

Теория излучения

Рассмотрим решения волнового уравнения в том случае, когда в некоторой области пространства расположены источники волн.

Сначала проанализируем излучение электромагнитных волн. Пусть источник электромагнитного поля излучает гармонические волны на частоте ω , тогда поле в среде представляется в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t} . \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t} . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Для того чтобы в среде возникли электромагнитные волны, в некоторой области должны существовать “сторонние” электрические заряды с плотностью $\rho_c(\mathbf{r})$, и эти заряды должны двигаться под действием сторонних сил, создавая токи с плотностью $\mathbf{j}_c(\mathbf{r})$.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho; \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{+i\omega t}.$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{+i\omega t}. \quad (2.49)$$

Величины ρ_c, \mathbf{j}_c необходимо учесть в уравнениях Максвелла (2.1–2.4), которые с учетом (2.49) приобретают вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_c; \quad (2.50)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}; \quad (2.51)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho_c; \quad (2.52)$$

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0. \quad (2.53)$$

В уравнениях (2.50–2.53) для упрощения не учитывается собственная проводимость среды ($\sigma, \rho = 0$), однако это не ограничивает рассмотрения, поскольку излучение волн в среде с затуханием можно учитывать, используя комплексные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей ε, μ .

Сторонние токи и заряды связаны между собой уравнением непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_c + \operatorname{div} \mathbf{j}_c = 0. \quad (2.54)$$

Величины ρ_c , \mathbf{j}_c можно выразить через один вектор \mathbf{P} :

$$\rho_c = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{j}_c = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{P}. \quad (2.56)$$

Учитывая (2.54–2.56), можно показать, что этот вектор характеризует поляризацию сторонних зарядов, служащих источником излучения электромагнитных волн:

$$\mathbf{P} = \int_V (\rho_c \mathbf{r}) dV. \quad (2.57)$$

Например, в простейшем случае дипольного излучения из (2.57) следует, что вектор поляризации равен электрическому моменту диполя. В общем случае эта величина характеризует распределение токов и зарядов в излучающей антенне.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_c; \quad (2.50)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}; \quad (2.51)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi \rho_c; \quad (2.52)$$

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0. \quad (2.53)$$

Из уравнений Максвелла (2.50–2.53) можно получить волновые уравнения для электрического и магнитного поля:

$$\Delta \mathbf{E} + \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -i 4\pi \mu \frac{\omega}{c^2} \mathbf{j}_c - i \frac{4\pi}{\omega c} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{j}_c; \quad (2.58)$$

$$\Delta \mathbf{H} + \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}_c. \quad (2.59)$$

Таким образом, получены неоднородные волновые уравнения, в правых частях которых стоят некоторые функции от координат и времени \mathbf{Q}_{12} , которые описывают пространственную структуру источников:

$$\mathbf{Q}_{12}(x, y, z) = \mathbf{Q}_{12}\{\mathbf{P}(\mathbf{r})\}. \quad (2.60)$$

Аналогичные уравнения могут быть получены для любого типа волн и любой величины $\varphi(\mathbf{r}, t)$, которая меняется по волновым законам в процессе распространения волн.

$$\Delta \mathbf{E} + \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -i4\pi\mu \frac{\omega}{c} \mathbf{j}_c - i \frac{4\pi}{\omega c} \text{grad div } \mathbf{j}_c; \quad (2.58)$$

$$\Delta \mathbf{H} + \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{j}_c. \quad (2.59)$$

При выводе (2.58–2.59) считается, что зависимость от времени гармоническая:

$$Q(\mathbf{r}, t) = Q(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t}, \quad (2.61)$$

поэтому решение волнового уравнения (2.58) или (2.59) для искомой $\varphi(\mathbf{r}, t)$ с правой частью (2.61) можно искать в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t}. \quad (2.62)$$

Если подставить (2.62) в волновое уравнение, то окончательно получим для распределения амплитуды волнового поля в пространстве неоднородное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = Q(\mathbf{r}). \quad (2.63)$$

Обратим внимание на тот факт, что при распространении плоской волны в направлении \mathbf{r} ($\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dr^2}$) неоднородное уравнение Гельмгольца полностью аналогично уравнению вынужденных колебаний с той разницей, что изменения искомой величины зависят не от времени, а от координаты.

Для определения волнового поля в любой точке пространства, в зависимости от того, какие параметры имеет источник излучения, достаточно решить уравнение (2.63) с известной правой частью.