Теорема Гаусса (закон Гаусса) — один из основных законов электродинамики, входит в систему уравнений Максвелла.
Выражает связь (а именно равенство с точностью до постоянного коэффициента) между потоком напряжённости электрического поля сквозь замкнутую поверхность и зарядом в объёме, ограниченном этой поверхностью. Применяется отдельно для вычисления электростатических полей.

Закон Гаусса

Суммарный электрический поток через произвольную замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{внутри}}{\varepsilon_0}$$

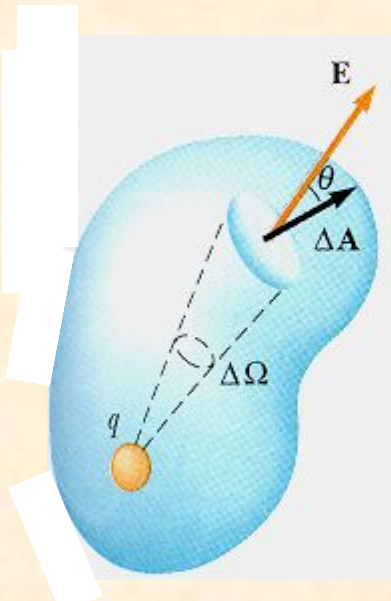
q_{in} – суммарный заряд внутри поверхности,

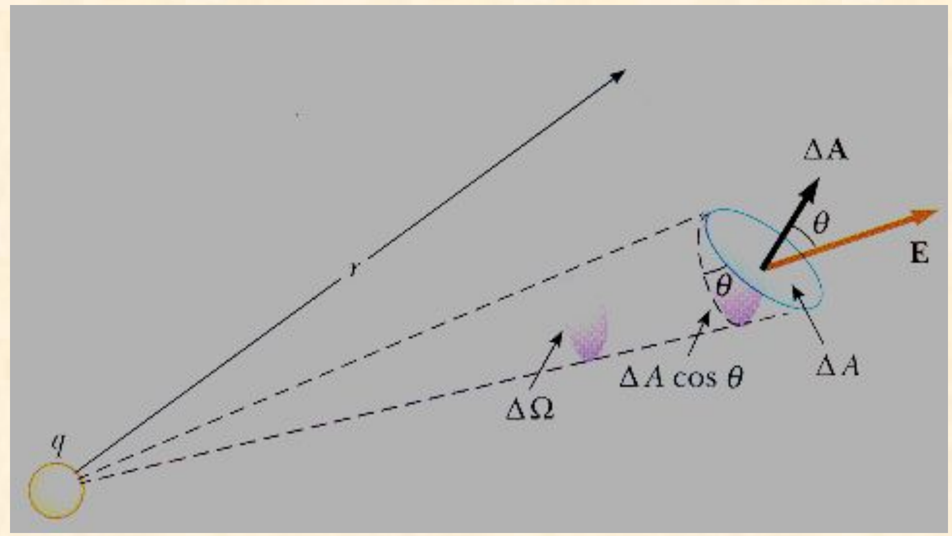
$\vec{E}$ – напряженность электрического поля в произвольной точке на поверхности.

$\vec{E}$ учитывает вклады зарядов как внутри, так и вне поверхности.

Формальное доказательство закона Гаусса

***Точечный заряд** внутри замкнутой поверхности произвольной формы*





$$\Delta\Phi_E = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A} = (E\cos\theta)\Delta A = k_e q\frac{\Delta A\cos\theta}{r^2}$$

Телесный угол $\Delta\Omega \equiv \dfrac{\Delta A\cos\theta}{r^2}$

$$\Phi_E = k_e q\oint\frac{dA\cos\theta}{r^2} = k_e q\oint d\Omega = 4\pi k_e q = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Применение закона Гаусса – альтернативная процедура расчета электрических полей.

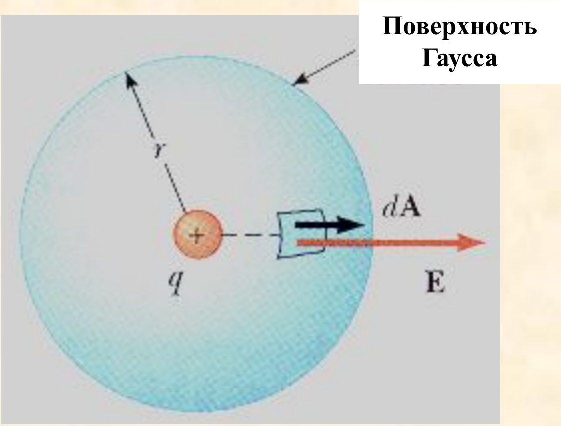
Закон Гаусса - фундаментальная **электростатическая сила**, действующая между точечными зарядами, обратно пропорциональна **квадрату расстояния** между ними.

Закон Гаусса **удобен** для расчета электрических полей высокосимметричных распределений зарядов.

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Электрическое поле изолированного точечного заряда

Сферическая симметрия пространства вокруг точечного заряда – сферическая поверхность Гаусса.



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

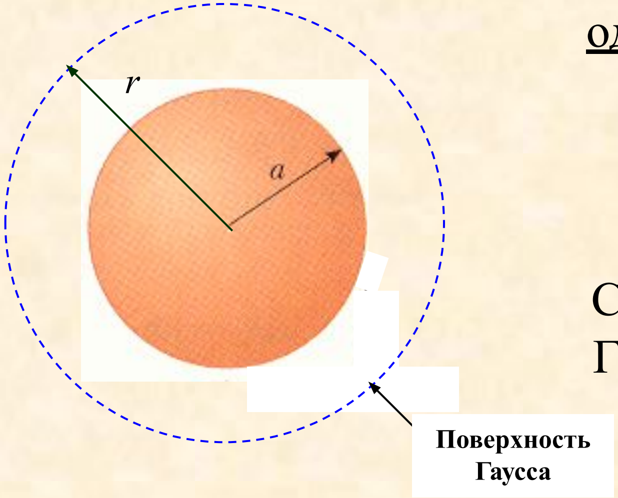
$$\oint E dA = E \oint dA = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k_e \frac{q}{r^2}}$$

Полученный результат эквивалентен результату, полученному с помощью закона Кулона.

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда



Непроводящий твердый шар радиуса a заряжен с однородной объемной плотностью заряда ρ и несет суммарный положительный заряд Q

$r > a$:

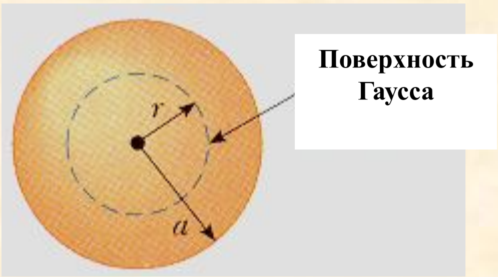
Сферическая симметрия – сферическая поверхность Гаусса радиуса r вне шара и концентрическая с ним.

$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

Однородно заряженная сфера - электрическое поле вне сферы эквивалентно полю, создаваемому точечным зарядом, расположенным в центре сферы.

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда



Непроводящий твердый шар радиуса *a* заряжен с однородной объемной плотностью заряда *ρ* и несет суммарный положительный заряд *Q*

***r* < *a*:**

Сферическая симметрия – сферическая поверхность Гаусса радиуса *r* внутри шара и концентрическая с ним.

В любой точке поверхности Гаусса $\vec{E} \uparrow\uparrow \Delta\vec{A}_i$ и $E = \text{const}$.

$$\oint E dA = E \oint dA = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q_{\text{внутри}}}{\varepsilon_0} \qquad q_{\text{внутри}} = \rho V' = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$E = \frac{q_{\text{внутри}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \qquad \rho = Q \Big/ \frac{4}{3}\pi a^3 \qquad E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = k_e \frac{Q}{a^3} r$$

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда

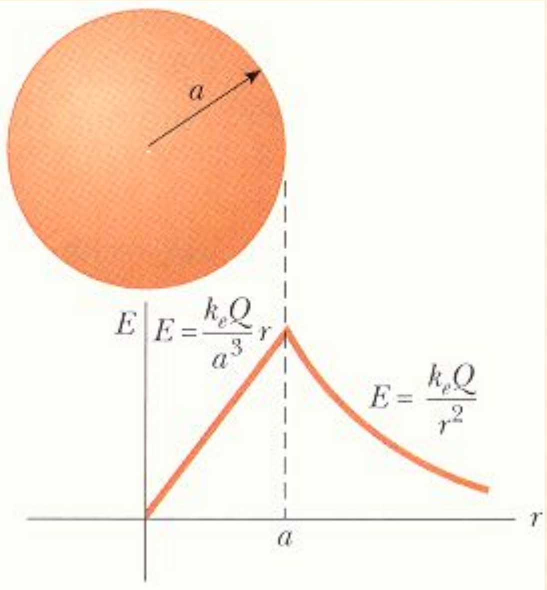
Непроводящий твердый шар радиуса *a* заряжен с однородной объемной плотностью заряда ρ и несет суммарный положительный заряд Q

r > a

$$E = \lim_{r \to a}\left(k_e \frac{Q}{r^2}\right) = k_e \frac{Q}{a^2}$$

r < a

$$E = \lim_{r \to a}\left(k_e \frac{Q}{a^3} r\right) = k_e \frac{Q}{a^3} a = k_e \frac{Q}{a^2}$$

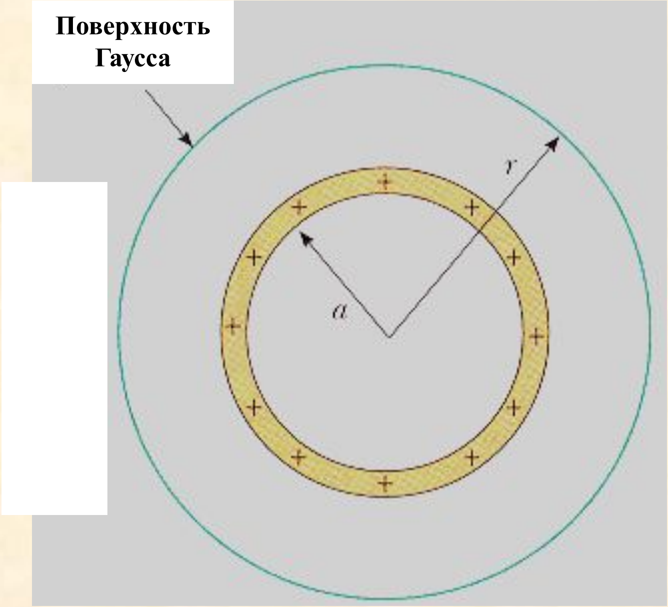


Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда

Напряженность электрического поля, создаваемого тонким сферическим слоем (радиус *a*, общий заряд *Q* однородно распределен по поверхности слоя)

Вне слоя



$r > a$

$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

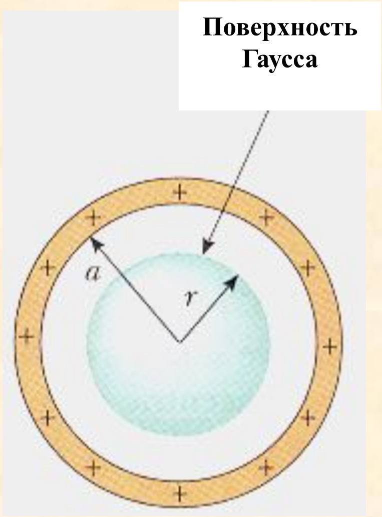
Напряженность электрического поля вне слоя аналогична той, что создается точечным зарядом *Q*, расположенным в центре шара, которому принадлежит слой.

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда

Напряженность электрического поля, создаваемого тонким сферическим слоем (радиус a, общий заряд Q однородно распределен по поверхности слоя)

Внутри слоя



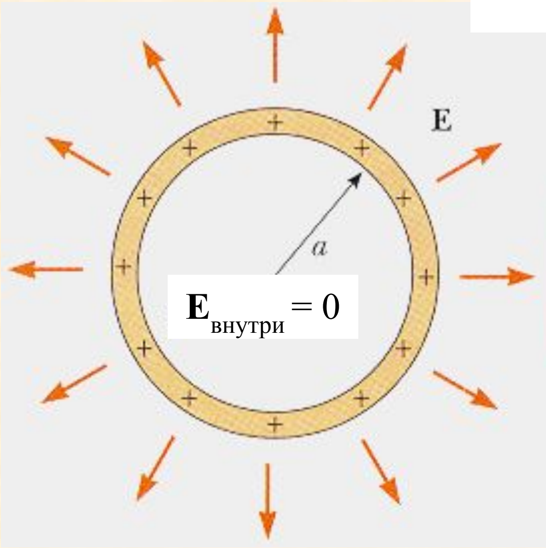
$r < a$

$$E = 0$$

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда

Напряженность электрического поля, создаваемого тонким сферическим слоем (радиус a, общий заряд Q однородно распределен по поверхности слоя)



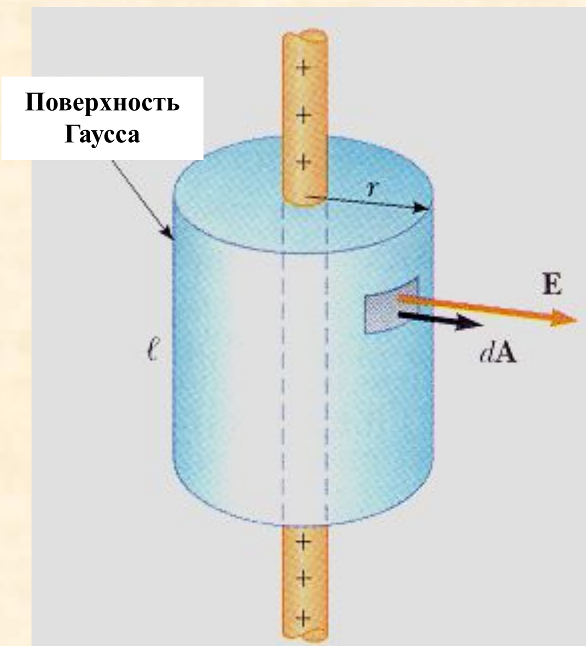
Защита электронных устройств от воздействия внешних электрических полей

Применение закона Гаусса
для различных распределений заряда

Цилиндрическая симметрия в распределении заряда

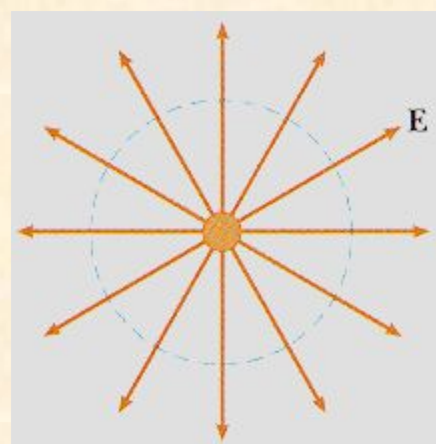
Электрическое поле, создаваемое положительно заряженным линейным проводником бесконечной длины с постоянной плотностью λ заряда на единицу длины.

Цилиндрическая симметрия пространства вокруг линейного заряда – цилиндрическая поверхность Гаусса.



В любой точке поверхности Гаусса

$\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{A}$ и $E = \text{const}$.

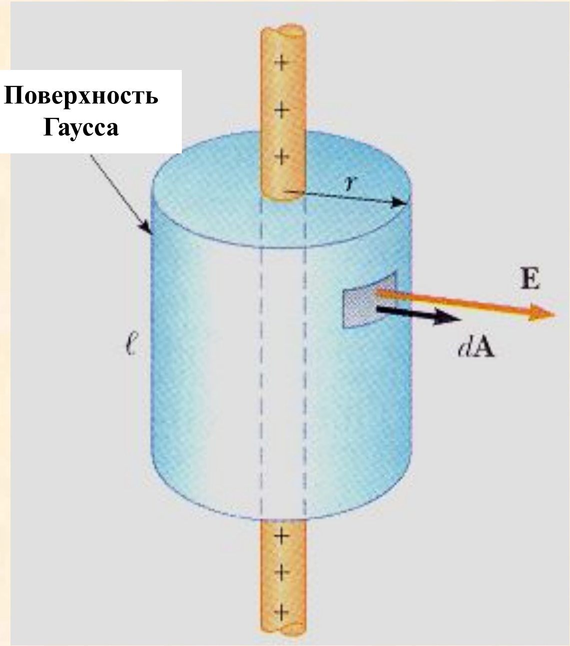


Вид сверху

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Цилиндрическая симметрия в распределении заряда

Электрическое поле, создаваемое положительно заряженным линейным проводником бесконечной длины с постоянной плотностью λ заряда на единицу длины.



Суммарный заряд внутри поверхности Гаусса равен $\lambda\, l$.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = EA = \frac{q_{\text{внутри}}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

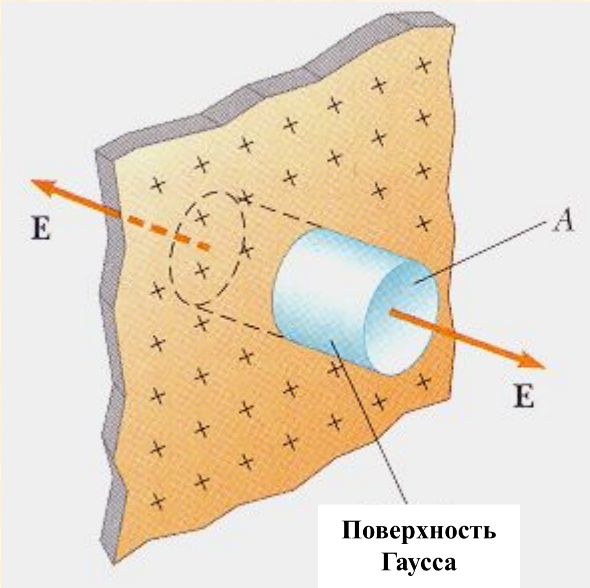
$$A = 2\pi r l \qquad E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 2k_e \frac{\lambda}{r} \qquad E \propto \frac{1}{r}$$

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Плоскосимметричное распределение заряда

Электрическое поле, создаваемое положительно заряженной плоскостью с однородной поверхностной плотностью заряда σ



Плоская симметрия пространства вокруг линейного заряда – поверхность Гаусса - маленький цилиндр.

В любой точке поверхности Гаусса

$\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{A}$ и $E = \text{const}$.

Боковая поверхность цилиндра не пересекается силовыми линиями электрического поля.

Общий заряд внутри поверхности Гаусса равен $q_{\text{внутри}} = \sigma A$.

Общий поток $\Phi_E = 2EA = \dfrac{q_{\text{внутри}}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma A}{\varepsilon_0}$.

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad E \text{ - const}$$

Электрический потенциал

Разность потенциалов и электрический потенциал

Работа электрического поля $\vec{F}\cdot d\vec{s} = q_0\vec{E}\cdot d\vec{s}$

$d\vec{s}$ - бесконечно малый вектор перемещения, касательный к направлению последнего.

Потенциальная энергия системы "заряд-поле" изменяется на величину

$$dU = -q_0\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$A \to B \qquad \Delta U = U_B - U_A$$

$$\Delta U = -q_0\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Величина этого линейного интеграла не зависит от траектории перемещения заряда из точки *A* в точку *B*, поскольку электрическая сила консервативна.

Разность потенциалов и электрический потенциал

Электрический потенциал $V = U/q_0$ в любой точке электрического поля не зависит от величины q_0.

Изменение **потенциальной энергии** системы $\Delta U = U_B - U_A$

Разность потенциалов $\Delta V = V_B - V_A$

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Работа, выполненная **внешней** силой без изменения кинетической энергии пробного заряда, $W = \Delta U$ $\quad W = q\Delta V$

Единица измерения электрического потенциала в СИ: [В] = 1 В ≡ 1 Дж/Кл

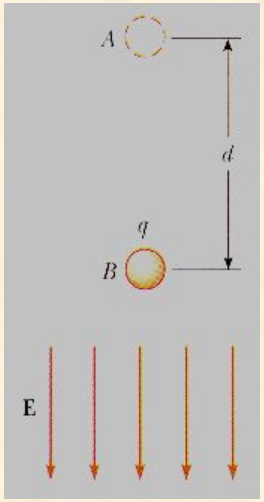
1 эВ = 1.60 × 10^{-19} Кл · В = 1.60 × 10^{-19} Дж

Разность потенциалов в однородном электрическом поле

$E = const$ $|\vec{s}| = d$ $\vec{s} \uparrow\uparrow$ силовые линии

$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B \left(E \cos 0^{\circ}\right) ds = -\int_A^B E ds = -Ed$$

$\Delta V < 0$ $V_B < V_A$



Силовые линии электрического поля всегда **направлены** в направлении **уменьшения** электрического **потенциала**.

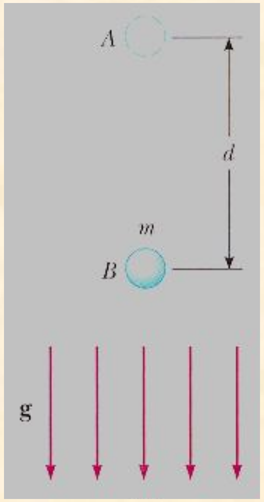
Разность потенциалов в однородном электрическом поле

$q_0 = const \qquad A \to B \qquad \Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 E d$

Если $q_0 > 0$, то $\Delta U < 0$.

Система “положительный заряд – электрическое поле”: потенциальная **энергия убывает**, а заряженная частица **приобретает** кинетическую энергию, если заряд движется в направлении поля.

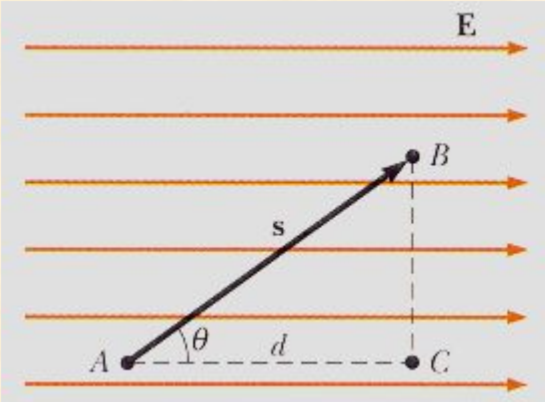
Ситуация **аналогична** той, в которой **работа** выполняется гравитационным **полем** над падающим **объектом**.



Система “отрицательный заряд - электрическое поле”: потенциальная **энергия увеличивается**, если заряд движется в направлении поля.

Разность потенциалов в однородном электрическом поле

Более общий случай: $\vec{s} \not\uparrow\uparrow$ **силовые линии**



$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E}\int_A^B d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s}$$

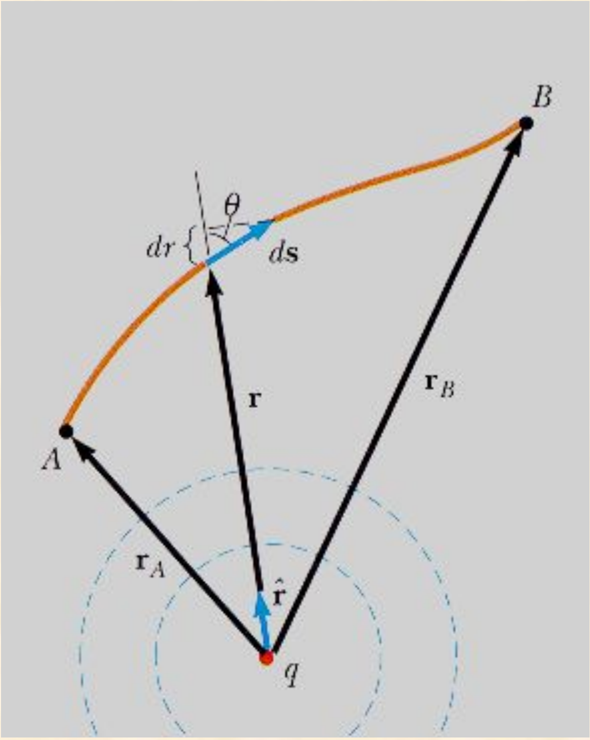
$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 \vec{E} \cdot \vec{s}$$

$$\Delta V = 0, \quad \text{если } \vec{E} \perp \vec{s}$$

$$V_B - V_A = V_C - V_A \quad \Longrightarrow \quad V_B = V_C$$

Эквипотенциальная поверхность - произвольная **поверхность,** состоящая из непрерывного распределения **точек** с **одним и тем же** электрическим **потенциалом.**

Электрический потенциал точечных зарядов



$$V_B = ?$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad \vec{E}\cdot d\vec{s} = k_e \frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{s}$$

$$\hat{r}\cdot d\vec{s} = ds\cos\theta \qquad ds\cos\theta = dr$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = \left(k_e \frac{q}{r^2}\right)dr$$

$$V_B - V_A = -k_e q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \left.\frac{k_e q}{r}\right|_{r_A}^{r_B} \qquad V_B - V_A = k_e q\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

независимо от **траектории** движения между точками ***A*** и ***B***

Электрический потенциал точечных зарядов

$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$ **не зависит** от траектории движения между точками *A* и *B*

$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$ **не зависит** от траектории движения между точками *A* и *B*

$\int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$ → Работа, совершенная электрической силой, **не зависит** от пути между *A* и *B*

↓

Электрическая сила консервативна

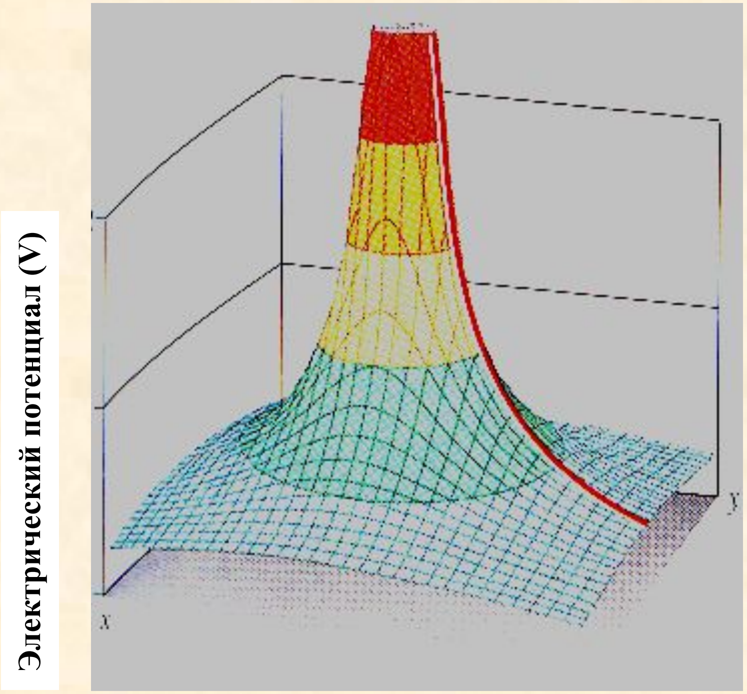
↓

Электрическое поле неподвижного точечного заряда консервативно

$$V_B - V_A = k_e q\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

Электрический потенциал точечных зарядов

Если $V = 0$ в $r_A = \infty$ $\Rightarrow$ $V = k_e \dfrac{q}{r}$

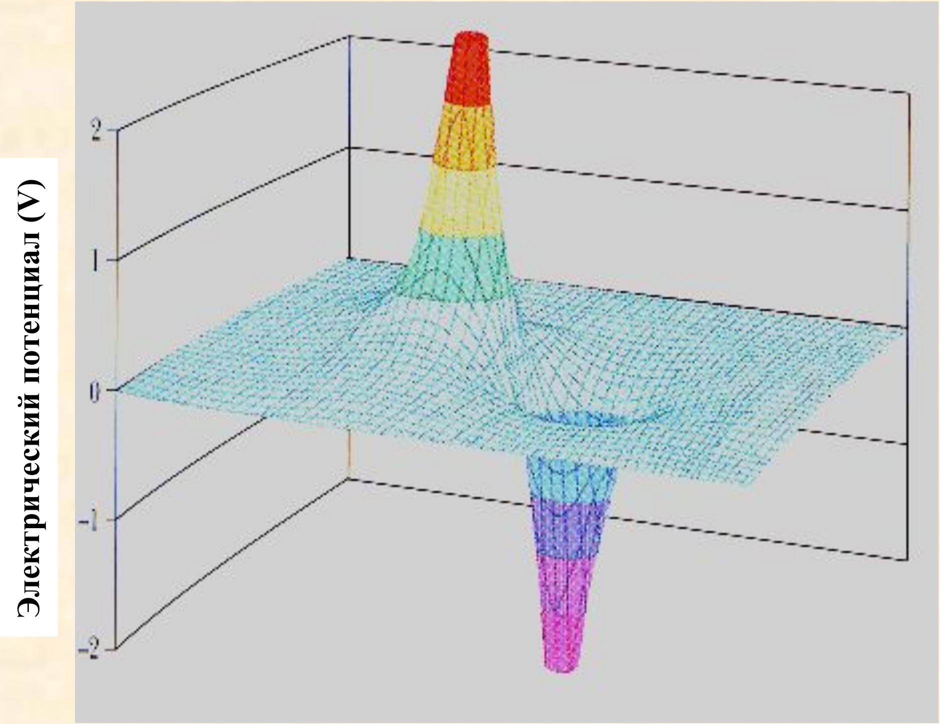


Изолированный положительный заряд

$$V = k_e \frac{q}{r}$$

Электрический потенциал точечных зарядов

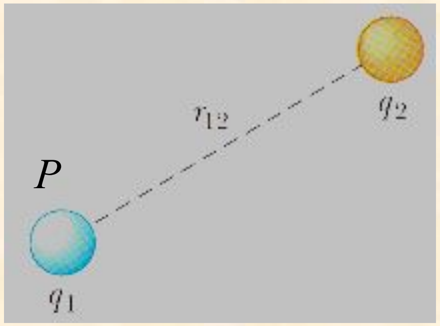
$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$



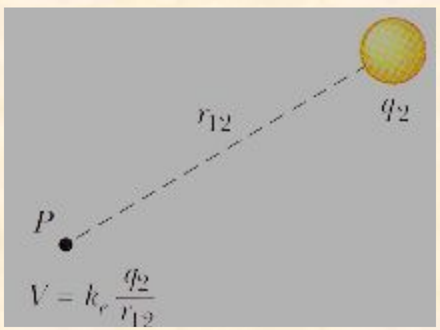
Диполь

Потенциальная энергия точечных зарядов

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов $U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$



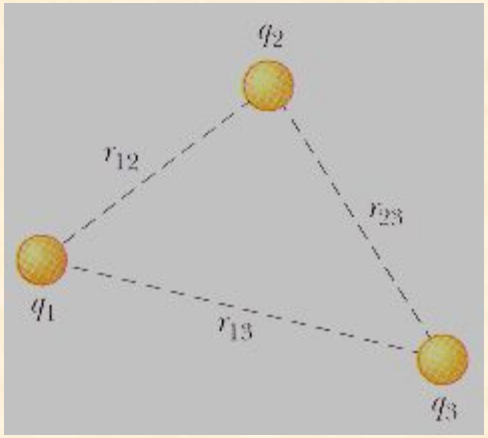
Последняя равна работе $q_1 V_2$, которую необходимо выполнить внешней силе, чтобы переместить заряд q_1 из бесконечности в точку P без ускорения.
V_2 – электрический потенциал в точке P, созданный зарядом q_2.



Если q_1 и q_2 **одного** знака, то $U > 0$, т.е. внешняя сила должна выполнить положительную работу над системой, чтобы сблизить два заряда.

Если q_1 and q_2 **противоположного** знака, то $U < 0$, т.е., внешняя сила должна выполнить отрицательную работу над системой, чтобы предотвратить сближение двух зарядов.

Потенциальная энергия точечных зарядов



Потенциальная энергия трех точечных зарядов

$$U = k_e\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

$$U = W_{12} + W_{13} + W_{23}$$

Электрическое поле и электрический потенциал

Разность потенциалов $$\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} \Longrightarrow \left|\vec{E}\right| = E_x \Longrightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_x dx \Longrightarrow dV = -E_x dx$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

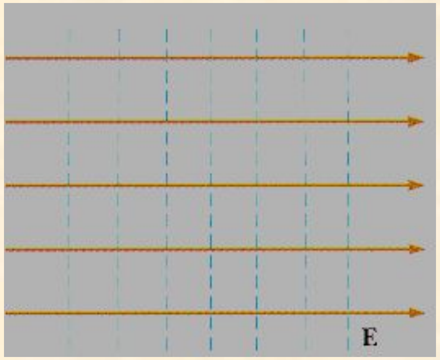
Электрическое поле − мера скорости изменения электрического потенциала в пространстве.

$dV = 0$ вдоль эквипотенциальной поверхности, поэтому $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, и

$$\vec{E} \perp d\vec{s}$$

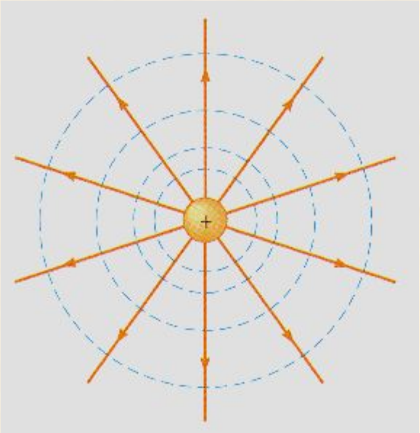
Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля

Эквипотенциальные поверхности всегда должны быть перпендикулярны силовым линиям электрического поля и пересекать их.



Бесконечная заряженная плоскость

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля



Точечный заряд

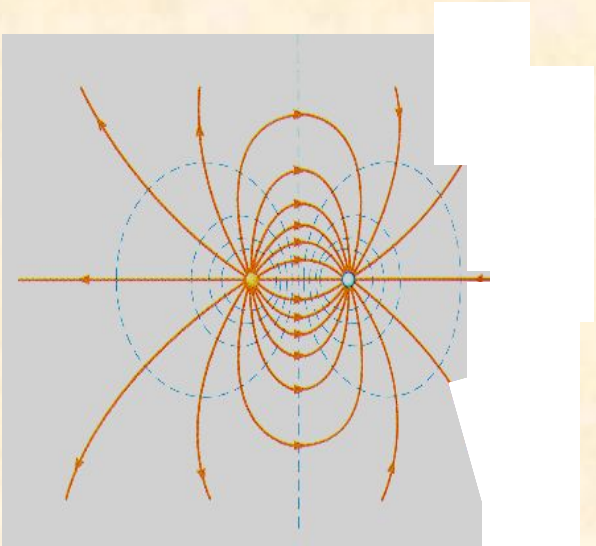
$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = E_r dr \qquad dV = -E_r dr$$

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \qquad V = k_e q/r$$

$$V = f(r)$$

Потенциальное поле точечного заряда сферически симметрично.

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля



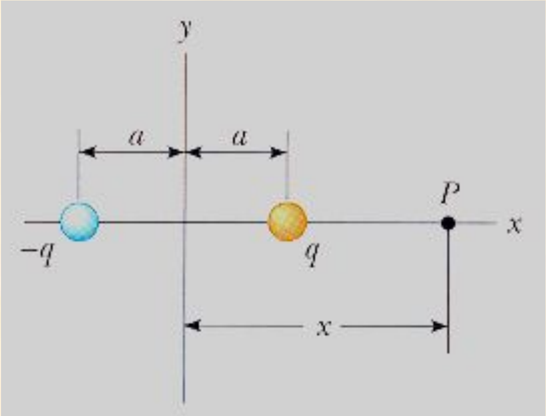
Электрический диполь

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля

Общий случай

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\nabla} V = -\left(\vec{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathrm{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathrm{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)V$$



Электрический потенциал диполя

Точка *P*:

$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{x-a} - \frac{q}{x+a} \right) = \frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}$$

Точка (*x* >> *a*):

$$V \approx \frac{2k_e qa}{x^2} \qquad E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{4k_e qa}{x^3}$$

Точка (*P* между зарядами):

$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{a-x} - \frac{q}{a+x} \right) = \frac{2k_e qa}{a^2 - x^2} \qquad E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{a^2 + x^2}{\left(a^2 - x^2\right)^2} \right)$$

Точка (*P* расположена слева от отрицательного заряда):

$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{x+a} - \frac{q}{x-a} \right) = -\frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}$$

Расчет электрического потенциала

I. Принцип суперпозиции:

Электрический потенциал системы точечных зарядов равен алгебраической (скалярной) сумме потенциалов точечных зарядов.

Электрический потенциал, создаваемый в произвольной точке *P* непрерывным распределением зарядов, равен интегралу потенциалов точечных зарядов, соответствующих этому распределению.

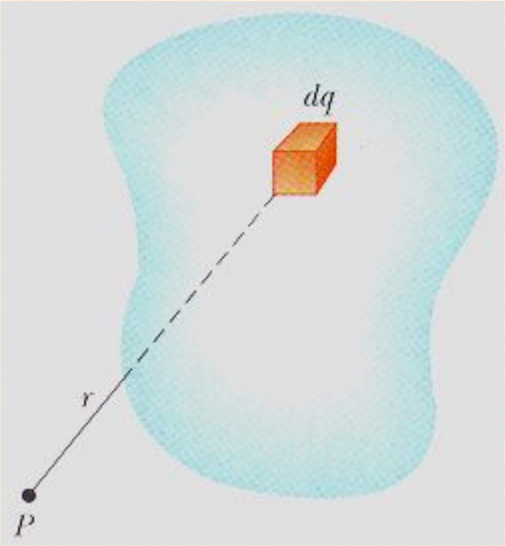
II. Расчет линейного интеграла от

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

для заданного распределения зарядов.

V **обычно предполагается равным 0 в точке, расположенной бесконечно далеко от зарядов.**

Электрический потенциал непрерывного распределения зарядов



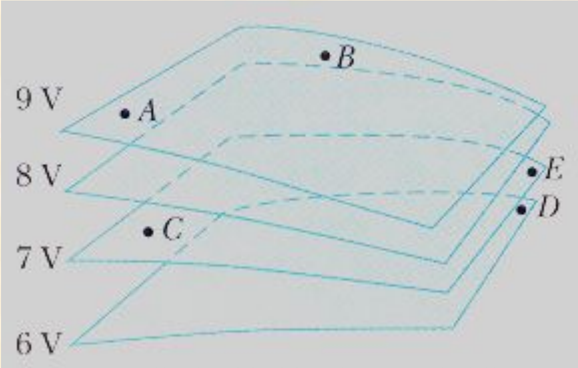
$$dV = k_e \frac{dq}{r}$$

$$V = k_e \int \frac{dq}{r}$$

Электрический потенциал

Электрический потенциал описывает электростатические явления в более упрощенной форме, чем это можно сделать используя понятия об электростатическом поле и электрических силах.

Контрольный вопрос



В какой точке напряженность электрического поля максимальна?
Как она направлена?