Теория излучения

Рассмотрим решения волнового уравнения в том случае, когда в некоторой области пространства расположены источники волн.

Сначала проанализируем излучение электромагнитных волн. Пусть источник электромагнитного поля излучает гармонические волны на частоте ω, тогда поле в среде представляется в виде:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})e^{\pm i\omega t}.$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})e^{\pm i\omega t}. \tag{2.49}$$

Для того чтобы в среде возникли электромагнитные волны, в некоторой области должны существовать “сторонние” электрические заряды с плотностью $\rho_c(\boldsymbol{r})$, и эти заряды должны двигаться под действием сторонних сил, создавая токи с плотностью $\boldsymbol{j}_c(\boldsymbol{r})$.

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j \; ; \qquad (2.1)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \; ; \qquad (2.2)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho \; ; \qquad (2.3)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \qquad (2.4)$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})e^{\pm i\omega t}.$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})e^{\pm i\omega t}. \quad (2.49)$$

Величины ρ_c, $\boldsymbol{j}_c$ необходимо учесть в уравнениях Максвелла (2.1–2.4), которые с учетом (2.49) приобретают вид:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = -i\frac{\omega}{c}\varepsilon\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_c \; ; \qquad (2.50)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = i\frac{\omega}{c}\mu\boldsymbol{H} \; ; \qquad (2.51)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) = 4\pi\rho_c \; ; \qquad (2.52)$$

$$\operatorname{div}(\mu\boldsymbol{H}) = 0. \qquad (2.53)$$

В уравнениях (2.50–2.53) для упрощения не учитывается собственная проводимость среды ($\sigma, \rho = 0$), однако это не ограничивает рассмотрения, поскольку излучение волн в среде с затуханием можно учитывать, используя комплексные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей ε, μ.

Сторонние токи и заряды связаны между собой уравнением непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_c + \operatorname{div} \boldsymbol{j}_c = 0. \qquad (2.54)$$

Величины ρ_c, $\boldsymbol{j}_c$ можно выразить через один вектор $\boldsymbol{P}$:

$$\rho_c = -\operatorname{div}\boldsymbol{P}, \qquad (2.55)$$

$$\boldsymbol{j}_c = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = -i\omega\boldsymbol{P}. \qquad (2.56)$$

Учитывая (2.54–2.56), можно показать, что этот вектор характеризует поляризацию сторонних зарядов, служащих источником излучения электромагнитных волн:

$$\boldsymbol{P} = \int_V (\rho_c \boldsymbol{r})dV. \qquad (2.57)$$

Например, в простейшем случае дипольного излучения из (2.57) следует, что вектор поляризации равен электрическому моменту диполя. В общем случае эта величина характеризует распределение токов и зарядов в излучающей антенне.

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = -i\frac{\omega}{c}\varepsilon\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_c\,; \qquad (2.50)$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = i\frac{\omega}{c}\mu\boldsymbol{H}\,; \qquad (2.51)$$

$$\mathrm{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) = 4\pi\rho_c\,; \qquad (2.52)$$

$$\mathrm{div}(\mu\boldsymbol{H}) = 0. \qquad (2.53)$$

Из уравнений Максвелла (2.50–2.53) можно получить волновые уравнения для электрического и магнитного поля:

$$\Delta\boldsymbol{E} + \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E} = -i4\pi\mu\frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{j}_c - i\frac{4\pi}{\omega c}\,\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{j}_c\,; \qquad (2.58)$$

$$\Delta\boldsymbol{H} + \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{H} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{j}_c\,. \qquad (2.59)$$

Таким образом, получены неоднородные волновые уравнения, в правых частях которых стоят некоторые функции от координат и времени $\boldsymbol{Q}_{1,2}$, которые описывают пространственную структуру источников:

$$\boldsymbol{Q}_{1,2}(x,y,z) = \boldsymbol{Q}_{1,2}\{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\}. \qquad (2.60)$$

Аналогичные уравнения могут быть получены для любого типа волн и любой величины $\varphi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t})$, которая меняется по волновым законам в процессе распространения волн.

$$\Delta \boldsymbol{E} + \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{E} = -i 4\pi\mu \frac{\omega}{c^2} \boldsymbol{j}_c - i \frac{4\pi}{\omega c} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{j}_c; \qquad (2.58)$$

$$\Delta \boldsymbol{H} + \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{H} = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \boldsymbol{j}_c. \qquad (2.59)$$

При выводе (2.58–2.59) считается, что зависимость от времени гармоническая:

$$Q(\boldsymbol{r},t) = Q(\boldsymbol{r}) e^{\pm i\omega t}, \qquad (2.61)$$

поэтому решение волнового уравнения (2.58) или (2.59) для искомой $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ с правой частью (2.61) можно искать в виде

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \varphi(\boldsymbol{r}) e^{\pm i\omega t}. \qquad (2.62)$$

Если подставить (2.62) в волновое уравнение, то окончательно получим для распределения амплитуды волнового поля в пространстве неоднородное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = Q(\boldsymbol{r}). \qquad (2.63)$$

Обратим внимание на тот факт, что при распространении плоской волны в направлении $\boldsymbol{r}$ ($\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dr}$) неоднородное уравнение Гельмгольца полностью аналогично уравнению вынужденных колебаний с той разницей, что изменения искомой величины зависят не от времени, а от координаты.

Для определения волнового поля в любой точке пространства, в зависимости от того, какие параметры имеет источник излучения, достаточно решить уравнение (2.63) с известной правой частью.