

Теорема Гаусса (закон Гаусса) — один из основных законов электродинамики, входит в систему уравнений Максвелла.

Выражает связь (а именно равенство с точностью до постоянного коэффициента) между потоком напряжённости электрического поля сквозь замкнутую поверхность и зарядом в объёме, ограниченном этой поверхностью. Применяется отдельно для вычисления электростатических полей.

Закон

Гаусса

Суммарный электрический поток через произвольную замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0}$$

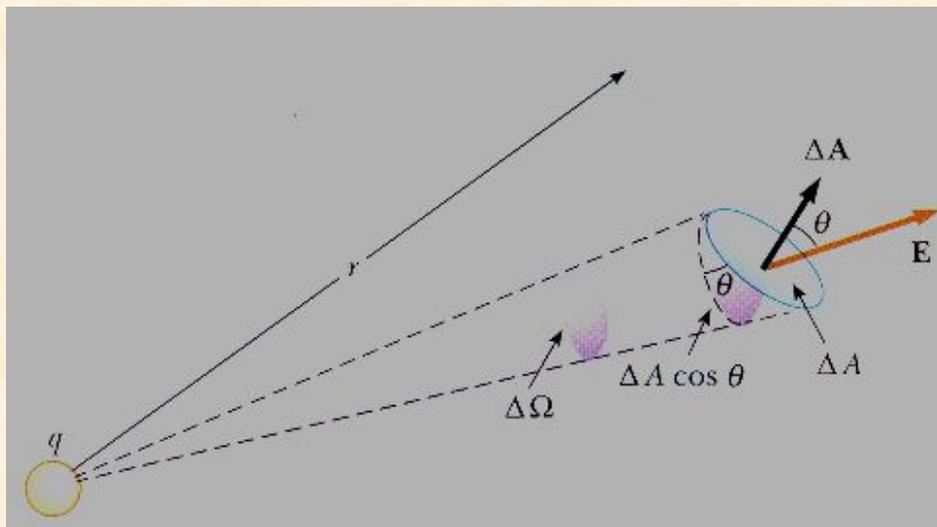
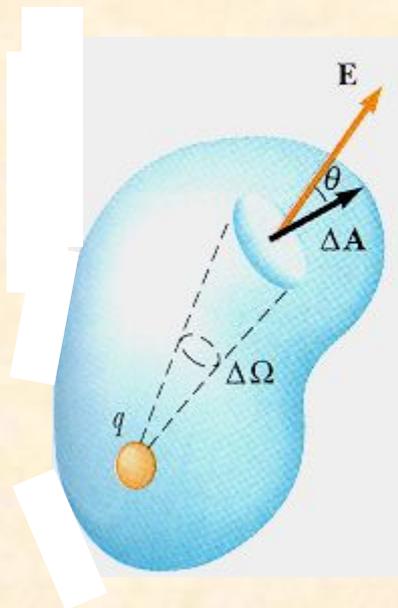
q_{in} – суммарный заряд внутри поверхности,

\vec{E} – напряженность электрического поля в произвольной точке на поверхности.

\vec{E} учитывает вклады зарядов как внутри, так и вне поверхности.

Формальное доказательство закона Гаусса

Точечный заряд внутри замкнутой поверхности произвольной формы



$$\Delta\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{A} = (E \cos \theta) \Delta A = k_e q \frac{\Delta A \cos \theta}{r^2} \quad \text{Телесный угол } \Delta\Omega \equiv \frac{\Delta A \cos \theta}{r^2}$$

$$\Phi_E = k_e q \oint \frac{dA \cos \theta}{r^2} = k_e q \oint d\Omega = 4\pi k_e q = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Применение закона Гаусса – альтернативная процедура расчета **электрических полей**.

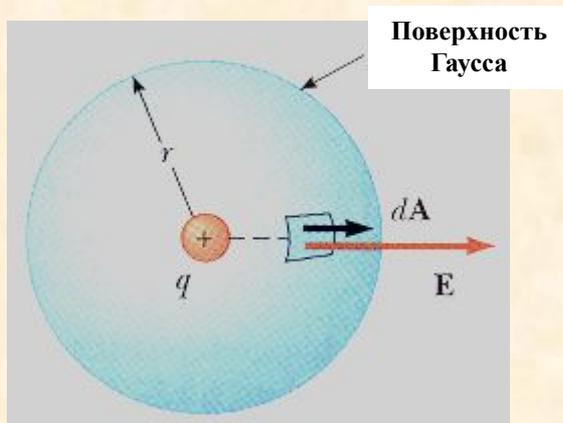
Закон Гаусса - фундаментальная **электростатическая сила**,
действующая между **точечными зарядами**,
обратно пропорциональна **квадрату расстояния** между ними.

Закон Гаусса **удобен** для расчета **электрических полей**
высокосимметричных **распределений зарядов**.

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Электрическое поле изолированного точечного заряда

Сферическая симметрия пространства вокруг точечного заряда – сферическая поверхность Гаусса.



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e \frac{q}{r^2}$$

Полученный результат эквивалентен результату, полученному с помощью закона Кулона.

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

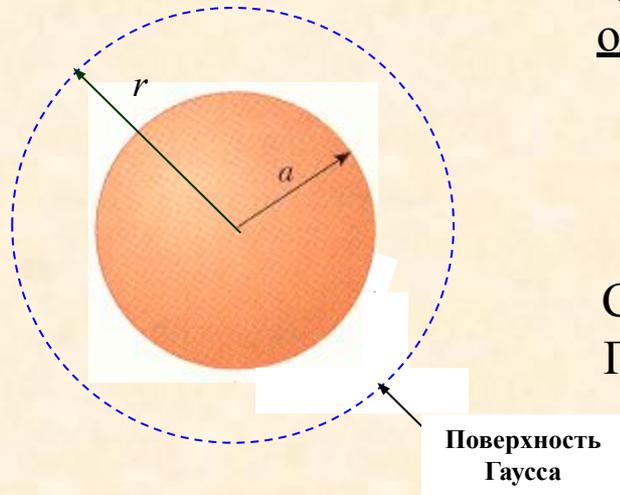
Сферически симметричное распределение заряда

Непроводящий твердый шар радиуса a заряжен с
однородной **объемной плотностью заряда ρ** и несет
суммарный **положительный заряд Q**

$$r > a:$$

Сферическая симметрия – сферическая поверхность Гаусса радиуса r вне шара и концентрическая с ним.

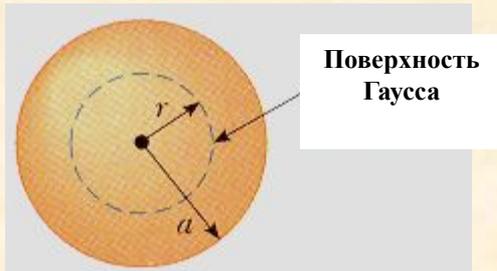
$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$



Однородно заряженная сфера - электрическое поле вне сферы
эквивалентно полю, создаваемому **точечным зарядом**,
расположенным в центре сферы.

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда



Непроводящий твердый шар радиуса a заряжен с однородной **объемной плотностью заряда ρ** и несет суммарный **положительный заряд Q**

$$r < a:$$

Сферическая симметрия – сферическая поверхность Гаусса радиуса r внутри шара и концентрическая с ним.

В любой точке поверхности Гаусса $\vec{E} \uparrow \uparrow \Delta \vec{A}_i$ и $E = \text{const}$.

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} \quad q_{\text{внутри}} = \rho V' = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

$$E = \frac{q_{\text{внутри}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad \rho = Q / \frac{4}{3} \pi a^3 \quad E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} = k_e \frac{Q}{a^3} r$$

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда

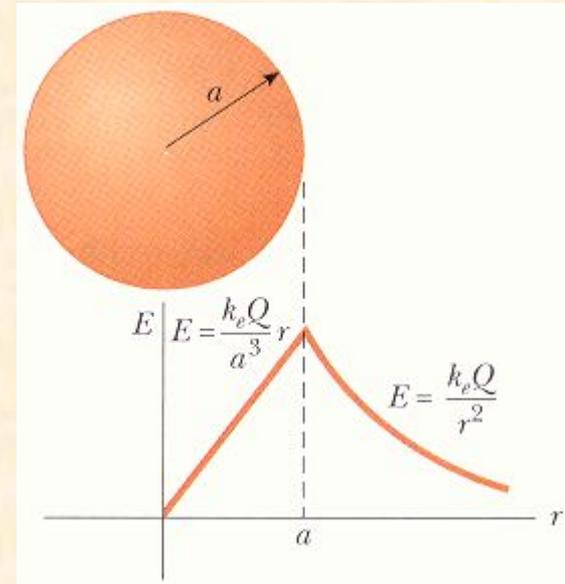
Непроводящий твердый шар радиуса a заряжен с однородной **объемной плотностью заряда ρ** и несет суммарный **положительный заряд Q**

$$r > a$$

$$E = \lim_{r \rightarrow a} \left(k_e \frac{Q}{r^2} \right) = k_e \frac{Q}{a^2}$$

$$r < a$$

$$E = \lim_{r \rightarrow a} \left(k_e \frac{Q}{a^3} r \right) = k_e \frac{Q}{a^3} a = k_e \frac{Q}{a^2}$$

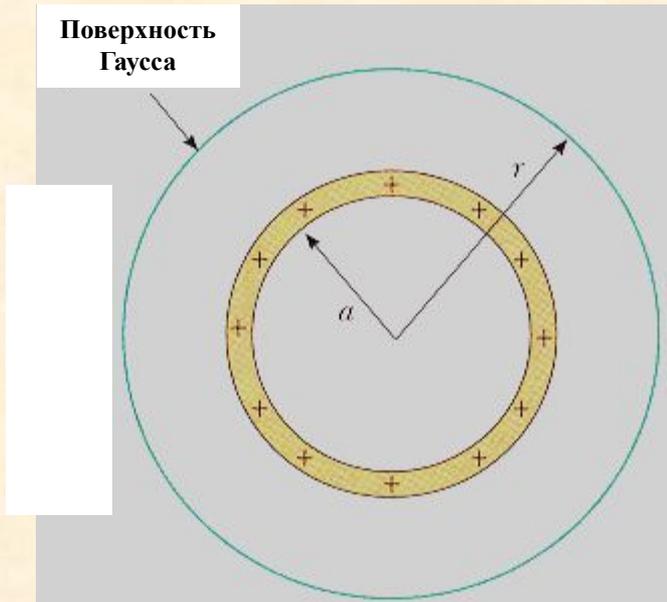


Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда

Напряженность электрического поля, создаваемого тонким сферическим слоем
(радиус a , общий заряд Q однородно распределен по поверхности слоя)

Вне слоя



$$r > a$$

$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

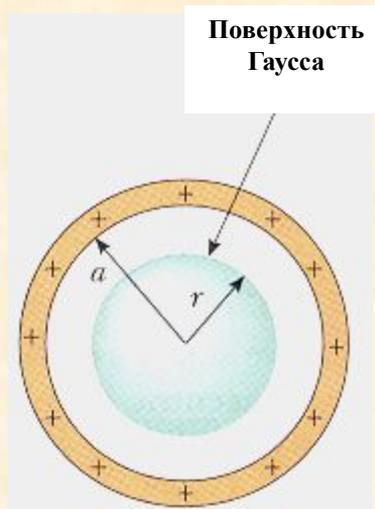
Напряженность электрического поля вне слоя аналогична той, что создается **точечным зарядом** Q , расположенным в центре шара, которому принадлежит слой.

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда

Напряженность электрического поля, создаваемого тонким сферическим слоем
(радиус a , общий заряд Q однородно распределен по поверхности слоя)

Внутри слоя



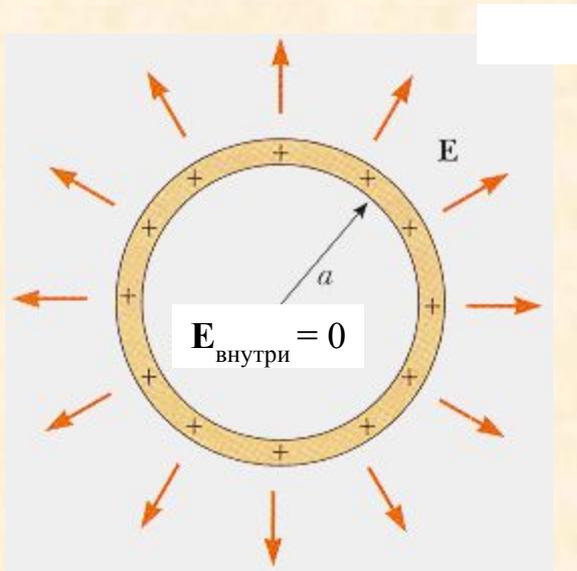
$$r < a$$

$$E = 0$$

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда

Напряженность электрического поля, создаваемого тонким сферическим слоем
(радиус a , общий заряд Q однородно распределен по поверхности слоя)



Защита электронных устройств
от воздействия внешних
электрических полей

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

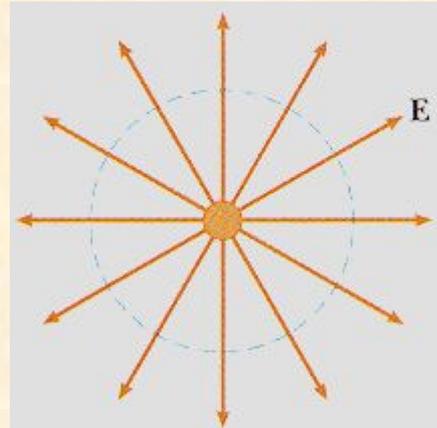
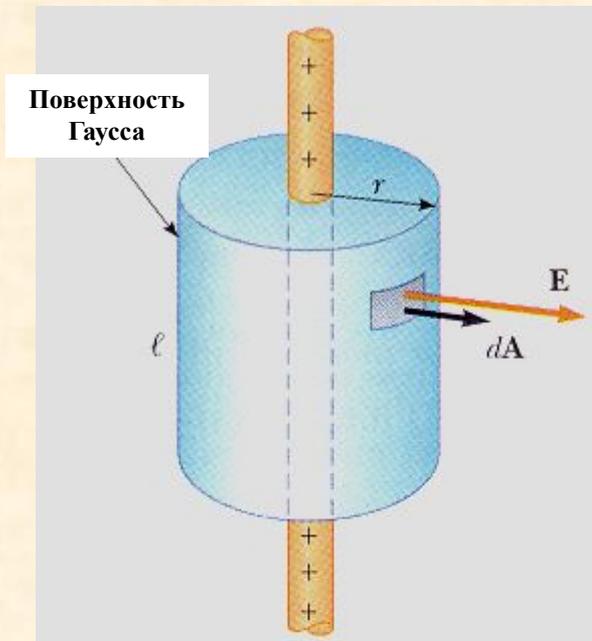
Цилиндрическая симметрия в распределении заряда

Электрическое поле, создаваемое положительно заряженным линейным проводником бесконечной длины с постоянной плотностью λ заряда на единицу длины.

Цилиндрическая симметрия пространства вокруг линейного заряда – цилиндрическая поверхность Гаусса.

В любой точке поверхности Гаусса

$$\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{A} \text{ и } E = \text{const.}$$

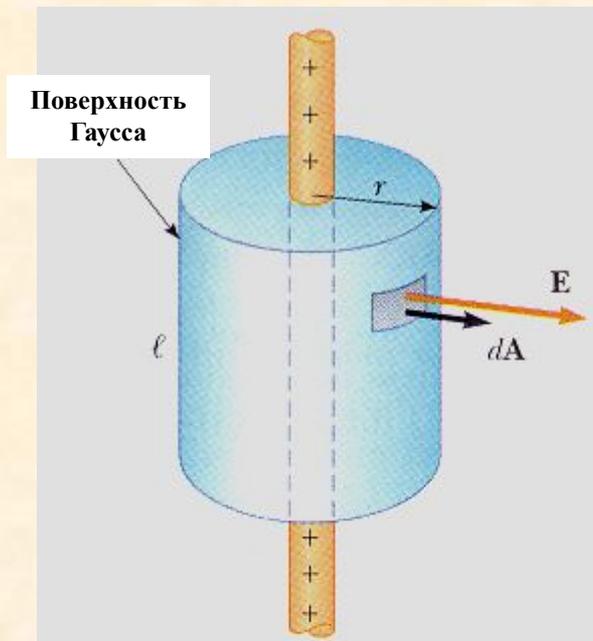


Вид сверху

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Цилиндрическая симметрия в распределении заряда

Электрическое поле, создаваемое положительно заряженным линейным проводником бесконечной длины с постоянной плотностью λ заряда на единицу длины.



Суммарный заряд внутри поверхности Гаусса равен $\lambda \ell$.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = EA = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

$$A = 2\pi r \ell \quad E(2\pi r \ell) = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

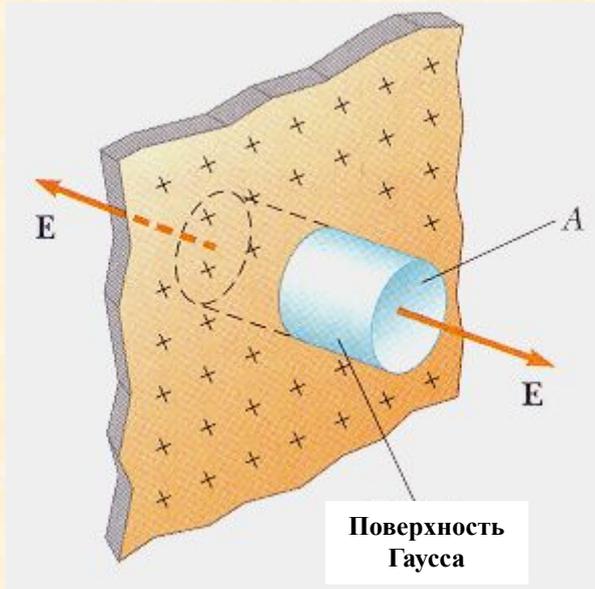
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = 2k_e \frac{\lambda}{r} \quad E \propto \frac{1}{r}$$

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Плоскосимметричное распределение заряда

Электрическое поле, создаваемое положительно заряженной плоскостью с
однородной поверхностной плотностью заряда σ

Плоская симметрия пространства вокруг линейного заряда –
поверхность Гаусса - маленький цилиндр.



В любой точке поверхности Гаусса

$$\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{A} \text{ и } E = \text{const.}$$

Боковая поверхность цилиндра не пересекается
силовыми линиями электрического поля.

Общий заряд внутри поверхности Гаусса равен $q_{\text{внутри}} = \sigma A$.

$$\text{Общий поток } \Phi_E = 2EA = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}.$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad E - \text{const}$$

Электрический потенциал

Разность потенциалов и электрический потенциал

$$\text{Работа электрического поля } \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$d\vec{s}$ - бесконечно малый вектор перемещения, касательный к направлению последнего.

Потенциальная энергия системы “заряд-поле” изменяется на величину

$$dU = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$A \rightarrow B \quad \Delta U = U_B - U_A$$

$$\Delta U = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Величина этого линейного интеграла не зависит от траектории перемещения заряда из точки A в точку B , поскольку электрическая сила консервативна.

Разность потенциалов и электрический потенциал

Электрический потенциал $V = U/q_0$ в любой точке электрического поля не зависит от величины q_0 .

Изменение потенциальной энергии системы $\Delta U = U_B - U_A$

Разность потенциалов $\Delta V = V_B - V_A$ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Работа, выполненная внешней силой без изменения кинетической энергии пробного заряда, $W = \Delta U$ $W = q\Delta V$

Единица измерения электрического потенциала в СИ: $[V] = 1 \text{ В} \equiv 1 \text{ Дж/Кл}$

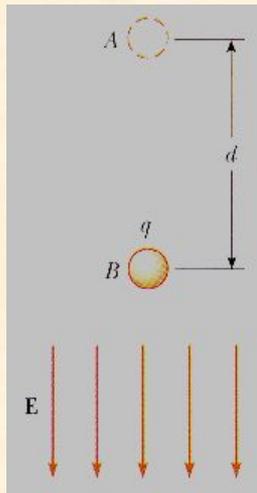
$$1 \text{ эВ} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ Кл} \cdot \text{В} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ Дж}$$

Разность потенциалов в однородном электрическом поле

$$E = \text{const} \quad |S| = d \quad S \uparrow \uparrow \text{ силовые линии}$$

$$V_B - V_A = \Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \int_A^B (E \cos 0^\circ) ds = - \int_A^B E ds = -Ed$$

$$\Delta V < 0 \quad V_B < V_A$$



Силовые линии электрического поля
всегда **направлены** в направлении
уменьшения электрического **потенциала**.

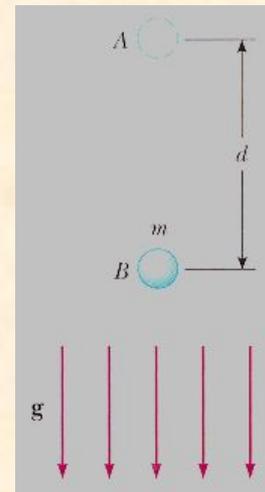
Разность потенциалов в однородном электрическом поле

$$q_0 = \text{const} \quad A \rightarrow B \quad \Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 E d$$

Если $q_0 > 0$, то $\Delta U < 0$.

Система “**положительный заряд** – электрическое поле”:
потенциальная энергия **убывает**, а **заряженная частица**
приобретает кинетическую энергию, если **заряд**
движется в направлении поля.

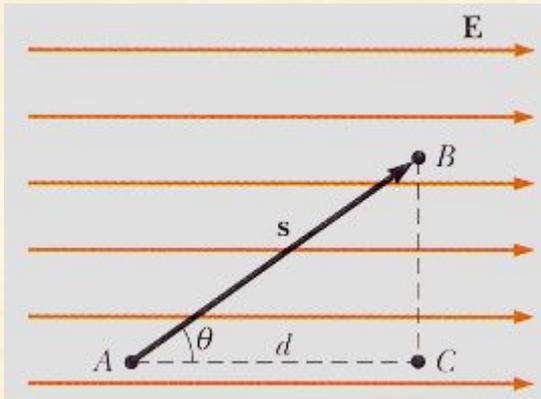
Ситуация **аналогична** той, в которой **работа**
выполняется гравитационным
полем над падающим **объектом**.



Система “**отрицательный заряд** - электрическое поле”:
потенциальная энергия **увеличивается**, если **заряд** движется в направлении поля.

Разность потенциалов в однородном электрическом поле

Более общий случай: $\vec{E} \perp \vec{s}$ силовые линии



$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E \int_A^B ds = -E \cdot s$$

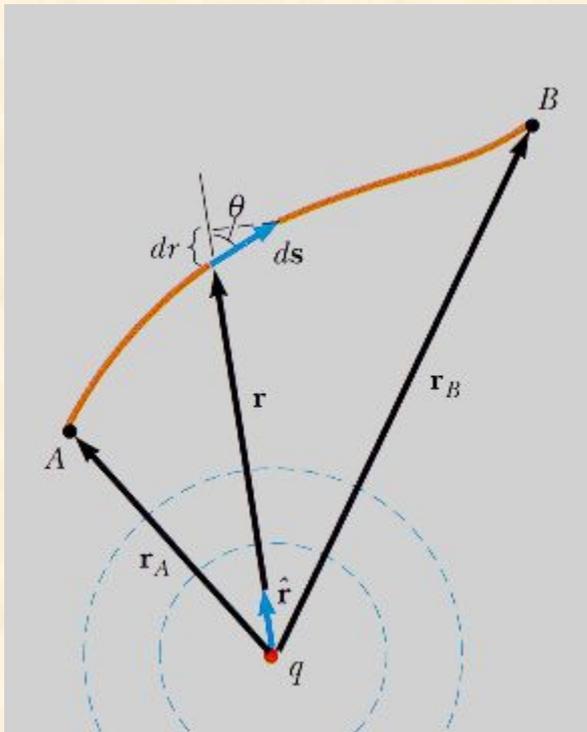
$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 E \cdot s$$

$$\Delta V = 0, \text{ если } \vec{E} \perp \vec{s}$$

$$V_B - V_A = V_C - V_A \quad \Rightarrow \quad V_B = V_C$$

Эквипотенциальная поверхность - произвольная поверхность, состоящая из непрерывного распределения точек с одним и тем же электрическим потенциалом.

Электрический потенциал точечных зарядов



$$V_B = ?$$

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = ds \cos \theta \quad ds \cos \theta = dr$$

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \left(k_e \frac{q}{r^2} \right) dr$$

$$V_B - V_A = -k_e q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{k_e q}{r} \Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$V_B - V_A = k_e q \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

независимо от траектории движения
между точками **A** и **B**

Электрический потенциал точечных зарядов

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{не зависит от траектории движения между точками } A \text{ и } B$$

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{не зависит от траектории движения между точками } A \text{ и } B$$

$$\int_A^B q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Работа, совершенная электрической силой, **не зависит** от пути между A и B

Электрическая сила
консервативна

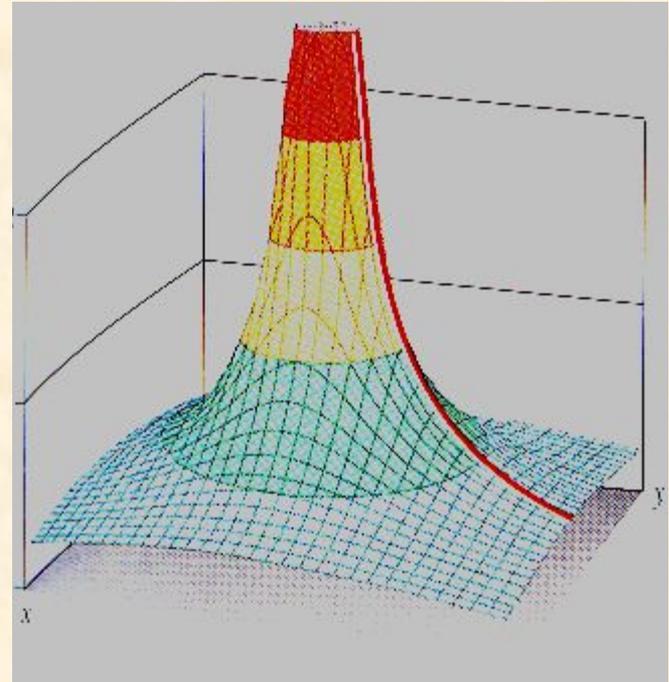
Электрическое поле
неподвижного точечного
заряда консервативно

$$V_B - V_A = k_e q \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

Электрический потенциал точечных зарядов

Если $V = 0$ в $r_A = \infty$ \longrightarrow $V = k_e \frac{q}{r}$

Электрический потенциал (V)



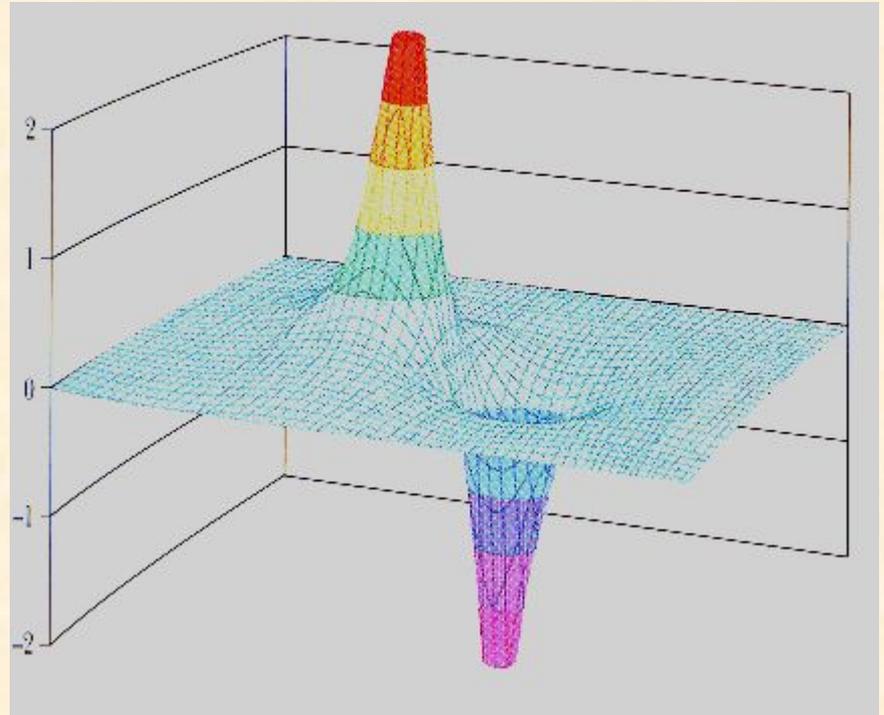
Изолированный положительный заряд

$$V = k_e \frac{q}{r}$$

Электрический потенциал точечных зарядов

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Электрический потенциал (V)

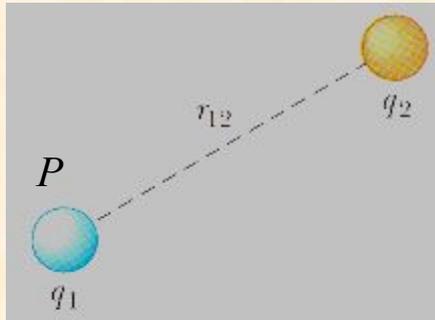


Диполь

Потенциальная энергия точечных зарядов

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

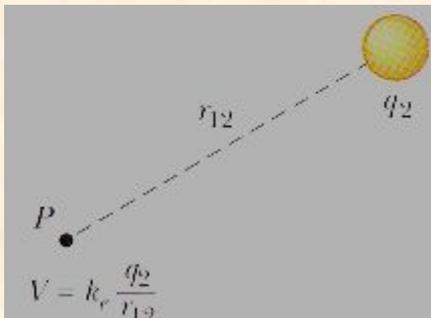


Последняя равна работе $q_1 V_2$, которую необходимо выполнить внешней силе, чтобы переместить заряд q_1 из бесконечности в точку P без ускорения.

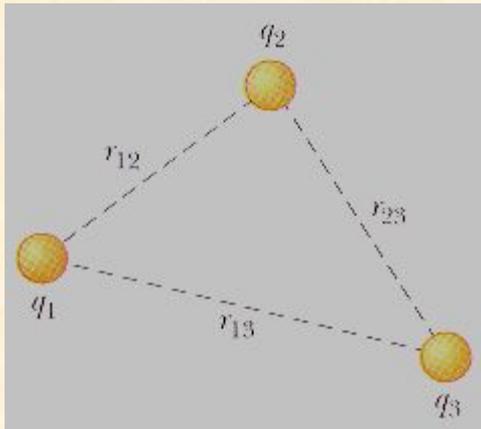
V_2 – электрический потенциал в точке P , созданный зарядом q_2 .

Если q_1 и q_2 **одного** знака, то $U > 0$, т.е. внешняя сила должна выполнить **положительную** работу над системой, чтобы сблизить два заряда.

Если q_1 and q_2 **противоположного** знака, то $U < 0$, т.е., внешняя сила должна выполнить **отрицательную** работу над системой, чтобы предотвратить сближение двух зарядов.



Потенциальная энергия точечных зарядов



Потенциальная энергия трех точечных зарядов

$$U = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

$$U = W_{12} + W_{13} + W_{23}$$

Электрическое поле и электрический потенциал

Разность потенциалов $\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} \implies |\vec{E}| = E_x \implies \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_x dx \implies dV = -E_x dx$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

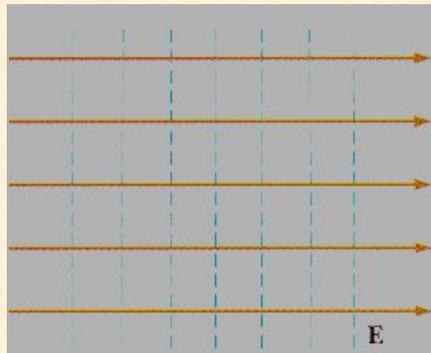
Электрическое поле – мера скорости изменения электрического потенциала в пространстве.

$dV = 0$ вдоль эквипотенциальной поверхности, поэтому $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, и

$$\vec{E} \perp d\vec{s}$$

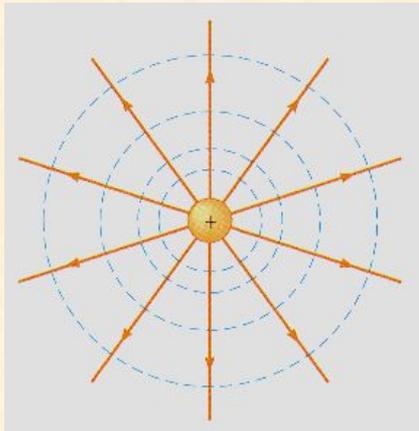
Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля

Эквипотенциальные поверхности всегда должны быть перпендикулярны силовым линиям электрического поля и пересекать их.



Бесконечная заряженная плоскость

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля



Точечный заряд

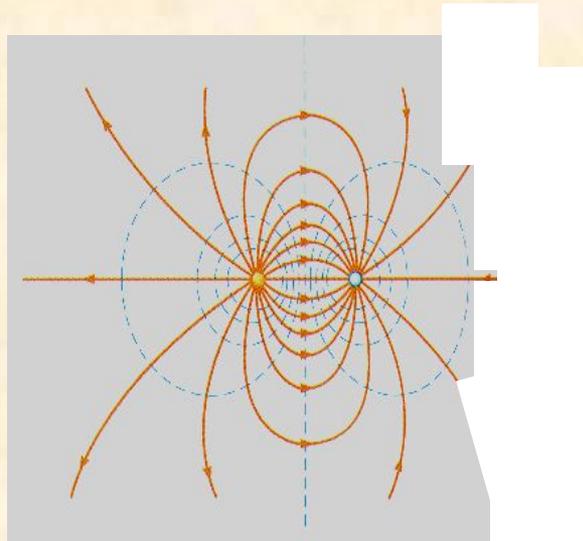
$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r dr \quad dV = -E_r dr$$

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \quad V = k_e q/r$$

$$V = f(r)$$

Потенциальное поле точечного заряда сферически симметрично.

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля



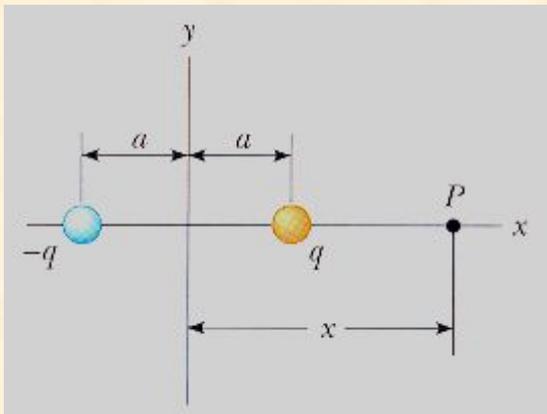
Электрический диполь

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля

Общий
случай

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) V$$



Электрический потенциал диполя

Точка P :

$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{x-a} - \frac{q}{x+a} \right) = \frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}$$

Точка ($x \gg a$):

$$V \approx \frac{2k_e qa}{x^2} \quad E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{4k_e qa}{x^3}$$

Точка (P между зарядами):

$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{a-x} - \frac{q}{a+x} \right) = \frac{2k_e qa}{a^2 - x^2} \quad E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2} \right)$$

Точка (P расположена слева от отрицательного заряда):

$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{x+a} - \frac{q}{x-a} \right) = -\frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}$$

Расчет электрического потенциала

I. Принцип суперпозиции:

Электрический потенциал системы точечных зарядов равен алгебраической (скалярной) сумме потенциалов точечных зарядов.

Электрический потенциал, создаваемый в произвольной точке P непрерывным распределением зарядов, равен интегралу потенциалов точечных зарядов, соответствующих этому распределению.

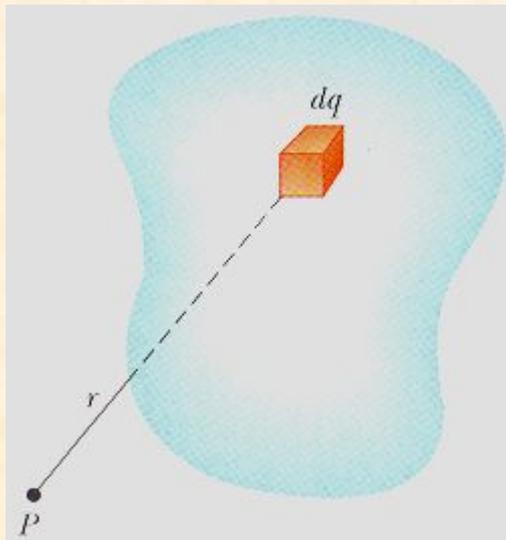
II. Расчет линейного интеграла от

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

для заданного распределения зарядов.

V обычно предполагается равным 0 в точке, расположенной бесконечно далеко от зарядов.

Электрический потенциал непрерывного распределения зарядов



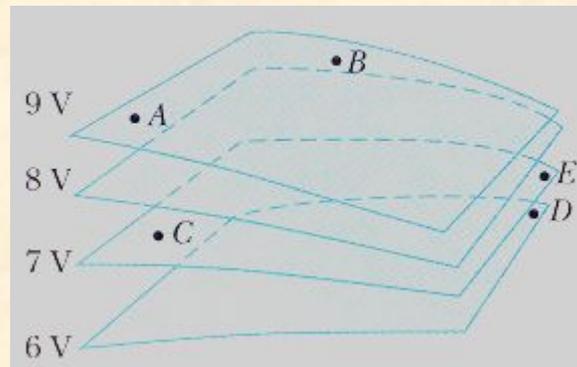
$$dV = k_e \frac{dq}{r}$$

$$V = k_e \int \frac{dq}{r}$$

Электрический потенциал

Электрический потенциал описывает электростатические явления в более упрощенной форме, чем это можно сделать используя понятия об электростатическом поле и электрических силах.

Контрольный вопрос



В какой точке напряженность электрического поля максимальна?
Как она направлена?