}}{A}. \qquad (7.4)$$

КПД характеризует рациональность использования потребляемой мощности. Поскольку полностью избавиться от потерь мощности при эксплуатации машины невозможно, КПД любой машины меньше единицы.

**Работа и мощность при вращательном движении**

Найдем работу и мощность силы, приложенной к телу, имеющему неподвижную ось вращения. Пусть к твердому телу, имеющему неподвижную ось вращения, приложена (в точке не лежащей на оси вращения) сила F . Траекторией точки приложения является окружность с радиусом R.

Разложим вектор на три составляющие $\bar{F}_\tau, \bar{F}_n, \bar{F}_z$ (рис 7.1). Элементарная работа силы F будет равна:

$$dA = F ds \cos\alpha = F_\tau ds \cos\beta + F_n ds \cos\gamma + F_z ds \cos\lambda = \bar{F}_\tau d\bar{s}, \qquad (7.5)$$

где α - угол между вектором силы F и вектором перемещен $d\bar{s}$, β, γ, λ - углы между соответствующими проекциями силы F и вектором $d\bar{s}$.

Элементарные работы составляющ $\bar{F}_n$ и $\bar{F}_z$ равны нулю, в силу ортогональности этих составляю $d\bar{s}$ их перемещению . Преобразуем выражение (7.5) с учетом того, что *ds=Rdϕ*.

$$dA = F_\tau ds = F_\tau R d\varphi = M_z d\varphi. \qquad (7.6)$$

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \, d\varphi \,, \qquad (7.7)$$

Если $M_z = const$, то $A = M_z(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Для определения мощности силы F подставим выражение элементарной работы (7.6) в формулу (7.3). Получим:

$$P = \frac{dA}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega \,, \qquad (7.8)$$

так как $\frac{d\varphi}{dt}$ - есть алгебраическое значение угловой скорости ω вращающегося тела.

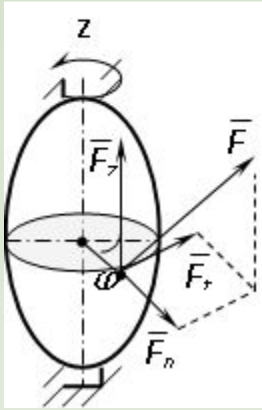



Рис. 7.1

**Понятие о трении. Трение скольжения**

Сопротивление, возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого, называется трением скольжения. Если соприкасающиеся тела достаточно тверды и хорошо отполированы, то сила трения незначительна и в первом приближении ею можно пренебречь; но при технических расчетах силу трения всегда приходится принимать во внимание.

Рассмотрим следующий опыт: на неподвижную горизонтальную плоскость положен брусок весом G (рис. 7.2). Приложим к этому бруску горизонтальную силу Q. Если бы реакция неподвижной плоскости сводилась только к нормальной силе N , то горизонтальная сила Q , как бы мала она не была, оставаясь неуравновешенной, заставила бы брусок скользить по плоскости. Но в действительности брусок остается в покое до тех пор, пока сила Q не достигнет некоторой определенной величины. Сила трения, проявляющаяся при покое тела, называется силой трения в покое или статической силой трения; сила трения, возникающая при скольжении тела, называется силой трения в движении.

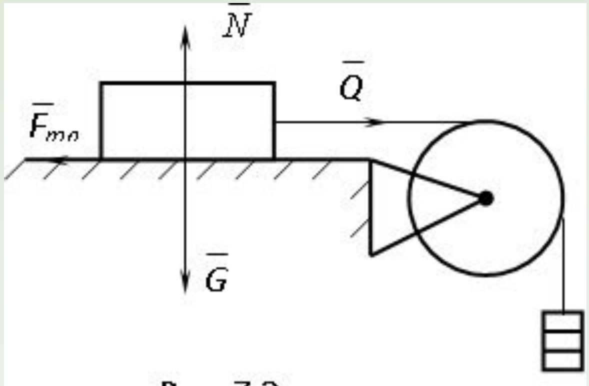


Рис. 7.2

Исследованием явления трения занимался еще Леонардо да Винчи. Ввиду значения, которое имеет явление трения в технической практике, изучение явления продолжалось и продолжается в настоящее время. Возникновение силы трения скольжения объясняется, прежде всего, тем, что поверхности тел не являются абсолютно гладкими. Для того, чтобы заставить одно тело скользить по поверхности другого, необходимо преодолеть возникающее при этом сопротивление микроскопических выступов, имеющихся на соприкасающихся поверхностях, кроме того, при этом приходится преодолевать еще силы молекулярного взаимодействия между частицами поверхностных слоев, соприкасающихся тел.

Таким образом, возникновение силы трения объясняется двумя причинами:

1) Шероховатостью поверхностей.

2) Проявлением сил молекулярного взаимодействия.

На основании опытов установлено, что максимальная величина силы трения в покое прямо пропорциональна нормальному давлению одного тела на другое, то есть нормальной реакции:

$$\overline{F}_{тр\,max} = f\overline{N}, \qquad (7.9)$$

где $f$ – коэффициент трения скольжения в покое.

Очевидно, что коэффициент трения скольжения в покое – величина безразмерная.

Относительно трения скольжения в движении установлено следующее:

1) Сила трения скольжения в движении направлена противоположно скорости скольжения одного тела относительно другого.

Сила трения скольжения в движении пропорциональна нормальному давлению одного тела на другое:

$$\overline{F}' = f'\overline{N}, \qquad (7.10)$$

где $f'$ – коэффициент трения скольжения в движении.

Коэффициент трения скольжения в движении несколько меньше коэффициента трения скольжения в покое и зависит от материала, состояния поверхности и от относительной скорости трущихся тел.

**Трение качения**

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого. Рассмотрим цилиндрический каток на горизонтальной плоскости (рис. 7.3). Пусть вес катка G , и пусть в его центре **O** приложена сила Q.

Опыт показывает, что пока сила Q невелика, каток находится в равновесии. Следовательно, действующие на каток силы G и Q уравновешиваются сопротивлением неподвижной плоскости. В точке **A** возникает нормальная реакция N и сила трения $\overline{F}_{тр}$, равная по модулю силе Q, но направленная в противоположную сторону. Однако если бы сопротивление неподвижной плоскости сводилось только к силам $\overline{N}$ и $\overline{F}_{тр}$, то каток не мог бы находиться в равновесии, так как пара $(\overline{Q}, \overline{F}_{тр})$ оставалась бы неуравновешенной. Поэтому необходимо допустить, что реакции неподвижной плоскости приводятся не только к силам $\overline{N}$ и $\overline{F}_{тр}$, но и к некоторой паре сил, которая и уравновешивает пару $(\overline{Q}, \overline{F}_{тр})$

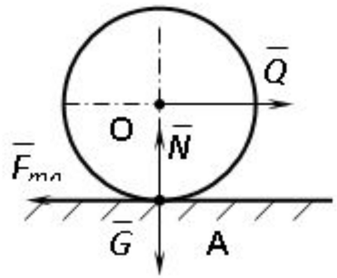



Рис. 7.3

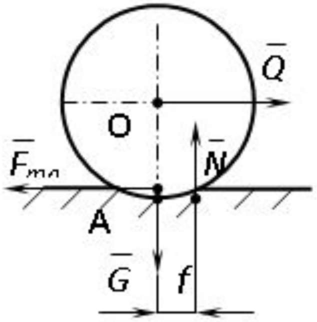



Рис. 7.4

Эта пара, препятствующая качению катка, называется парой трения качения. Возникновение этой пары объясняется тем, что вследствие не абсолютной твердости рассматриваемые тела испытывают деформацию, так что каток несколько вдавливается в опорную поверхность по некоторой малой площадке около точки **А** (рис. 7.4).

Из опытов известно, что момент этой пары не может превышать некоторого определенного значения, в условиях данного опыта; это максимальное значение пары трения прямо пропорционально нормальному давлению катка

$$M_{max} = f_k N, \qquad (7.11)$$

где $f_k$ – коэффициент трения качения.

Из анализа формулы (7.11) следует, что коэффициент трения качения измеряется в единицах длины.

Современные исследования показывают, что коэффициент трения качения зависит не только от материала контактирующих тел и их упругих свойств, но также и от радиуса катка.

## Теоремы динамики точки

Теорема об изменении количества движения. Количеством движения материальной точки называется векторная величина q, равная произведению вектора скорости v на массу точки *m*.

$$\bar q = m\bar v\,. \qquad (7.12)$$

Единице измерения модуля количества движения в Международной системе единиц (СИ) яв$\frac{кг\cdot м}{с}$ется .

Пусть на материальную точку **M** действует сила (рис. 7.5). В соответствии с основным законом динам $m\bar a = \bar F,\ \bar a = \frac{d\bar v}{dt},$ ,тогда

$$m\frac{d\bar v}{dt} = \bar F\,, \qquad (7.13)$$

так как $m = const$, то $m\frac{d\bar v}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar v) = \bar F$, умножим обе части на $dt$, получим

$$d(m\bar v) = \bar F dt = d\bar S\,. \qquad (7.14)$$

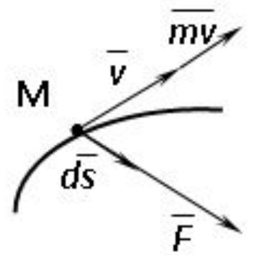


Рис. 7.5

Произведение силы F на малое приращение времени *dt*, в течение которого эта сила действует, называется элементарным импульсом силы ds.

Если точка **M** движется под действием силы F по некоторой криволинейной траектории, то имеет место закон количества движения: изменение количества движения материальной точки за некоторый конечный промежуток времени равно импульсу приложенной к точке силы за тот же промежуток времени

$$\int_{v_0}^{v} m dv = \int_{t_0}^{t} F dt \Rightarrow m(v - v_0) = S. \qquad (7.15)$$

**Понятие о моменте количества движения**

Иногда при изучении движения точки вместо изменения самого вектора $\bar{q}\ (m\bar{v})$ оказывается удобным рассматривать изменение его момента. Момент вектора q относительно какого-либо центра **O** или оси z обозначается $M_o(mv)$ или $M_z(mv)$ и называется соответственно моментом количества движения или кинетическим моментом точки относительно этого центра или оси. Вычисляется момент количества движения так же, как и момент силы.

Производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь неподвижного центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра

$$\frac{d}{dt}\left[M_o(mv)\right] = M_o(F). \qquad (7.16)$$

Ан то для моментов вектора $\bar{q}\ (m\bar{v})$ и силы F относительно какой-либо оси z.

# Лекция 8

**Кинетическая энергия**

Кроме количества движения основной мерой механического движения является кинетическая энергия. Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, равная

$$T = \frac{mv^2}{2}. \qquad (8.1)$$

Кинетическая энергия – есть величина положительная при любых значениях скор $v \neq 0$. Если $v = 0$, то точка покоится относительно инерциальной системы отсчета и ее кинетическая энергия равна нулю.

Теорема. Изменение кинетической энергии материальной точки за некоторый промежуток времени равно работе приложенной к точке силы за тот же промежуток времени.

Доказательство: $ma = F \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = F \Rightarrow mdv = Fdt.$

Умножим обе части скалярно на *v*, получим:

$vmdv = Fv\cos\alpha dt$, где *α* - угол между направлением вектора скорости и направлением линии действия силы. Полученную запись представим в виде

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Fv\cos\alpha dt.$$

Правая часть этого равенства представляет собой элементарную работу силы *F*. Интегрируя полученное выражение в соответствующих пределах, получим:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{t_0}^{t} Fv\cos\alpha dt, \qquad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A \qquad (8.2)$$

**Потенциальная энергия**

Часть (ограниченная или неограниченная) пространства, в каждой точке которого на находящуюся там материальную точку действует некоторая сила, зависящая только от положения этой точки, то есть ее координат *x*, *y*, *z*, называется силовым полем. Проекции *X*, *Y*, *Z* силы поля на координатные оси являются некоторыми однозначными и непрерывными функциями от *x*, *y*, *z*. То

$$X = f_1(x,y,z),\ Y = f_2(x,y,z),\ Z = f_3(x,y,z).$$

Допустим, что существует такая функция координат *U(x, y, z)*, частные производные которой по координатам равны

$$X = \frac{\partial U}{\partial x},\ Y = \frac{\partial U}{\partial y},\ Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (8.3)$$

етствующие координатные оси

Такая функция *U* называется силовой функцией данного силового поля, а силовое поле в этом случае называется потенциальным. Найдем выражение

циального поля:

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU,$$

то есть элементарная работа силы потенциального поля равна полному дифференциалу силовой функции.

Следовательно, работа на конечном пути, когда точка приложения силы п **$M_0$** в положение **M**, выразится так:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M)} dU = U - U_0, \qquad (8.4)$$

то есть работа силы потенциального поля равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках пути и, следовательно, не зависит ни от вида, ни от длины траектории, по которой перемещается точка приложения силы из положения $\mathbf{M_0}$ в положение **М**.

Отсюда следует, что в случае однозначной силовой функции *U* работа силы потенциального поля на всякой замкнутой траектории равна нулю.

Пусть точка $\mathbf{M_0}(x_0, y_0, z_0)$ будет какая-либо произвольно выбранная неподвижная (нулевая) точка, в которой силовая функция имеет значение $U(x_0, y_0, z_0)$.

Работа, производимая силой при перемещении материальной точки из положения **М** в «нулевую точку» $\mathbf{M_0}$, называется потенциальной энергией в точке **М**.

$$\Pi = U_0 - U. \qquad (8.5)$$

Очевидно, что в нулевой точке $M_0$ потенциальная энергия равна нулю.

**Закон сохранения энергии**

Пусть $\mathbf{M_1}$ и $\mathbf{M_2}$ будут двумя различными положениями материальной точки, движущейся в потенциальном силовом поле, и $U_1$ и $U_2$ – соответствующие значения силовой функции в этих точках. Напишем уравнение, выражающее

нетической энергии:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A,$$

где $v_1$ и $v_2$ – скорости движущейся точки в положениях **M$_1$** и **M$_2$**. Но так как работа *A* равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях движущейся точки, то

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = U_2 - U_1. \qquad (8.6)$$

Тогда потенциальная энергия в точках **M$_1$** и **M$_2$** будет выражаться так:

$$\Pi_1 = U_0 - U_1,$$
$$\Pi_2 = U_0 - U_2.$$

Отсюда

$$U_1 = U_0 - \Pi_1$$
$$U_2 = U_0 - \Pi_2.$$

Подставляя полученные значения в выражение (8.5) получим:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Pi_1 - \Pi_2$$

или:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \Pi_1 = \frac{mv_2^2}{2} + \Pi_2$$

то есть

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = const. \qquad (8.7)$$

Следовательно, при движении материальной точки в потенциальном силовом поле сумма кинетической и потенциальной энергии остается постоянной.

**Кинетическая энергия материального тела в различных видах движения**

Материальное тело есть совокупность отдельных материальных точек. Кинетическая энергия тела, совершающего поступательное движение равна половине произведения массы тела на квадрат скорости его центра масс:

$$T = \frac{mv_c^2}{2}$$

Центром масс системы называется точка С, координаты которой находятся по формулам:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k},\ y_c = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k},\ z_c = \frac{\sum m_k z_k}{\sum m_k}. \qquad (8.8)$$

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω (рис. 8.2). При вращении тела абсолютная величина скорости любой точки тела равна $v_k = \omega R_k$, тогда кинетическая энергия равна:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\sum m_k \omega^2 R_k^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_k R_k^2.$$

Величина, равная сумме произведений массы каждой точки на квадрат расстояния от оси вращения, называется моментом инерции $I_z$ тела относительно оси z. $I_z$ – мера инерции тела во вращательном движении:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \qquad (8.9)$$

Осевой момент инерции можно представить в виде:

$$I_z = M\rho_z^2, \qquad (8.10)$$

где $\rho_z$ – радиус инерции тела относительно оси Oz, M – масса тела.

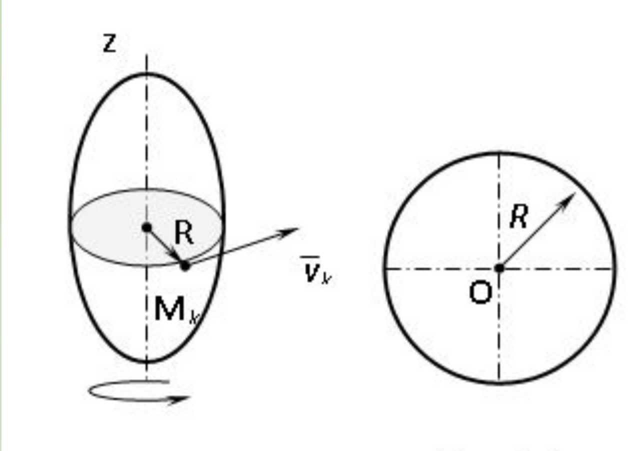



Рис. 8.2 Рис. 8.3

Теорема Кенига. Кинетическая энергия тела, совершающего плоскопараллельное движение, равна сумме кинетических энергий поступательного движения тела со скоростью центра масс и вращательного движения во … о масс:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}. \qquad (8.11)$$

Момент инерции $I_z$ твердого тела относительно какой-либо оси z равен моменту инерции $I_c$ этого тела относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной оси z, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями d.

$$I_z = I_c + md^2. \qquad (8.12)$$

**Моменты инерции некоторых простых однородных тел**

1. Окружность. Вычислим момент инерции материальной окружности радиуса R и массы M относительно ее центра **O** (рис. 8.3).

Для этого разобьем всю окружность на бесконечно малые элементы массой m. Все элементы находятся от точки О на одном расстоянии R, поэтому искомый момент $$I_o = \sum mR^2 = R^2 \sum m = MR^2. \qquad (8.13)$$

2. Тонкий диск. Момент инерции диска радиуса R и массы М относительно его центра **О** (рис. 8.4) вычислим следующим образом. Разобьем диск концентрическими окружностями на элементарные плоские кольца радиуса r, шириной - Δr. Массу кольца обозначим m. Искомый момент инерции равен сумме всех моментов инерции элементарных колец: $I_o = \sum mr^2$

Обозначим поверхностную плотность через γ, тогда

$$\gamma = \frac{M}{\pi R^2}$$

Площадь элементарного кольца представим в виде:

$$s_к = 2\pi r\Delta r,$$

тогда

$$m = 2\pi\gamma r\Delta r.$$

$$I_o = \sum 2\pi\gamma r\Delta r = \int_0^R 2\pi\gamma r^3 dr = \frac{\pi\gamma R^4}{2} = \frac{MR^2}{2}. \qquad (8.14)$$

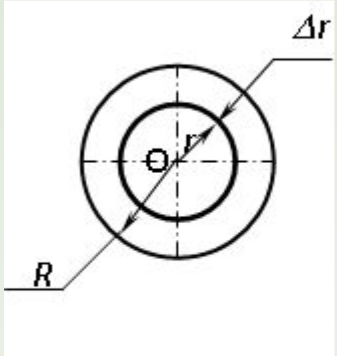



Рис. 8.4

3. Круглый цилиндр радиуса R, массой M. Разобьем весь цилиндр на тонкие диски. Момент инерции диска

$$I_{\text{од}} = \frac{mR^2}{2}$$

где m – масса диска.

Искомый момент инерции цилиндра равен сумме моментов инерции всех

$$I_z = \sum \frac{mR^2}{2} = \frac{R^2}{2}\sum m = \frac{MR^2}{2}. \qquad (8.15)$$

4. Шар. Вычислим момент инерции шара массой M и радиусом R относительно его центра. Обозначим плотность, приходящуюся на единицу объема ρ.

$$\rho = \frac{M}{V},$$

где V – объем шара.

$$V = \frac{4\pi R^3}{3},$$

тогда

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

Разобьем шар концентрическими сферами на бесконечно тонкие сферические слои радиуса r и толщиной Δr. Так как все частицы слоя находятся на одинаковом расстоянии от центра O, то момент инерции слоя равен

$$I_o = \sum mr^2$$

Объем сферы равен:

$$V_c = 4\pi r^2 \Delta r$$

масса сферы:

$$m = 4\pi r^2 \Delta r \rho$$

тогда момент инерции шара равен:

$$I_o = \sum 4\pi \rho r^4 \Delta r = \int_0^R 4\pi \rho r^4 dr = \frac{4}{5}\pi \rho R^5$$

Подставляя значение ρ, получим:

$$I_o = \frac{3}{5} M R^2. \qquad (8.16)$$

**Дифференциальное уравнение вращательного движения тела**

Твёрдое тело может совершать два простых движения: поступательное и вращательное вокруг неподвижной оси. Дифференциальное уравнение поступательного движения имеет вид:

$$M \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \bar{F}, \qquad (8.17)$$

где M – масса тела, $\bar{v}_c$ - скорость движения центра масс, $\bar{F}$ - главный вектор внешних сил, действующих на тело.

По аналогии можно записать дифференциальное уравнение вращательного движения тела:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z \,, \qquad (8.18)$$

где $I_z$ – момент инерции твёрдого тела относительно неподвижной оси $z$, $M_z$ – главный момент внешних сил, действующих на тело.

Нетрудно заметить, что дифференциальное уравнение вращательного движения тела похоже по форме на дифференциальное уравнение поступательного движения. При вращении момент инерции тела играет роль массы при поступательном движении, угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ - роль ускорения $\bar{a} = \frac{d\bar{v}_c}{dt}$, а момент внешних сил $M_z$ – роль силы F, действующей на тело.

# Лекция 9

**Колебательное движение материальной точки**

**Свободные колебания без учета сил сопротивления**

Рассмотрим точку **М**, движущуюся прямолинейно под действием одной только восстанавливающей силы F, направленной к неподвижному центру **О** и пропорциональной расстоянию от этого центра. Проекция силы F на ось **О**x (рис. 9.1) будет равна:

$$F_x = -cx. \qquad (9.1)$$

Дифференциальное уравнение движения точки **М** имеет следующий вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx, \qquad (9.2)$$

где c – коэффициент жесткости пружины [Н/м], он показывает, какую силу необходимо приложить к пружине, чтобы растянуть или сжать её на единицу длины.

Разделив это уравнение на *m* и вводя обозначение , приведем его к виду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0. \qquad (9.3)$$

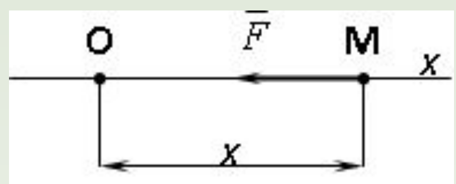



Рис 9.1

Уравнение (9.3) представляет собой дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления. Решение этого линейного однородного дифференциального уравнения второго поряд… щут в виде: $x = e^{nt}$. Пологая в ура…нии (9.3) $x = e^{nt}$, получим для описания *n* так называемое характеристическое урав… меющее вид: $n^2 + k^2 = 0$. Так как корни этого характеристического уравнения являются чисто мнимыми ($n_{1,2}=\pm ik$), то, как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt\,, \qquad (9.4)$$

где $C_1$ и $C_2$ – постоянные интегрирования.

Если вместо п… ые *a* и *α*, такие, что $C_1 = a\cos\alpha$, $C_2 = a\sin\alpha$, то получим:

$$x = a\sin(kt+\alpha)\,. \qquad (9.5)$$

Уравнение (9.5) есть уравнение гармонического колебания. То есть, в случае прямолинейного движения под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию от центра, материальная точка совершает гармоническое колебание.

Величина *a* – наибольшее отклонение точки **M** от центра **O**, называется амплитудой колебания, аргумент $(kt+\alpha)$ называется фазой колебания, а величина *α* называется начальной фазой колебания.

Ско… колебании определяется по формуле:

$$v = \frac{dx}{dt} = ak\cos(kt+\alpha)\,. \qquad (9.6)$$

Промежуток времени *T*, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется периодом колебаний. По истечении периода фаза изменяется на $2\pi$, следовательно $kT=2\pi$, откуда период

$$T = \frac{2\pi}{k}. \qquad (9.7)$$

Величина $\nu$, обратная периоду и определяющая число колебаний, совершаемых за одну секунду, называется частотой колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \qquad (9.8)$$

Величина *k* отличается от $\nu$ только постоянным множителем $2\pi$, то есть эта величина определяет число полных колебаний, которые совершает точка в течение $2\pi$ секунд. Эта величина *k* называется круговой частотой колебания.

Значения *a* и $\alpha$ - определяются по начальным условиям движения. Считая при $t=0$ $x=0$ и $v=v_0$, получим из (9.5) и $x_0 = a\sin\alpha,\ v_0 = ak\cos\alpha,$

отсюда находим:

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{x^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{kx_0}{v_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.9)$$

Итак, свободные колебания при отсутствии сопротивления обладают следующими свойствами:

1 амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий;

2 круговая частота *k*, а следовательно, и период *T* колебаний от начальных условий не зависят и являются неизменными характеристиками данной колеблющейся системы.

**Влияние постоянной силы на свободные колебания точки**

Пусть на точку **M**, кроме восстанавливающей силы F, направленной к центру **O**, действует еще и постоянная по модулю и направлению сила P (рис. 9.2). В этом случае положением равновесия точки **M** будет центр $\mathbf{O_1}$, отстоящий от **O** на расстоянии $\mathbf{OO_1}=\delta_{cm}$, которое определяется равенством $c\delta_{cm}=P$ или

$$\delta_{cm}=\frac{P}{c}. \qquad (9.10)$$

Величина $\delta_{cm}$ называется статическим отклонением точки.

Примем центр $\mathbf{O_1}$ за начало отсчета, координатную ось $\mathbf{O_1}x$ направим в сторону действия силы , тогда получим: $F=-c(x+\delta_{cm})$. Учитывая, что $c\delta_{cm}=P$, получим дифференциальное уравнение движения в виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0.$$

То есть постоянная сила P не изменяет характера колебаний, совершаемых точкой под действием восстанавливающей силы F, а только смещает центр этих колебаний в сторону действия силы P на величину статического отклонения $\delta_{cm}$.

С учетом того, что $k^2 = \dfrac{P}{m\delta_{cm}}$, выражение (9.7) примет вид:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\delta_{cm}}{P}}. \qquad (9.11)$$

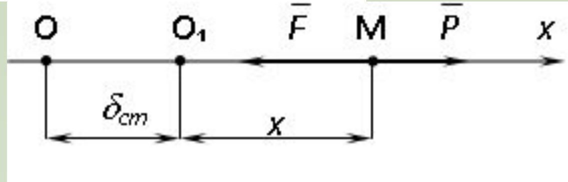



Рис. 9.2

**Затухающие колебания**

Пусть материальная точка **М** движется прямолинейно по оси x. На точку при ее движении действуют восстанавливающая сила F и сила сопротивления R (рис. 9.3). Считая, что сила сопротивления пропорциональна первой степени

$\bar{R} = -\mu v = -\mu \dfrac{dx}{dt}$ сти:

$F_x = -cx$

, $\mu$ - коэффициент сопротивления, , получим

е движения в виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt}. \qquad (9.12)$$

Разделив обе части уравнения на *m* и вводя обозначения $\dfrac{c}{m} = k^2$ и $\dfrac{\mu}{m} = 2b$, , приведем уравнение к виду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + k^2x = 0. \qquad (9.13)$$

Уравнение (9.13) представляет собой дифференциальное уравнение свободных колебаний при сопротивлении пропорциональном скорости. Его решение, как и решение уравнения (9.3), ищут в виде $x = e^{nt}$. Подставляя это значение *x* в уравнение (9.13), получим характеристическое уравнение $n^2 + 2bn + k^2 = 0$, корни которого будут.

$$n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}. \qquad (9.14)$$

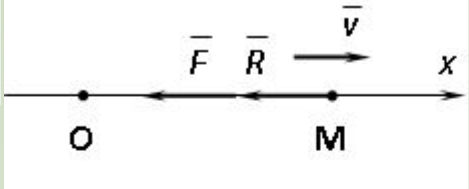


Рис. 9.3

Рассмотрим случай, когда *k* > *b*, то есть когда сопротивление мало по сравнению с восстанавливающей силой. Введем обозначение:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}, \qquad (9.15)$$

получим из (9.14), что $n_{1,2} = -b \pm ik_1$, то есть корни характеристического уравнения являются комплексными. Тогда решение уравнения (9.13) будет иметь вид:

$$x = e^{-bt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) \qquad (9.16)$$

или, по аналогии с равенством (9.5),

$$x = ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha). \qquad (9.17)$$

Величины *a* и *α* являются постоянными интегрирования и определяются по начальным условиям.

Колебания, происходящие по закону (9.17), называют затухающими, так как благодаря наличию множителя $e^{-bt}$ величина $x$ = **OM** с течением времени убывает, стремясь к нулю. График этих колебаний показан на рис. 9.4.

Промежуток времени $T_1$, равный перио $\sin(k_1 t + \alpha)$ , называют периодом затухающих колебаний:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}, \qquad (9.18)$$

Если учесть равенство (9.7), формулу (9.18) можно представить в виде:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - \frac{b^2}{k^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{k^2}}} \approx T\left(1 + 0{,}5\frac{b^2}{k^2}\right). \qquad (9.19)$$

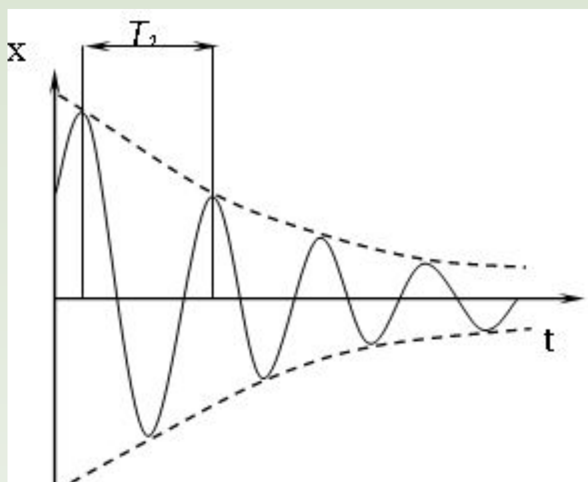



Рис. 9.4

Из полученных зависимостей видно, что $T_1 > T$, то есть при наличии сопротивления период колебаний несколько увеличивается. Но если сопротивлени $\frac{b^2}{k^2}$ мало ($b \ll k$), то величиной по сравнению с единицей можно пренебречь и считать $T_1 \approx T$.

Промежуток времени между двумя последовательными отклонениями колеблющейся точки также равен $T_1$. Следовательно, если первое максимальное отклонение $x_1$ пр $k_1T_1 = 2\pi$ ит в момент времени $t_1$, то второе

$$x_1 = ae^{-bt_1}\sin(k_1t_1 + \alpha),$$

$$x_2 = ae^{-b(t_1+T_1)}\sin(k_1t_1 + k_1T_1 + \alpha) = x_1e^{-bT_1}.$$

ент $t_2 = t_1 + T_1$ и т. д. Тогда, учитывая, что

$$x_{n+1} = x_ne^{-bT_1}$$

Аналогично для любого отклонения $x_{n+1}$ будет . Та $e^{-bT_1}$ м образом, абсолютные значения отклонений колеблющейся точки **М** от центра **О** убывают по закону геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии называется декрементом затухающих колебаний, а натуральный логарифм декремента – величина $bT_1$, называется логарифмическим декрементом.

Из полученных результатов следует, что малое сопротивление почти не влияет на период колебаний, но вызывает их постепенное затухание.

В случаях, когда $b > k$ или $b = k$, движение точки является апериодическим, то есть оно уже не имеет характера колебательного движения.

**Понятие о вынужденных колебаниях**

Пусть на точку **М**, движущуюся по оси *x*, кроме силы F , пропорциональной расстоянию *x*, и силы сопротивления среды , пропорциональной скорости, действует еще и периодически изменяющаяся сила Q (рис. 9.5), проекция

$$Q_x = H \sin pt. \qquad (9.20)$$

Силу Q называют возмущающей силой, а колебания, происходящие под дей ствием этой силы, называют вынужденными. Величина *p* в равенстве (9.20) является частотой возмущающей силы.

Д… ния точки **М** имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt} + H\sin(pt). \qquad (9.21)$$

Разделив обе части этого уравнения на m и обозначив $\frac{H}{m} = h$, приведем уравнение (9.21) к виду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + k^2x = h\sin(pt). \qquad (9.22)$$

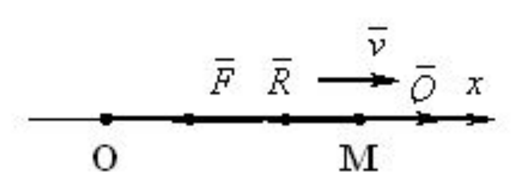



Рис. 9.5

Это есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью отличной от нуля. Общее решение этого уравнения можно пре $x = x_1 + x_2$, в виде:

где $x_1$ – общее решение уравнения (9.22), но без правой части, то есть при $b< k$ это решение имеет вид (9.17), а $x_2$ – какое-либо частное решение данного уравнения. Решение $x_2$ и $x_2 = A\sin(pt - \beta)$.

Тогда, общее решение дифференциального уравнения, дающего закон движения материальной точки при наличии возмущающей силы, будет иметь

$$x = ae^{-bt}\sin(k_1 t + \alpha) + A\sin(pt - \beta), \qquad (9.23)$$

где $a$ и $\alpha$ являются постоянными интегрирования и определяются по начальным

определяются по формулам:

$$\begin{cases} A = \dfrac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}}, \\ \mathrm{tg}\beta = \dfrac{2bp}{k^2 - p^2}. \end{cases} \qquad (9.24$$

Из анализа уравнений (9.24) следует, что наибольшего значения амплитуда вынужденных колебаний достигает при $p=k$, то есть в том случае, когда частота вынужденных колебаний равна частоте свободных колебаний точки, совершаемых под действием только восстанавливающей силы. Этот случай совпадения частот вынужденных и свободных колебаний носит название резонанса. Явление резонанса характерно тем, что в этом случае амплитуда колебаний точки достигает значения, близкого к максимальному.

Обозначим $A^0 = \frac{H}{c}$ - статическое смещение материальной точки под действием постоянной силы. Тогда $\eta$ - коэффициент динамичности можно определить из выражения

$$\eta = \frac{A}{A_0} = \frac{1}{1-\left(\frac{p}{k}\right)^2}. \qquad (9.25)$$

Вынужденные колебания обладают следующими важными свойствами, отличающими их от собственных колебаний точки:

1 Амплитуда вынужденных колебаний от начальных условий не зависит.

2 Вынужденные колебания при наличии сопротивления не затухают.

3 Частота вынужденных колебаний равна частоте возмущающей силы и от характеристик колеблющейся системы не зависит, то есть возмущающая сила «навязывает» системе свою частоту колебаний.

4 Даже при малой возмущающей силе можно получить интенсивные вынужденные колебания, если сопротивление мало, а частота *p* близка к *k* (резонанс).

5 Даже при больших значениях возмущающей силы вынужденные колебания можно сделать сколь угодно малыми, если частота *p* будет много меньше *k*.