



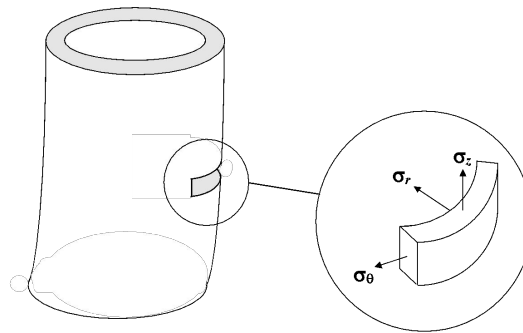
# Теории прочности

Щеголев Максим  
Консультант по бурению

# Напряжённое состояние

Напряженное состояние в точке тела определяется совокупностью нормальных и касательных напряжений, возникающих в любом сечении, проведенном через эту точку.

Наглядная модель, характеризующая напряжённое состояние в точке:



Предельным напряжением для пластичного материала является предел текучести  $\sigma_T$  а для хрупкого – предел прочности  $\sigma_B$ .

Предельное напряженное состояние у пластичных материалов наступает при возникновении остаточных деформаций, а у хрупких – при начале разрушения.

# Эквивалентное напряжение

## Основная задача теории предельных напряженных состояний:

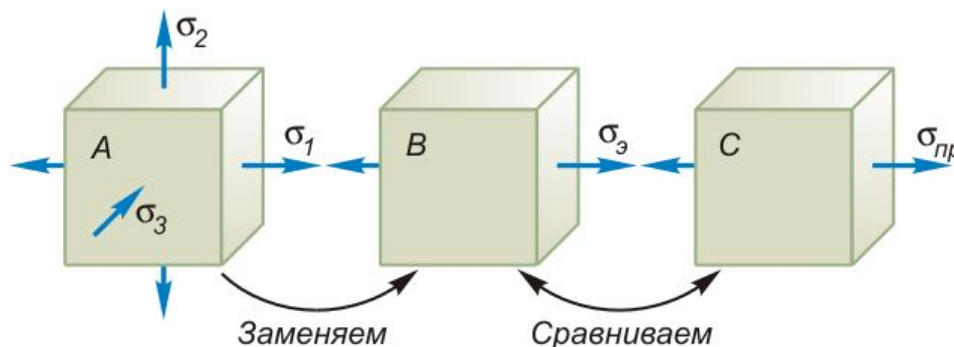
Разработка критерия, позволяющего сравнивать между собой разнотипные напряженные состояния в отношении их близости к предельному состоянию.

Сравнение разнотипных напряженных состояний проводят с помощью эквивалентного (объемного) напряженного состояния. Причем за эквивалентное берётся наиболее изученное напряженное состояние при простом растяжении (сжатии).

Понятие “эквивалентное (объемное) напряжение” не является действительным напряжением. Это теоретическая величина, которая позволяет сравнить обобщенное состояние объемного напряжения с линейным критерием общего разрушения (пределом текучести).

# Коэффициент запаса прочности

Определение коэффициента запаса прочности по теории предельных напряженных состояний:

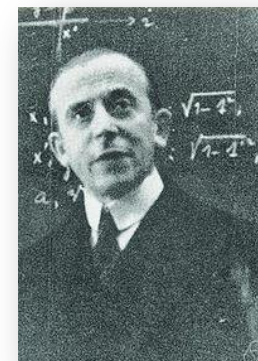
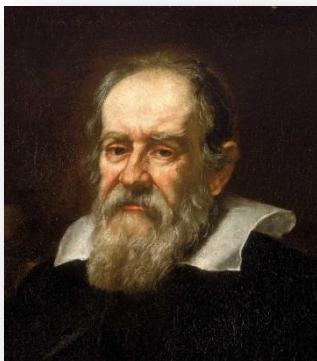


Переход от исследуемого напряженного состояния **A** к эквивалентному напряженному состоянию **B** осуществляют на основе критерия, предопределяющего возникновение предельного состояния, а затем эквивалентное напряженное состояние **B** сравнивают с подобным ему предельным напряженным состоянием **C** и определяют коэффициент запаса:

$$n = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}}$$

# Теории прочности

Универсального критерия, предопределяющего предельное напряженное состояние для любого материала, нет.



Разработку критериев предельных напряженных состояний основывают на различных гипотезах (теориях) о преимущественном влиянии того или иного фактора на прочность материала.

# Теории прочности 1 и 2

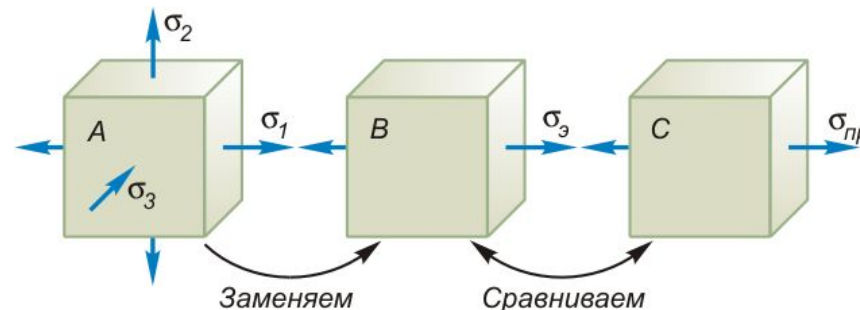
**Первая теория** прочности была выдвинута Галилеем в начале XVII в. и состояла в том, что причиной разрушения материала является наибольшее нормальное напряжение растяжения ( $\sigma_p$ ) или сжатия ( $\sigma_c$ ) без учета двух других главных напряжений. Экспериментальная проверка не подтвердила этой гипотезы в отношении двухосного и трехосного напряженного состояния.

**Вторая теория** была выдвинута в 1682 г. Э. Мариоттом. Согласно этой гипотезе, прочность материала в исследуемой точке достигает критического состояния при максимальном значении линейной деформации  $\varepsilon$ . Экспериментальная проверка и этой гипотезы обнаружила в ней ряд существенных недостатков.

# Теория прочности 3

**Третья теория**, предложенная Кулоном в 1773 г., основывалась на том, что предельное напряженное состояние возникает в момент, когда в двух взаимно перпендикулярных сечениях, проведенных через исследуемую точку, возникают наибольшие касательные напряжения.

Эта гипотеза совершеннее первых двух, но приемлема лишь для пластичных материалов, т. е. при условии, если  $\sigma_{вр} = \sigma_{вс}$  и для напряженных состояний, у которых  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  имеют разные знаки, или одно из них равно нулю.



Согласно третьей гипотезе, при переходе от **A** к **B** имеем:

$$\sigma_{ЭКВ} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad [1]$$

# Теория прочности 4

**Четвертая теория**, предложенная О. Мором в 1900 г., базировалась не на каком-либо одном факторе (нормальное напряжение  $\sigma$ , линейное напряжение  $\varepsilon$  или касательное напряжение  $\tau$ ), а на двух ( $\sigma$  и  $\tau$ ), и потому она более совершенна, чем предыдущие гипотезы. Экспериментальная проверка показала, что полученный на основе этой гипотезы критерий перехода от исследуемого напряженного состояния **A** к эквивалентному **B** справедлив как для пластичных, так и для хрупких материалов, но при условии, если  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  имеют разные знаки или одно из них равно нулю. Согласно критерию

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \nu\sigma_3, \quad [2]$$

где для хрупких материалов  $\nu = \sigma_{\text{ВР}}/\sigma_{\text{ВС}}$  ,

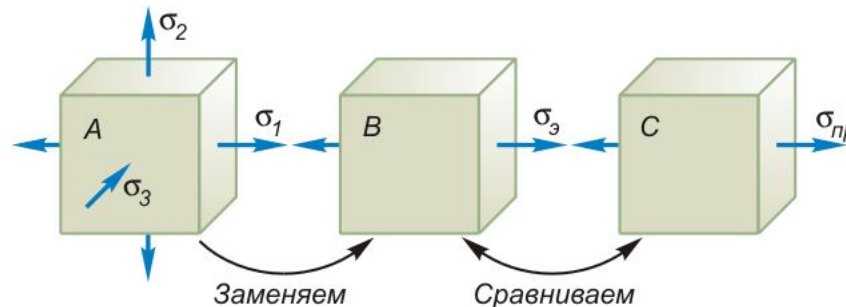
для пластичных материалов  $\nu = \sigma_{\text{ТР}}/\sigma_{\text{ТС}}$

В частном случае, когда пределы текучести материала при растяжении и сжатии одинаковы ( $\sigma_{\text{ТР}} = \sigma_{\text{ТС}}$ ),  $\nu = 1$ , выражение [2] приводится к формуле [1].



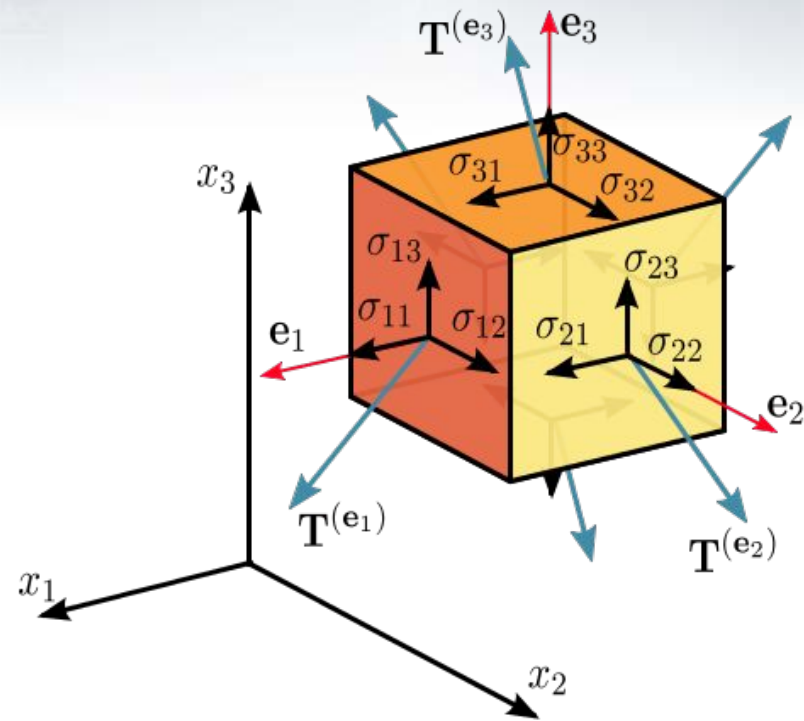
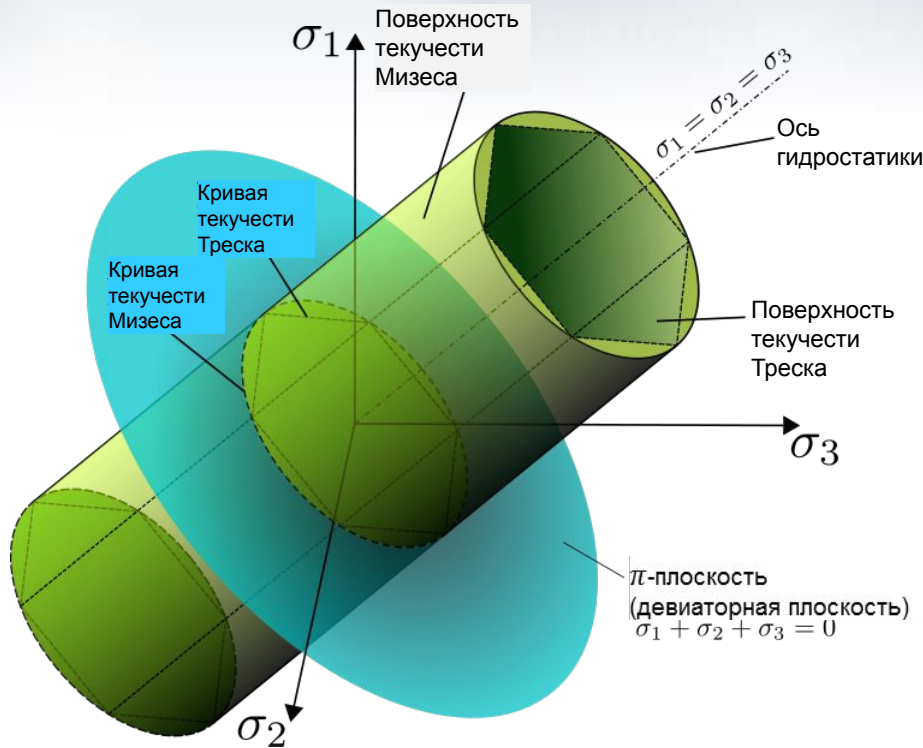
# Теория прочности 5

**Пятую теорию** прочности предложил в 1885 г. Бельтрами, в 1904 г. она была усовершенствована львовским профессором А. Губером, а затем в 1913 г. уточнена Р. Мизесом и в 1924 г. Г. Генки.



По этой гипотезе критерий перехода от исследуемого напряженного состояния **A** к эквивалентному состоянию **B** основан на том, что предельное напряженное состояние возникает при некотором значении потенциальной энергии, накапливаемой элементом конструкции за счет изменения только его формы. Поэтому пятая гипотеза иначе называется *гипотезой энергии формоизменения*.

# Тензор напряжений Коши



Эквивалентное напряжение Мизеса можно рассчитать из тензора напряжений Коши.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Полный тензор механического напряжения элементарного объёма тела.

# Формулы теории Мизеса

Вариант нагружения	Ограничения	Упрощения формул Мизеса
Общий	Нет ограничений	$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]}$
Главные напряжения	$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]}$
Двухосные напряжения	$\sigma_3 = 0$ $\sigma_{31} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_v = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + 3\sigma_{12}^2}$
Напряжение чистого сдвига	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ $\sigma_{31} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_v = \sqrt{3}\sigma_{12}$
Одноосное	$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ $\sigma_{12} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_v = \sigma_1$

В программном обеспечении WELLPLAN для расчёта эквивалентных напряжений используется вариант формулы:

$$\sigma_{VME} = \sqrt{\frac{(\sigma_r - \sigma_h)^2 - (\sigma_a - \sigma_r)^2 - (\sigma_h - \sigma_a)^2 + 6\sigma_s^2 + 6\sigma_t^2}{2}}, \quad [3],$$

где

$\sigma_r$  - радиальное напряжение,

$\sigma_h$  - тангенциальное напряжение по окружности,

$\sigma_a$  - осевое напряжение,

$\sigma_s$  - поперечное сдвиговое напряжение,

$\sigma_t$  - скручивающее напряжение