

**Теорема Гаусса (закон Гаусса)** — один из основных законов электродинамики, входит в систему уравнений Максвелла.

Выражает связь (а именно равенство с точностью до постоянного коэффициента) между потоком напряжённости электрического поля сквозь замкнутую поверхность и зарядом в объёме, ограниченном этой поверхностью. Применяется отдельно для вычисления электростатических полей.

# Закон

# Гаусса

Суммарный электрический поток через произвольную замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0}$$

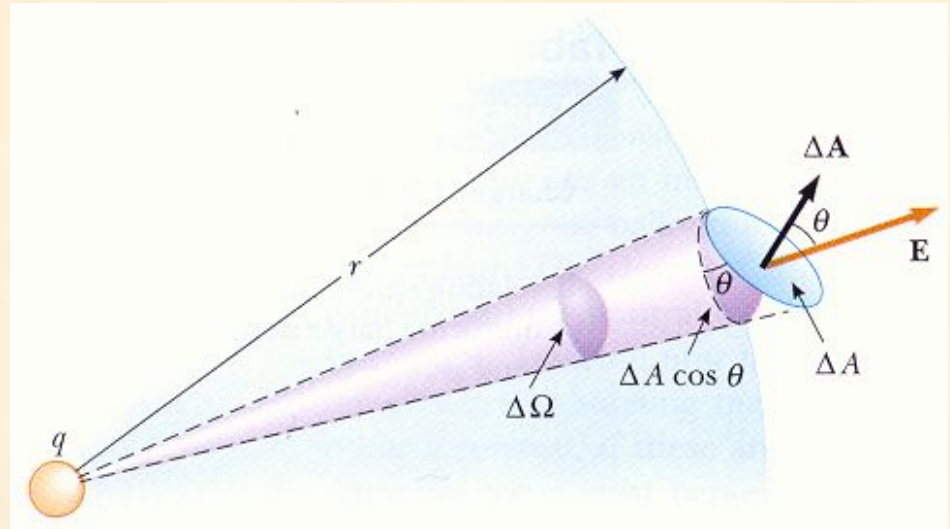
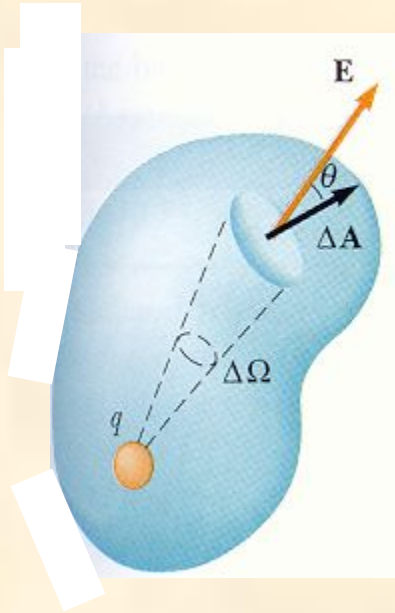
$q_{\text{in}}$  – суммарный заряд внутри поверхности,

$\vec{E}$  – напряженность электрического поля в произвольной точке на поверхности.

$\vec{E}$  учитывает вклады зарядов как внутри, так и вне поверхности.

# Формальное доказательство закона Гаусса

*Точечный заряд внутри замкнутой поверхности произвольной формы*



$$\Delta\Phi_E = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A} = (E \cos \theta) \Delta A = k_e q \frac{\Delta A \cos \theta}{r^2} \quad \text{Телесный угол } \Delta\Omega \equiv \frac{\Delta A \cos \theta}{r^2}$$

$$\Phi_E = k_e q \oint \frac{dA \cos \theta}{r^2} = k_e q \oint d\Omega = 4\pi k_e q = \frac{q}{\epsilon_0}$$

## Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Применение закона Гаусса – альтернативная процедура расчета **электрических полей**.

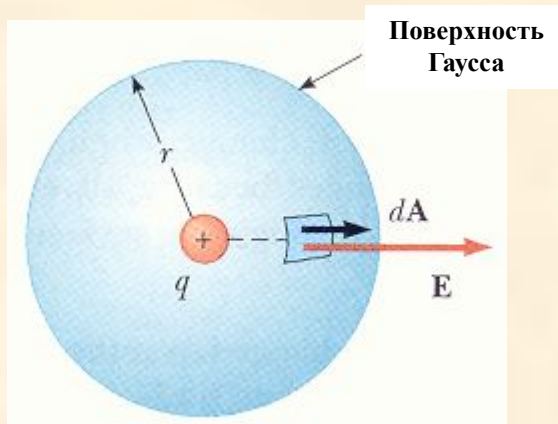
Закон Гаусса - фундаментальная **электростатическая сила**,  
действующая между **точечными зарядами**,  
обратно пропорциональна **квадрату расстояния** между ними.

Закон Гаусса **удобен** для расчета **электрических полей**  
высокосимметричных **распределений зарядов**.

# Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

## Электрическое поле изолированного точечного заряда

Сферическая симметрия пространства вокруг точечного заряда – сферическая поверхность Гаусса.



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

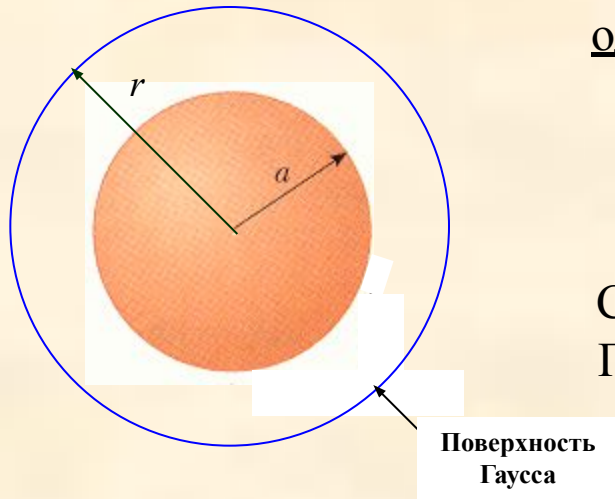
$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e \frac{q}{r^2}$$

Полученный результат эквивалентен результату, полученному с помощью закона Кулона.

# Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

## Сферически симметричное распределение заряда



Непроводящий твердый шар радиуса  $a$  заряжен с однородной **объемной плотностью заряда  $\rho$**  и несет суммарный **положительный заряд  $Q$**

$$r > a:$$

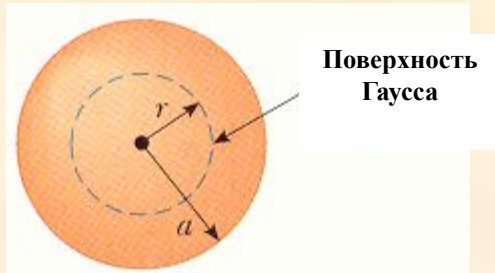
Сферическая симметрия – сферическая поверхность Гаусса радиуса  $r$  вне шара и концентрическая с ним.

$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

Однородно заряженная сфера - электрическое поле вне сферы эквивалентно полю, создаваемому **точечным зарядом**, расположенным в центре сферы.

# Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

## Сферически симметричное распределение заряда



Непроводящий твердый шар радиуса  $a$  заряжен с однородной **объемной плотностью заряда  $\rho$**  и несет суммарный **положительный заряд  $Q$**

$$r < a:$$

Сферическая симметрия – сферическая поверхность Гаусса радиуса  $r$  внутри шара и концентрическая с ним.

В любой точке поверхности Гаусса  $\vec{E} \uparrow \uparrow \Delta \vec{A}_i$  и  $E = \text{const}$ .

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} \quad q_{\text{внутри}} = \rho V' = \rho \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

$$E = \frac{q_{\text{внутри}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad \rho = Q / \frac{4}{3} \pi a^3 \quad E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} = k_e \frac{Q}{a^3} r$$

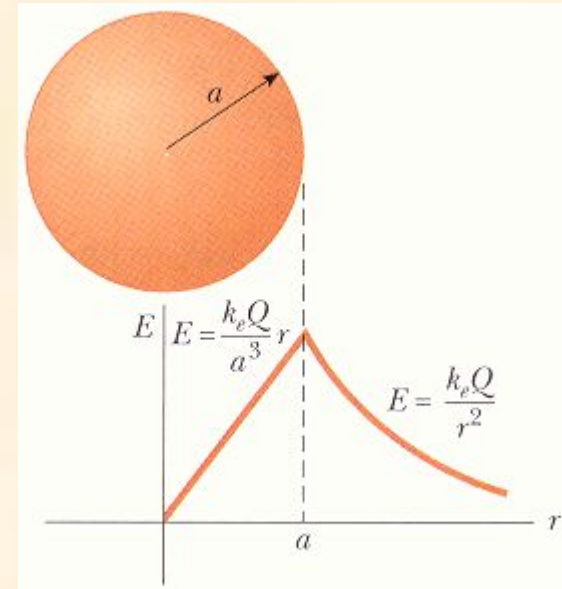
# Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

## *Сферически симметричное распределение заряда*

Непроводящий твердый шар радиуса  $a$  заряжен с однородной **объемной плотностью заряда  $\rho$**  и несет суммарный **положительный заряд  $Q$**

$$r > a$$
$$E = \lim_{r \rightarrow a} \left( k_e \frac{Q}{r^2} \right) = k_e \frac{Q}{a^2}$$

$$r < a$$
$$E = \lim_{r \rightarrow a} \left( k_e \frac{Q}{a^3} r \right) = k_e \frac{Q}{a^3} a = k_e \frac{Q}{a^2}$$



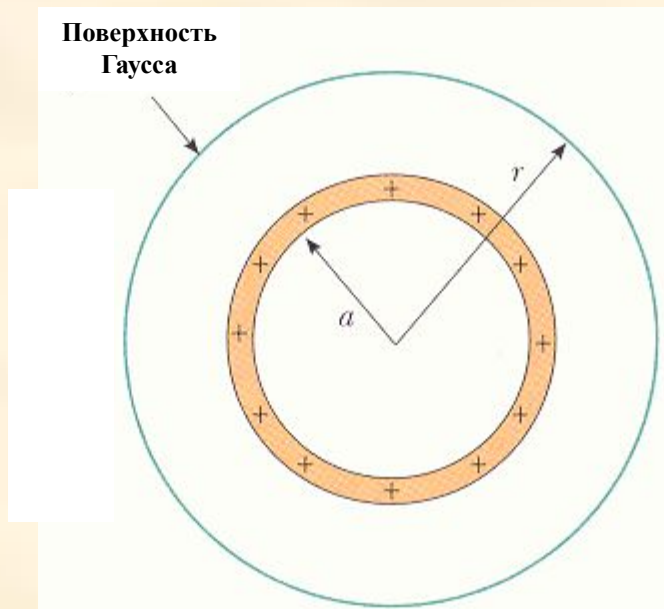


# Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

## *Сферически симметричное распределение заряда*

Напряженность электрического поля, создаваемого тонким сферическим слоем  
(радиус  $a$ , общий заряд  $Q$  однородно распределен по поверхности слоя)

Вне слоя



$$r > a$$

$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

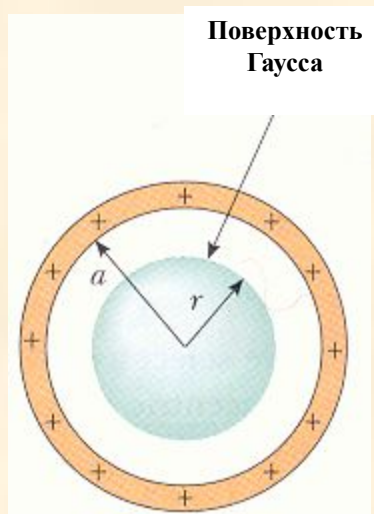
Напряженность электрического поля вне слоя аналогична той, что создается **точечным зарядом**  $Q$ , расположенным в центре шара, которому принадлежит слой.

# Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

## *Сферически симметричное распределение заряда*

Напряженность электрического поля, создаваемого тонким сферическим слоем  
(радиус  $a$ , общий заряд  $Q$  однородно распределен по поверхности слоя)

### Внутри слоя



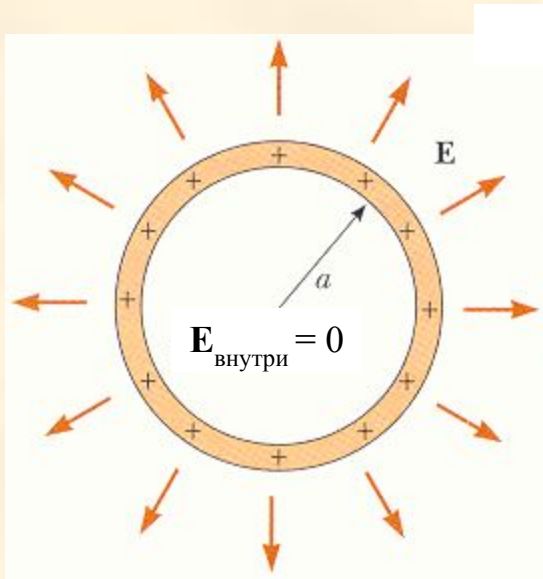
$$r < a$$

$$E = 0$$

# Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

## *Сферически симметричное распределение заряда*

Напряженность электрического поля, создаваемого тонким сферическим слоем  
(радиус  $a$ , общий заряд  $Q$  однородно распределен по поверхности слоя)



Защита электронных устройств  
от воздействия внешних  
электрических полей

# Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

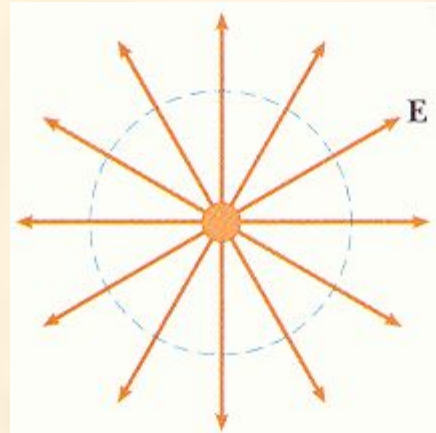
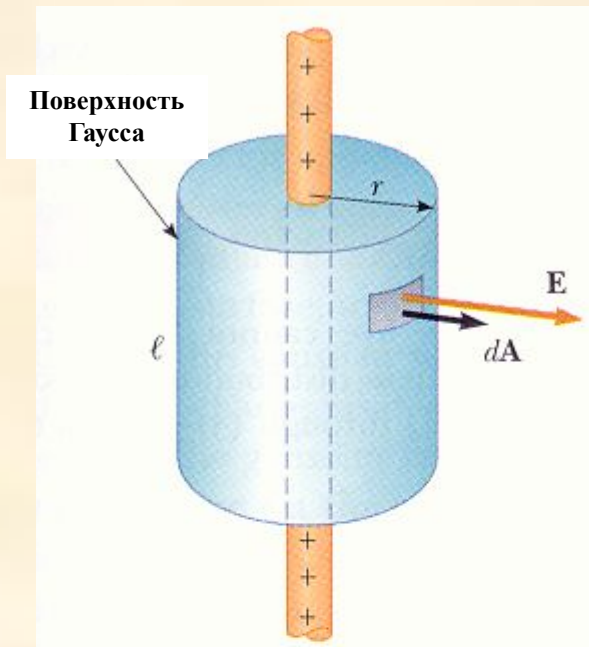
## Цилиндрическая симметрия в распределении заряда

Электрическое поле, создаваемое положительно заряженным линейным проводником бесконечной длины с постоянной плотностью  $\lambda$  заряда на единицу длины.

Цилиндрическая симметрия пространства вокруг линейного заряда – цилиндрическая поверхность Гаусса.

В любой точке поверхности Гаусса

$$\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{A} \text{ и } E = \text{const.}$$

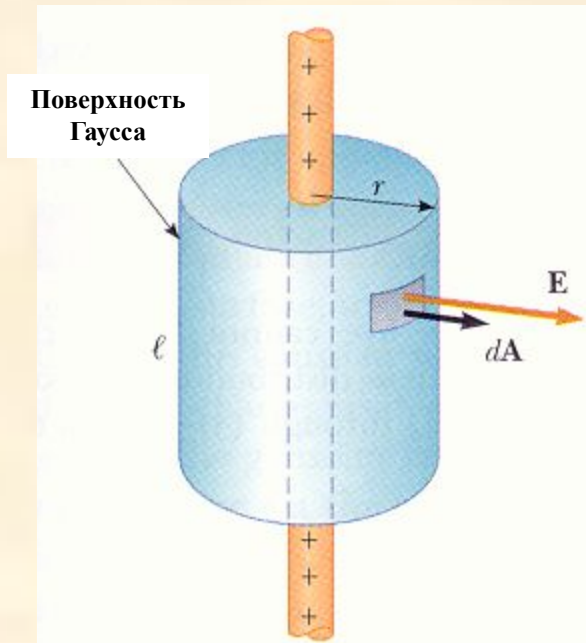


Вид сверху

# Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

## Цилиндрическая симметрия в распределении заряда

Электрическое поле, создаваемое положительно заряженным линейным проводником бесконечной длины с постоянной плотностью  $\lambda$  заряда на единицу длины.



Суммарный заряд внутри поверхности Гаусса равен  $\lambda l$ .

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = EA = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$A = 2\pi r l \quad E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

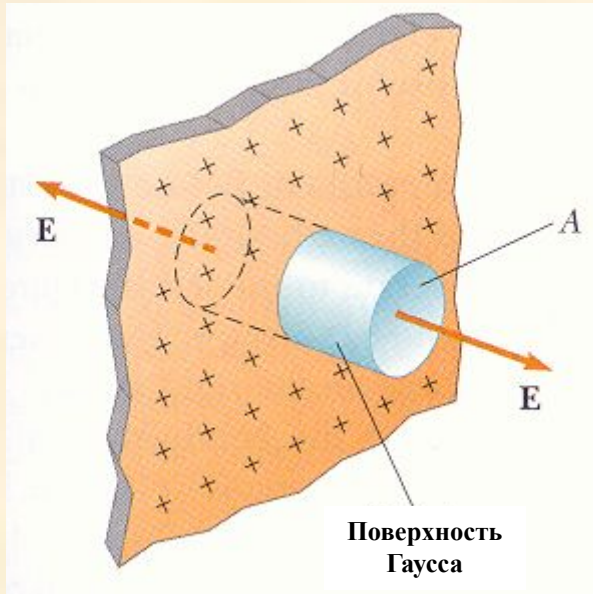
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = 2k_e \frac{\lambda}{r} \quad E \propto \frac{1}{r}$$

# Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

## Плоскосимметричное распределение заряда

Электрическое поле, создаваемое положительно заряженной плоскостью с однородной поверхностной плотностью заряда  $\sigma$

Плоская симметрия пространства вокруг линейного заряда – поверхность Гаусса - маленький цилиндр.



В любой точке поверхности Гаусса

$$\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{A} \text{ и } E = \text{const.}$$

Боковая поверхность цилиндра не пересекается силовыми линиями электрического поля.

Общий заряд внутри поверхности Гаусса равен  $q_{\text{внутри}} = \sigma A$ .

$$\text{Общий поток } \Phi_E = 2EA = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}.$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad E - \text{const}$$

# Электрический потенциал

## Разность потенциалов и электрический потенциал

Работа электрического поля  $\vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$

$d\vec{s}$  - бесконечно малый вектор перемещения, касательный к направлению последнего.

Потенциальная энергия системы “заряд-поле” изменяется на величину

$$dU = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$A \rightarrow B \quad \Delta U = U_B - U_A$$

$$\Delta U = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Величина этого линейного интеграла не зависит от траектории перемещения заряда из точки  $A$  в точку  $B$ , поскольку электрическая сила консервативна.



# Разность потенциалов и электрический потенциал

**Электрический потенциал**  $V = U/q_0$  в любой точке электрического поля не зависит от величины  $q_0$ .

**Изменение потенциальной энергии системы**  $\Delta U = U_B - U_A$

**Разность потенциалов**  $\Delta V = V_B - V_A$        $\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$

**Работа, выполненная внешней силой** без изменения кинетической энергии пробного заряда,       $W = \Delta U$        $W = q\Delta V$

**Единица измерения** электрического потенциала в СИ:  $[V] = 1 \text{ В} \equiv 1 \text{ Дж/Кл}$

$$1 \text{ эВ} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ Кл} \cdot \text{В} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ Дж}$$

## Разность потенциалов в однородном электрическом поле

$$E = \text{const}$$

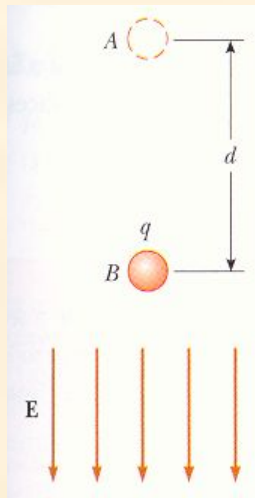
$$|\vec{s}| = d$$

$\vec{s} \uparrow \uparrow$  силовые линии

$$V_B - V_A = \Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B (E \cos 0^\circ) ds = - \int_A^B E ds = -Ed$$

$$\Delta V < 0$$

$$V_B < V_A$$



**Силовые линии** электрического поля всегда **направлены** в направлении **уменьшения** электрического **потенциала**.

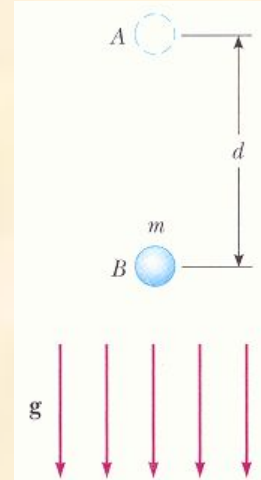
## Разность потенциалов в однородном электрическом поле

$$q_0 = \text{const} \quad A \rightarrow B \quad \Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 E d$$

Если  $q_0 > 0$ , то  $\Delta U < 0$ .

Система “**положительный заряд** – электрическое поле”:  
потенциальная энергия **убывает**, а **заряженная частица**  
**приобретает** кинетическую энергию, если **заряд**  
движется в направлении поля.

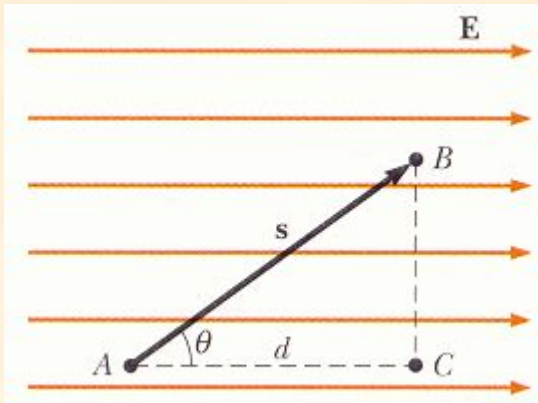
Ситуация **аналогична** той, в которой **работа**  
выполняется гравитационным  
**полем** над падающим **объектом**.



Система “**отрицательный заряд** - электрическое поле”:  
потенциальная энергия **увеличивается**, если **заряд** движется в направлении поля.

# Разность потенциалов в однородном электрическом поле

Более общий случай:  $\vec{E} \perp \vec{s}$  силовые линии



$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E \int_A^B ds = -E \cdot s$$

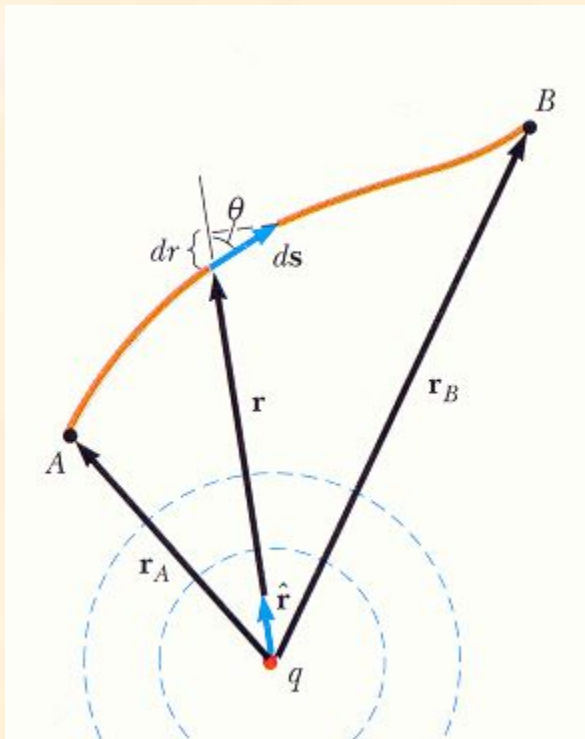
$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 E \cdot s$$

$$\Delta V = 0, \text{ если } \vec{E} \perp \vec{s}$$

$$V_B - V_A = V_C - V_A \quad \Longrightarrow \quad V_B = V_C$$

**Эквипотенциальная поверхность** - произвольная поверхность, состоящая из непрерывного распределения точек с одним и тем же электрическим потенциалом.

# Электрический потенциал точечных зарядов



$$V_B = ?$$

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = ds \cos \theta \quad ds \cos \theta = dr$$

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \left( k_e \frac{q}{r^2} \right) dr$$

$$V_B - V_A = -k_e q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{k_e q}{r} \Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$V_B - V_A = k_e q \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

**независимо от траектории движения**  
**между точками A и B**

## Электрический потенциал точечных зарядов

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{не зависит от траектории движения между точками } A \text{ и } B$$

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{не зависит от траектории движения между точками } A \text{ и } B$$

$$\int_A^B q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Работа, совершенная электрической силой, **не зависит** от пути между  $A$  и  $B$

Электрическая сила  
консервативна

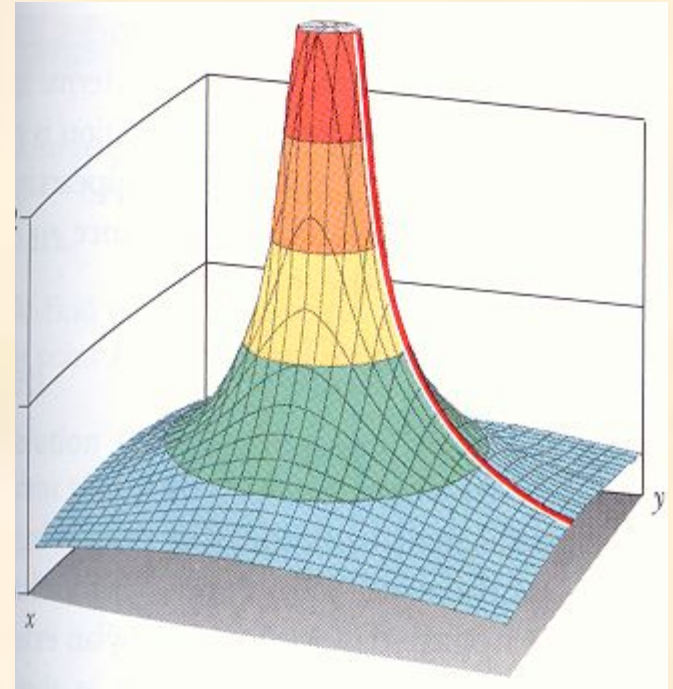
Электрическое поле  
неподвижного точечного  
заряда консервативно

$$V_B - V_A = k_e q \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

## Электрический потенциал точечных зарядов

Если  $V = 0$  в  $r_A = \infty$   $\longrightarrow$   $V = k_e \frac{q}{r}$

Электрический потенциал (V)



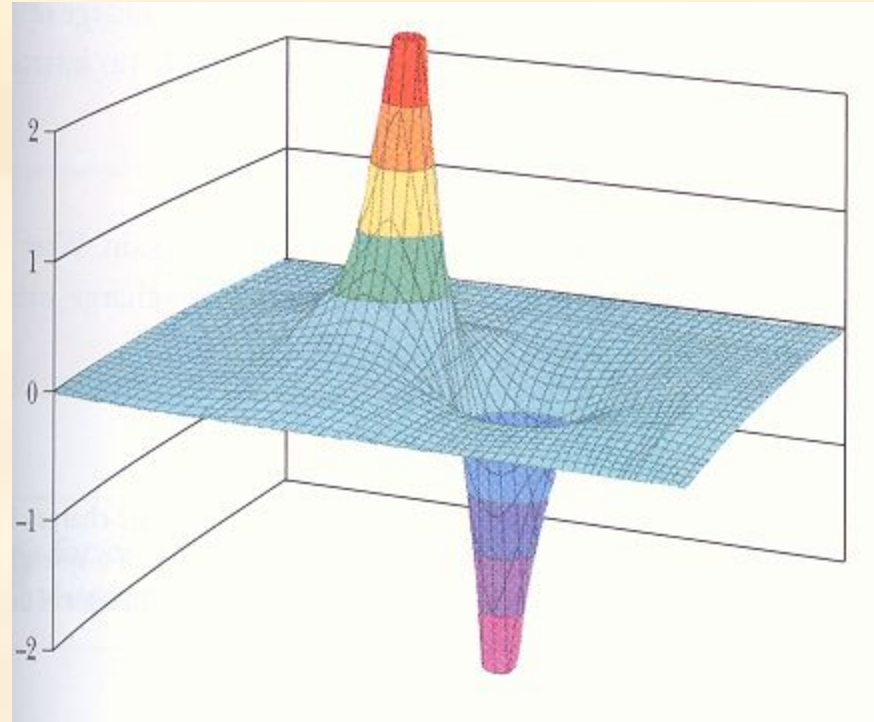
**Изолированный положительный заряд**

$$V = k_e \frac{q}{r}$$

## Электрический потенциал точечных зарядов

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Электрический потенциал (V)



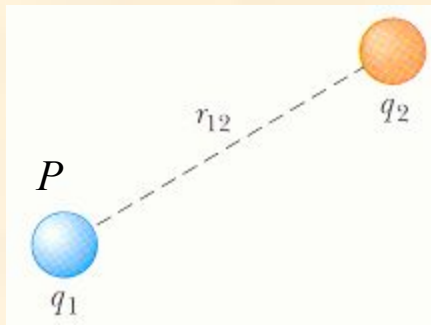
Диполь



# Потенциальная энергия точечных зарядов

Потенциальная энергия  
взаимодействия двух точечных зарядов

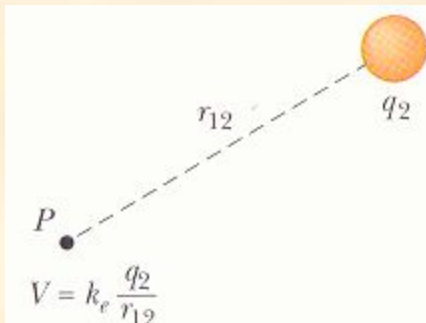
$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



Последняя равна работе  $q_1 V_2$ , которую необходимо выполнить внешней силе, чтобы переместить заряд  $q_1$  из бесконечности в точку  $P$  без ускорения.

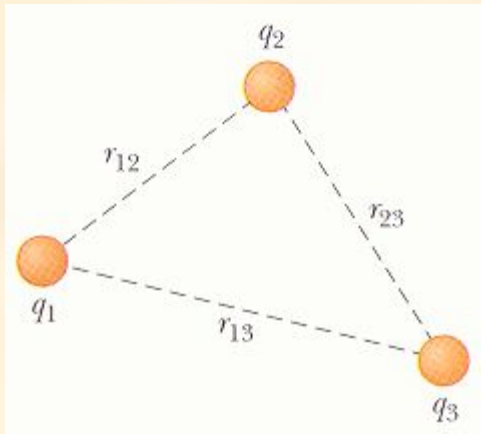
$V_2$  – электрический потенциал в точке  $P$ , созданный зарядом  $q_2$ .

Если  $q_1$  и  $q_2$  **одного** знака, то  $U > 0$ , т.е. внешняя сила должна выполнить **положительную** работу над системой, чтобы сблизить два заряда.



Если  $q_1$  and  $q_2$  **противоположного** знака, то  $U < 0$ , т.е., внешняя сила должна выполнить **отрицательную** работу над системой, чтобы предотвратить сближение двух зарядов.

## Потенциальная энергия точечных зарядов



Потенциальная энергия трех точечных зарядов

$$U = k_e \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

$$U = W_{12} + W_{13} + W_{23}$$

# Электрическое поле и электрический потенциал

Разность потенциалов  $\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_A^B \underline{\underline{E}} \cdot d\underline{\underline{S}}$

$$dV = -\underline{\underline{E}} \cdot d\underline{\underline{S}} \implies |\underline{\underline{E}}| = E_x \implies \underline{\underline{E}} \cdot d\underline{\underline{S}} = E_x dx \implies dV = -E_x dx$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

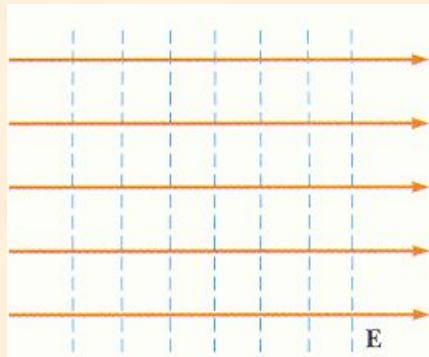
Электрическое поле – мера скорости изменения электрического потенциала в пространстве.

$dV = 0$  вдоль эквипотенциальной поверхности, поэтому  $dV = -\underline{\underline{E}} \cdot d\underline{\underline{S}} = 0$ , и

$$\underline{\underline{E}} \perp d\underline{\underline{S}}$$

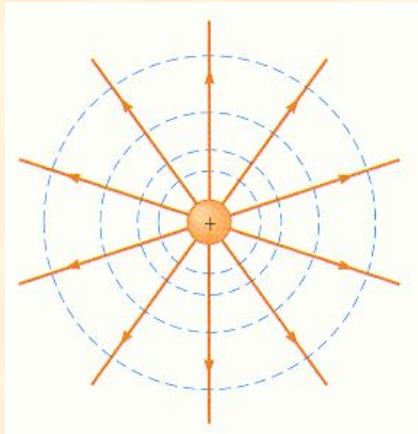
## Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля

Эквипотенциальные поверхности всегда должны быть перпендикулярны силовым линиям электрического поля и пересекать их.



Бесконечная заряженная плоскость

## Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля



Точечный заряд

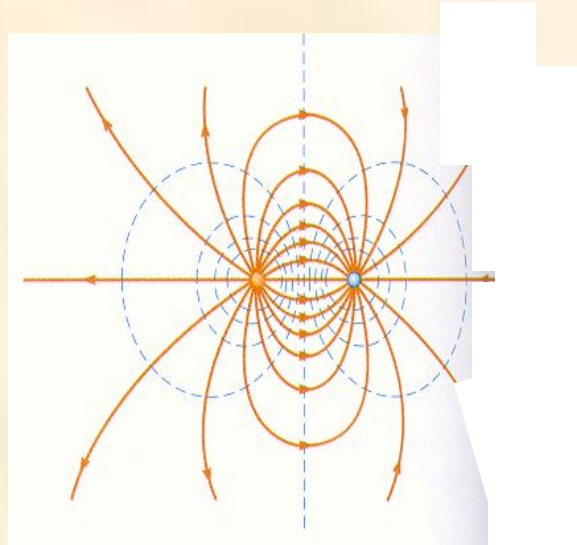
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r dr \quad dV = -E_r dr$$

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \quad V = k_e q/r$$

$$V = f(r)$$

Потенциальное поле точечного заряда сферически симметрично.

## Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля



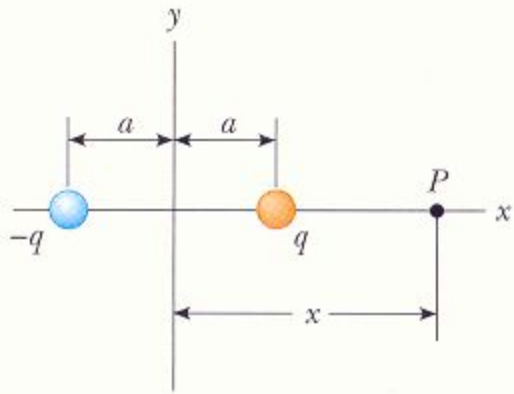
Электрический диполь

## Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля

Общий  
случай

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)V$$



## Электрический потенциал диполя

**Точка P:**

$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left( \frac{q}{x-a} - \frac{q}{x+a} \right) = \frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}$$

**Точка ( $x \gg a$ ):**

$$V \approx \frac{2k_e qa}{x^2} \quad E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{4k_e qa}{x^3}$$

**Точка (P между зарядами):**

$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left( \frac{q}{a-x} - \frac{q}{a+x} \right) = \frac{2k_e qa}{a^2 - x^2} \quad E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2} \right)$$

**Точка (P расположена слева от отрицательного заряда):**

$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left( \frac{q}{x+a} - \frac{q}{x-a} \right) = -\frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}$$



# Расчет электрического потенциала

## I. Принцип суперпозиции:

Электрический потенциал системы точечных зарядов равен алгебраической (скалярной) сумме потенциалов точечных зарядов.

Электрический потенциал, создаваемый в произвольной точке  $P$  непрерывным распределением зарядов, равен интегралу потенциалов точечных зарядов, соответствующих этому распределению.

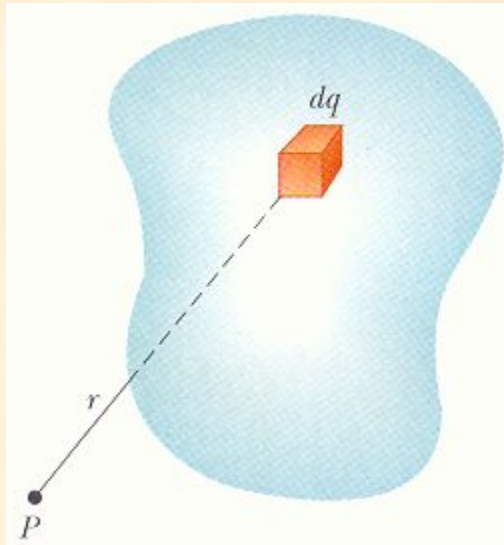
## II. Расчет линейного интеграла от

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

для заданного распределения зарядов.

$V$  обычно предполагается равным 0 в точке, расположенной бесконечно далеко от зарядов.

## Электрический потенциал непрерывного распределения зарядов



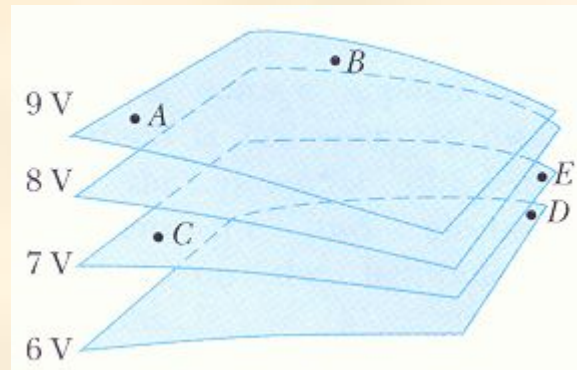
$$dV = k_e \frac{dq}{r}$$

$$V = k_e \int \frac{dq}{r}$$

## **Электрический потенциал**

**Электрический потенциал описывает электростатические явления в более упрощенной форме, чем это можно сделать используя понятия об электростатическом поле и электрических силах.**

## Контрольный вопрос



В какой точке напряженность электрического поля максимальна?  
Как она направлена?