

ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАДИОСИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Математические модели

Дискретизация непрерывных

сообщений
сообщений
Оптимизация устройств и систем приема
информации

Математические модели сообщений

Математической моделью *дискретного* сообщения служит дискретная случайная последовательность (x_i) – случайный процесс, у которого область определения и область значений являются дискретными множествами.

Дискретная случайная последовательность с *независимыми* элементами. Для этой последовательности случайные элементы независимы и принимают значения их множества X с вероятностями $p(x_i) = p_i, i = 1 \dots t$. Эта модель описывает сообщения **дискретного источника без памяти**.

Дискретная случайная последовательность с *зависимыми* элементами. Она описывает сообщения **дискретного источника с памятью**. Модель задается вероятностями:

$$p(x_1^{j+1}, x_2^{j+2}, \dots, x_N^{j+N}) = p(x_1^{j+1})p(x_2^{j+2} | x_1^{j+1})p(x_3^{j+3} | x_2^{j+2}, x_1^{j+1}) \dots p(x_N^{j+N} | x_{N-1}^{j+N-1} \dots x_1^{j+1})$$

N - длина последовательности $x_1^{j+1}, x_2^{j+2}, \dots, x_N^{j+N}$

j - моменты начального дискретного времени

$p(x_k^{j+k} | x_{k-1}^{j+k-1} \dots x_1^{j+1})$ вероятность появления в момент времени $j+k$ символа x_k при условии, что предыдущими символами были $x_{k-1} \dots x_1$

Математические модели сообщений

Дискретный источник называется **стационарным**, если его статистическое описание не зависит от начала отсчета времени j .

Математической моделью *непрерывных* сообщений является непрерывный случайный процесс $X(t)$. Описание такого процесса дается n -мерной функцией распределения:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

или n -мерной функцией распределения плотности вероятности

$$\omega_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

Здесь $n \rightarrow \infty$.

С целью упрощения в качестве моделей непрерывных сообщений используют двумерные и одномерные законы распределения.

Реальные сообщения являются нестационарными. Обычно используют либо квазистационарные модели, либо стационарные.

В качестве стационарных моделей сообщений и помех часто используют *гауссовский* случайный процесс.

Математические модели

сообщений

Математическое ожидание случайного процесса:

$$m_x(t) = M\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\omega(x, t)dx$$

Дисперсия случайного процесса:

$$D_x(t) = M\{[X(t) - m_x(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x]^2\omega(x, t)dx$$

Корреляционная функция случайного процесса:

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= M\{[X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]\} \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)][x_2 - m_x(t_2)]\omega_2(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1dx_2 \end{aligned}$$

Для стационарных процессов:

$$m_x(t) = m_x = \text{const};$$

$$D_x(t) = D_x = \text{const};$$

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2).$$

Математические модели

сообщений

Эргодический случайный процесс: все характеристики, найденные путем статистического усреднения совпадают с характеристиками, найденными путем усреднения по времени одной реализации:

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

$$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - m_x]^2 dt$$

$$R_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - m_x][x(t - \tau) - m_x] dt$$

Пик-фактор сообщения – отношение максимальной мгновенной мощности сообщения к средней:

$$K_{\Pi} = \frac{P_{max}}{P_x}; \quad K_{\Pi} = 10 \lg\left(\frac{P_{max}}{P_x}\right)$$

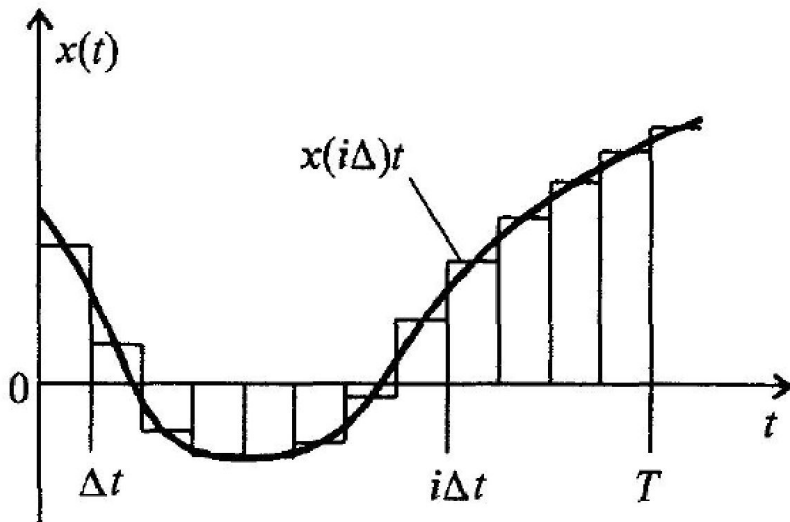
Динамическим диапазоном называется отношение максимальной мгновенной мощности сообщения к минимальной мгновенной мощности:

$$D = 10 \lg\left(\frac{P_{max}}{P_{min}}\right)$$

Дискретизация непрерывных сообщений

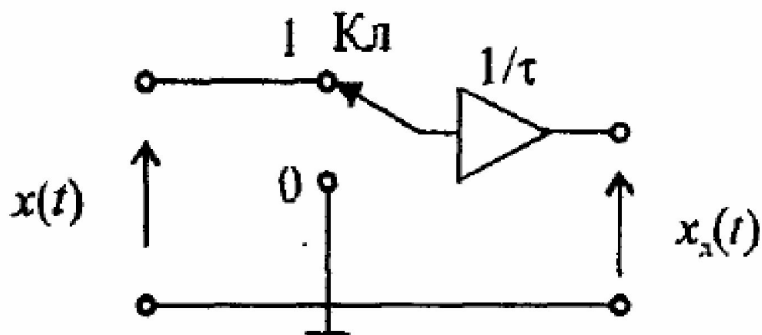
Под **дискретизацией** сигналов понимают преобразование функций *непрерывных* переменных в функции *дискретных* переменных, по которым исходные непрерывные функции могут быть восстановлены с заданной точностью.

Для *точного* представления произвольной непрерывной функции $x(t)$ на конечном интервале времени T необходимо располагать данными о мгновенных значениях этой функции во всех точках интервала.



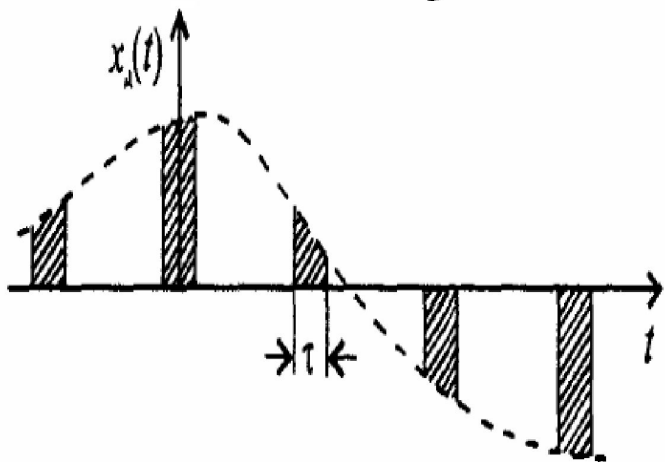
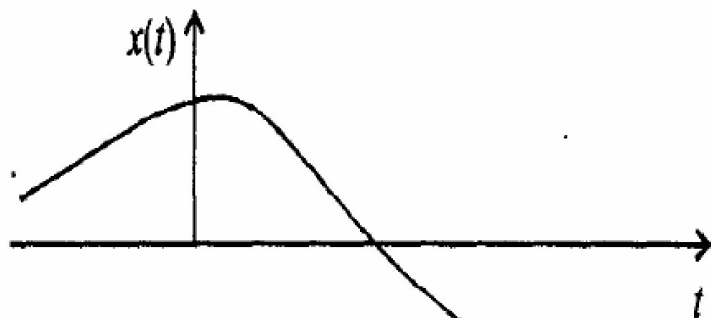
Приближённое представление о функции $x(t)$ можно составить по её отображению в виде дискретной последовательности импульсов, имеющих на интервалах Δt значения $x(i\Delta t)$, называемых **отсчётами**

Дискретизация непрерывных сообщений



Частота дискретизации $F_D = 1/\tau$

$$x_D(t) = x(t)f_D(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_{\tau}(t - kt)$$

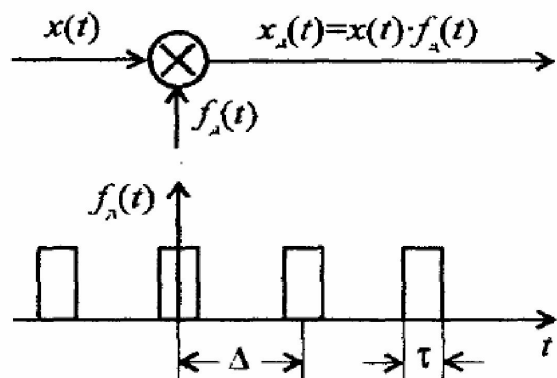


$$\psi_{\tau} = \begin{cases} 1/\tau, & t = [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \\ 0, & t \neq [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \end{cases}$$

Множитель $1/\tau$ нормирует функцию ψ_{τ} к единичной площади.

Дискретизация непрерывных сообщений

при $\tau \rightarrow 0$ периодическая функция дискретизации заменяется решётчатой функцией:



$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$$

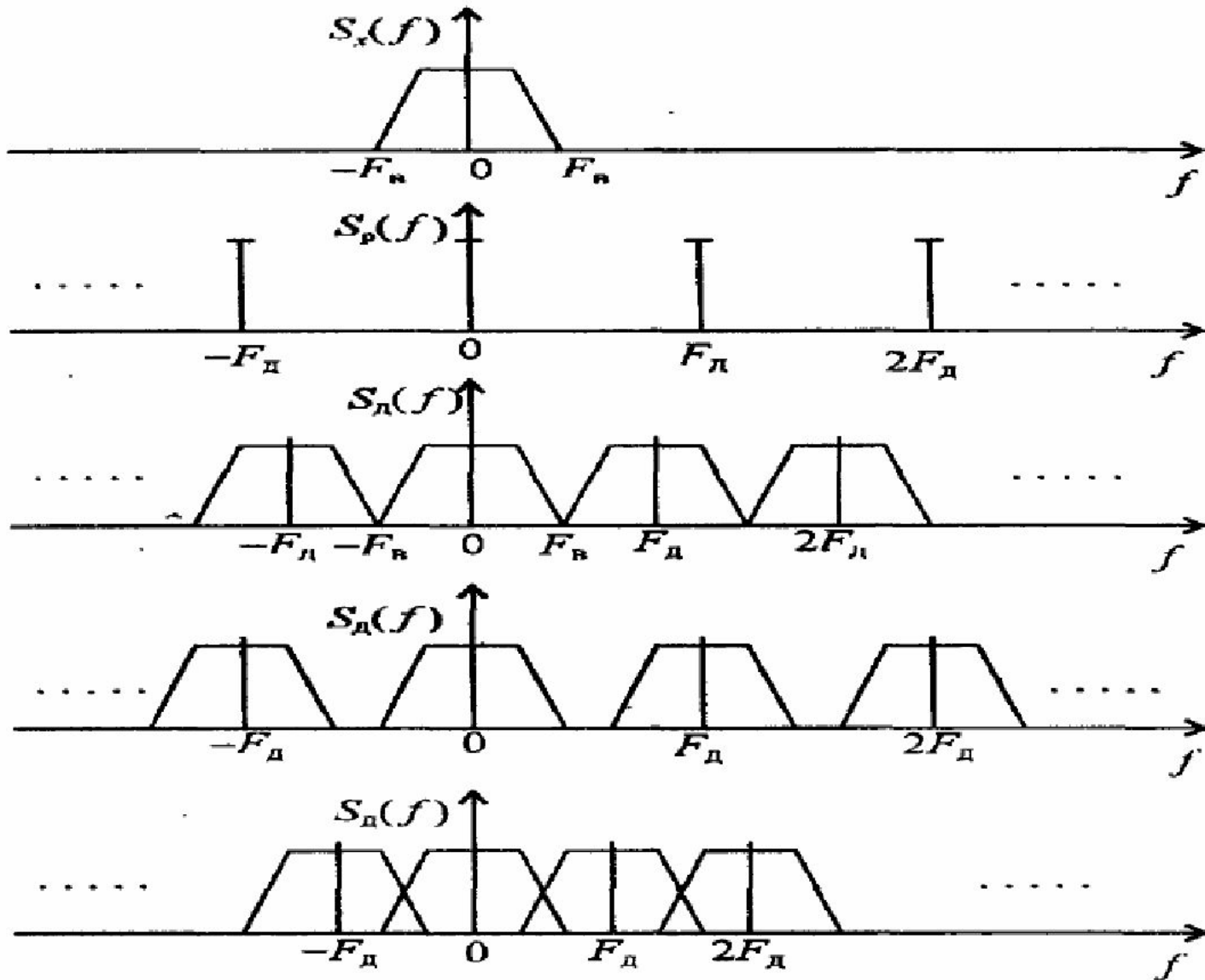
$$x_{\text{Д}}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta(t - k\Delta t)$$

Процедура дискретизации сводится к образованию произведения дискретизируемой функции $x(t)$ на последовательность импульсов дискретизации $f_{\partial}(t)$.

В спектральной области произведение функций времени соответствует свертке их спектров.

Спектр периодической последовательности импульсов дискретизации является линейчатым. Частота дискретизации определяется интервалом дискретизации $F_{\text{Д}} = 1/\Delta t$.

Дискретизация непрерывных сообщений



Дискретизация непрерывных сообщений

Для неискажённого воспроизведения функции $x(t)$ по последовательности отсчётов посредством идеального фильтра низких частот необходимо выбирать частоту дискретизации так, чтобы спектральные компоненты свёртки $S_x(f)$ с каждой из дискретных составляющих периодической функции pF_d ($p=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) располагались в неперекрывающихся областях. Этому соответствуют значения $F_d > 2F_v$. При $F_d < 2F_v$ спектральные области перекрываются, а в полосу частот $(-F_v, F_v)$ дискретизируемого сигнала попадут спектральные компоненты смежных областей и возникнут искажения при восстановлении функции по отсчётам.

Для точного воспроизведения непрерывной функции с ограниченным (финитным) спектром достаточно располагать значениями функции (отсчётами) лишь в отдельных точках.

В общем случае процессы дискретного представления описываются выражениями:

$$\begin{aligned} (c_1, c_2, \dots, c_N) &= A[x(t)] \\ x'(t) &= A'[(c_1, c_2, \dots, c_N)] \end{aligned}$$

где A — оператор дискретного представления, A' — оператор восстановления, c_1, c_2, \dots, c_N — совокупность координат дискретного представления непрерывного сигнала $x(t)$, $x'(t)$ — восстановленный по координатам дискретного представления сигнал

Дискретизация непрерывных сообщений

При линейных процессах представления и восстановления эти выражения можно представить в виде:

$$c_i = \int_0^{T_c} x(t)\psi_i(t)dt, i = 1, \dots, N$$
$$x'(t) = \sum_{i=1}^N c_i\varphi_i(t)$$

где $\psi_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ - *весовые* и *базисные* (координатные) функции.

В зависимости от системы используемых весовых функций $\psi_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, различают *дискретное временное*, *дискретное обобщенное* и *дискретное разностное* представления.

В случае дискретного временного представления используется система весовых функций $\psi_i(t) = \delta(t - t_i)$, $i=1, 2, \dots, N$, где $\delta(t - t_i)$ - дельта-функция. При этом координаты $c_i = x(t_i)$, $i=1, \dots, N$, т. е. совпадают с мгновенными значениями (отсчётами) непрерывной функции $x(t)$ в дискретные моменты t_i .

Представление называется **регулярным**, если шаг дискретизации $T\partial = t_i - t_{i-1}$ постоянный. В противном случае оно называется **нерегулярным**.

Дискретизация непрерывных сообщений

При представлении сигналов регулярными отсчётами основным является выбор частоты дискретизации $F_{\partial} = 1/T_{\partial}$ и базисных функций $\varphi_i(t)$. Особенно важно найти минимальную частоту F_{∂} , при которой еще имеется принципиальная возможность восстановления непрерывного сигнала с заданной погрешностью.

Для модели сигнала с ограниченным спектром решение указанных задач содержится в **теореме Котельникова**, формулировка которой звучит так: **любую непрерывную функцию со спектром, ограниченным полосой частот от нуля до $F_{\text{в}}$, можно однозначно определить последовательностью ее мгновенных значений, взятых через интервалы $T_{\partial} \leq 1/(2 F_{\text{в}})$ по формуле:**

$$x'(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT_{\partial}) \frac{\sin[2\pi F_{\text{в}}(t - iT_{\partial})]}{2\pi F_{\text{в}}(t - iT_{\partial})}$$

Этот ряд называется **рядом Котельникова**.

Базисные функции:

$$\varphi_i(t) = \frac{\sin[(2\pi F_{\text{в}}(t - iT_{\partial}))]}{2\pi F_{\text{в}}(t - iT_{\partial})}$$

Они образуют ортогональную на бесконечном интервале систему функций.

Дискретизация непрерывных сообщений

Фундаментальное значение теоремы Котельникова заключается в том, что она обосновывает возможность дискретизации по аргументу (времени) любых функций с ограниченным спектром. На ней основаны все методы импульсной модуляции.

Пусть для некоторых сигналов $x(t)$ с ограниченным спектром все отсчёты в точках $k\Delta t$, лежащих за пределами некоторого интервала времени длительностью T , равны нулю. Тогда ряд вырождается в конечную сумму, число членов которой n равно числу отсчётных точек, уместяющихся на интервале T :

$$n \approx T / \Delta t = 2F_{\text{в}}T,$$

В теории связи ее называют **базой** сигнала.

Иногда полученный результат формулируют следующим образом: сигнал длительностью T , спектр которого не содержит частот выше $F_{\text{в}}$ полностью определяется заданием $2F_{\text{в}}T$ его отсчётов.

Однако спектр ограниченного во времени сигнала не может быть конечным, так что таких сигналов в природе не существует. Поэтому сигнал, представленный конечным числом членов ряда Котельникова, существует и за пределами интервала времени T , внутри которого находятся все ненулевые отсчёты.

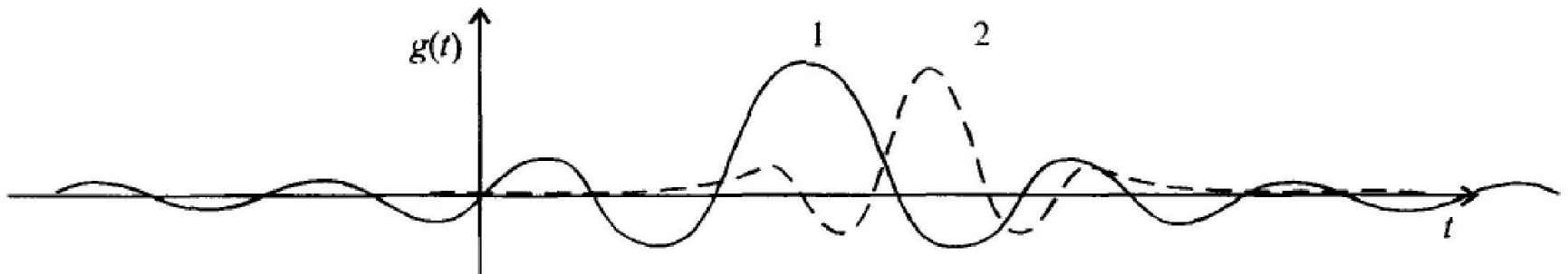
Дискретизация непрерывных сообщений

Тем не менее, на практике часто приходится иметь дело с конечными сигналами, энергия которых почти полностью сосредоточена внутри полосы частот $|f| \leq F_v$, для таких сигналов нередко используют конечное число $2F_v T$ членов ряда Котельникова. Но в данном случае это представление является приближенным, и сумма такого конечного ряда отличается от функции $x(t)$ некоторой погрешностью.

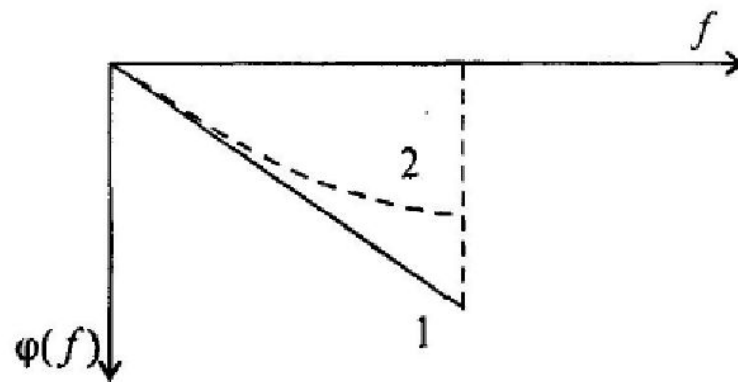
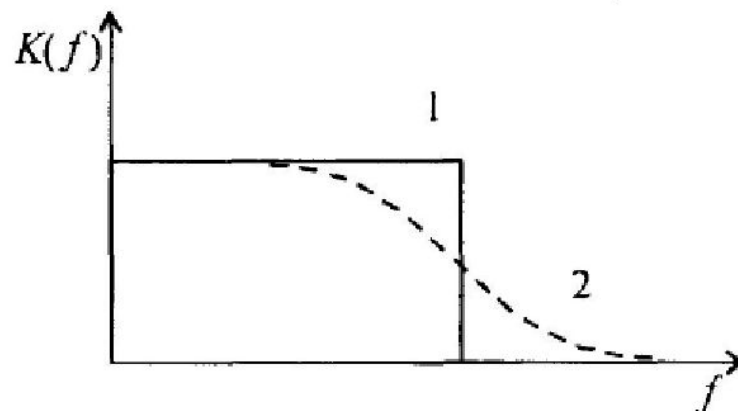
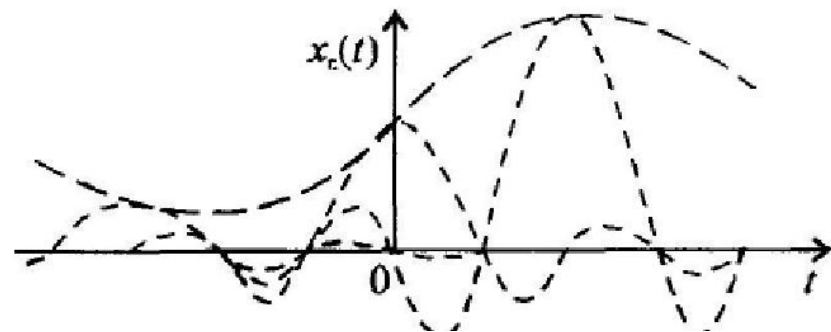
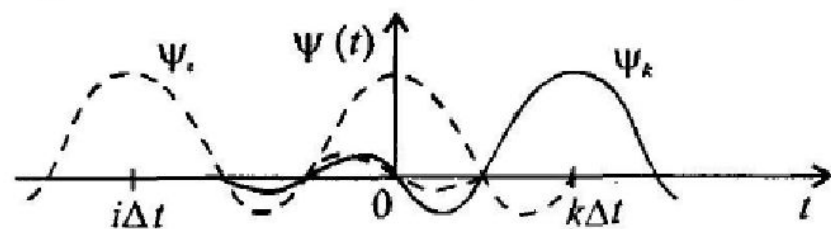
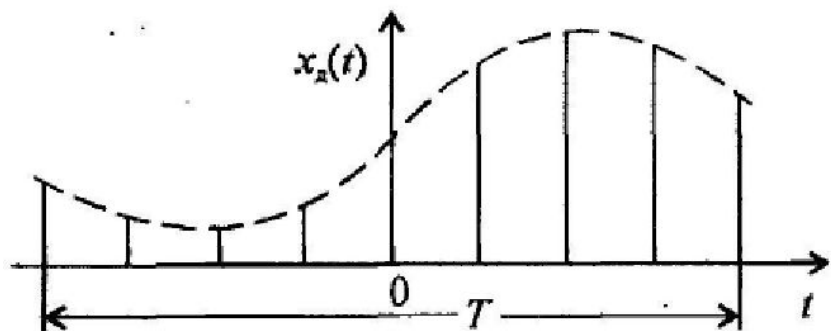
Восстановление непрерывной функции по ее отсчётам

Непрерывный сигнал восстанавливается, если на вход идеального фильтра нижних частот с полосой пропускания $0 \dots F_v$ подать последовательность дельта-функций $\delta(t - iT_d)$, $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$, умноженных на коэффициенты $x(iT_d)$.

На практике вместо дельта-функций используют короткие импульсы, а вместо идеального фильтра нижних частот — реальный фильтр нижних частот, что, естественно, приводит к погрешности восстановления.



Дискретизация непрерывных сообщений



Дискретизация непрерывных сообщений

Теорему Котельникова можно распространять и на случайные сигналы. Тогда она формулируется следующим образом: для случайного процесса с односторонней спектральной плотностью мощности, удовлетворяющей условию $G_X(f)=0$ при $f > F_B$, ряд:

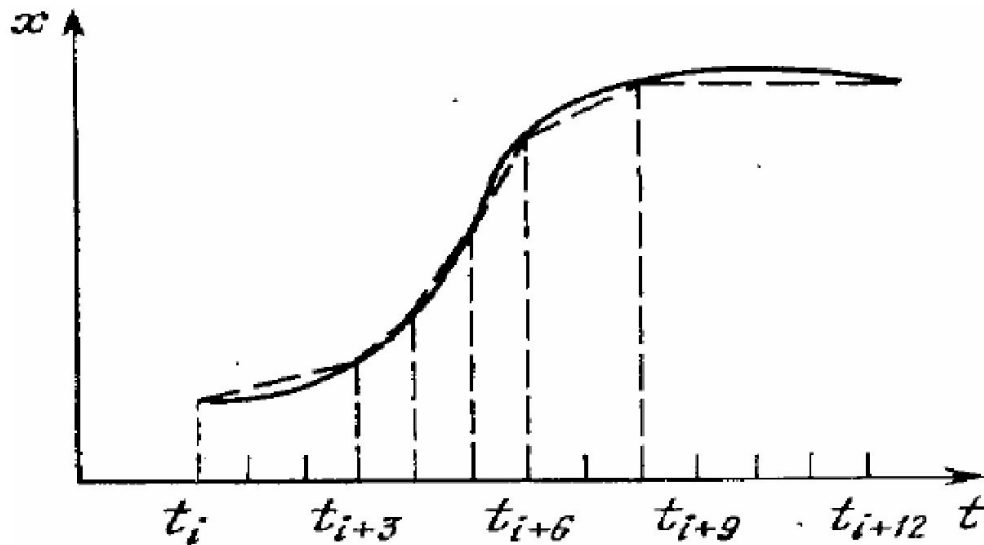
$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} X(iT_d) \frac{\sin[2\pi F_B(t - iT_d)]}{2\pi F_B(t - iT_d)}$$

где $X(iT_d)$ — случайные величины, представляющие собой отсчеты случайного процесса, взятые через интервалы времени $T_d = 1/(2F_B)$, сходится в среднеквадратическом смысле к процессу $X(t)$.

Адаптивная дискретизация непрерывных сообщений

В данном случае координатами являются мгновенные значения непрерывного сигнала в некоторых точках опроса, неравноотстоящих друг от друга. На интервалах, где функция меняется в больших пределах, отсчеты берутся чаще, а на интервалах медленного изменения — реже. Для представления сообщения стараются использовать как можно меньшее число отсчетов, но достаточное для восстановления сообщения с заданной погрешностью.

Дискретизация непрерывных сообщений



Отсчеты, позволяющие восстановить непрерывное сообщение на приемной стороне с заданной точностью, называются обычно существенными. Различные способы адаптивной дискретизации отличаются алгоритмами формирования существенных отсчетов и видом служебной информации. *Простейший* алгоритм формирования существенных отсчетов. Пусть последний существенный отсчет был в момент t_i . Для формирования следующей выборки сравнивают текущее значение функции $x(t)$ с $x(t_i)$. Момент t_{i+j} , при котором $|x(t_{i+j}) - x(t_i)| = \varepsilon_m$, соответствует очередной существенной выборке.

Дискретизация непрерывных сообщений

При адаптивной дискретизации отсчеты передаются в случайные моменты. Поэтому для восстановления непрерывного сообщения по отсчетам приемная сторона должна знать, к каким тактовым моментам относятся принятые отсчеты. В связи с этим на приемную сторону приходится передавать дополнительную служебную информацию. Такой информацией могут быть значения тактовых моментов, соответствующих существенным выборкам. Адаптивные способы дискретизации широко применяют при отсутствии априорной информации о корреляционной функции или спектральной плотности мощности непрерывных сообщений.

Оптимизация устройств и систем приема информации

Задача приёма сигналов состоит в наилучшем воспроизведении информации, заключенной в сигнале, искаженном помехами, т.е. по заранее известным характеристикам передаваемого сигнала, канала связи и помех, зная их функциональное взаимодействие необходимо получить оптимальное приемное устройство, наилучшим образом воспроизводящее переданное сообщение.

Оптимальным называют приемник, для которого вызванные помехами искажения сообщения минимальны.

При приеме решают две задачи: задачу обнаружения сигнала и задачу различения сигналов на фоне помех.

При решении конкретных задач оптимального приёма используют следующие модели радиосигналов:

1. Сигнал с полностью известными параметрами

$$A(t) = A_0(t - \tau_0) \cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau_0) + \varphi_0] \text{ при } t[0, T]$$

где индекс 0 означает, что эти параметры известны.

2. Сигнал со случайной начальной фазой

$$A(t, \varphi) = A_0(t - \tau_0) \cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau_0) + \varphi] \text{ при } t[0, T]$$

где φ – начальная фаза – случайная величина, равномерно распределенная на интервале.

Оптимизация устройств и систем приема информации

3. Сигнал со случайной амплитудой и начальной фазой

$$A(t, A, \varphi) = A_0(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau_0) + \varphi]$$

здесь величины **A** и **φ** статистически независимы. Причем величина **A** распределена по закону Рэлея, а начальная фаза равномерно распределена на интервале $(-\pi, \pi)$.

В качестве помехи при анализе используется белый шум. Спектральная плотность белого шума постоянна в неограниченной полосе частот и равна $N_0 / 2$.

Односторонняя спектральная плотность шума в полосе частот от **0** до ∞ равна N_0 . N_0 – нормированная спектральная плотность шума, приходящаяся на 1 Гц полосы пропускания приемника.

Вероятностные характеристики обнаружения сигнала

В результате процесса обнаружения должно быть принято решение о наличии или отсутствии сигнала.

Пусть A_1 – есть сигнал, A_2 – нет сигнала.

В результате действия помех каждому из условий может быть два решения при приеме смеси сигнал + шум:

- A_1^* – есть сигнал,
- A_2^* – нет сигнала.

Оптимизация устройств и систем приема информации

Условная вероятность правильного обнаружения сигнала

$$D = P(A_1^* | A_1)$$

Сигнал передавался и решение принято, что сигнал есть.

Условная вероятность пропуска сигнала

$$\hat{D} = P(A_2^* | A_1)$$

Сигнал передавался, а решение при приеме принято, что сигнала нет.

D и \hat{D} соответствуют одному и тому же условию наличия сигнала и являются взаимоисключающими, поэтому

$$D + \hat{D} = 1$$

Условная вероятность ложной тревоги

$$F = P(A_1^* | A_2)$$

Сигнал не передавался, а решение принято, что сигнал есть.

Оптимизация устройств и систем приема информации

Условная вероятность правильного необнаружения

$$\hat{F} = P(A_2^* | A_2)$$

Сигнал не передавался и решение принято, что сигнала нет.

Здесь также справедливо равенство

$$F + \hat{F} = 1$$

основными характеристиками обнаружения являются вероятность правильного обнаружения D и вероятность ложной тревоги (ЛТ) F .

Критерии оптимального обнаружения и различения сигналов

Качество приема оценивается вероятностью правильного приёма символов двоичного сигнала.

Максимум этой вероятности называется *потенциальной помехоустойчивостью*, а демодулятор, обеспечивающий этот максимум, называется *идеальным приёмником*.

При решении вопроса обнаружения и различения сигналов необходимо:

- определить критерии оптимального приёма;
- определить алгоритм преобразования смеси сигнал + шум и по этому алгоритму определить структуру приёмника.

Оптимизация устройств и систем приема информации

Критерий максимума

правдоподобия

В этом критерии анализируется отношение правдоподобия

$$\Lambda_{i,j} = \frac{W(x/a_i)}{W(x/a_j)}$$

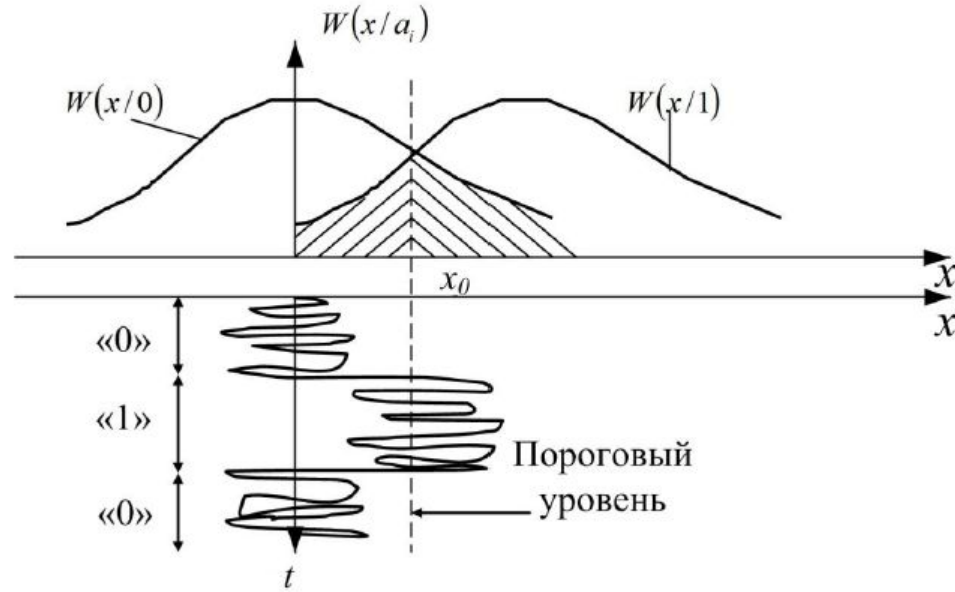
$W(x/a_i)$ – плотность вероятности реализации символа a_i

$W(x/a_j)$ – плотность вероятности реализации символа a_j

Для двоичных символов отношение правдоподобия выглядит

$$\Lambda_{1,0} = \frac{W(x/1)}{W(x/0)}$$

Оптимизация устройств и систем приема инфс



Процедура принятия решения, что в смеси сигнал + шум «1» или «0», сводится к сравнению $x(t)$ с порогом x_0 . При этом возникают ошибки. Вероятность ошибки ложной тревоги F

$$F = \int_{x_0}^{\infty} W(x/0) dx$$

Вероятность пропуска сигнала

$$\hat{D} = \int_{-\infty}^{x_0} W(x/1) dx$$

Оптимизация устройств и систем приема информации

Вероятность правильного обнаружения

$$D = \int_{x_0}^{\infty} W(x/1) dx$$

Критерий максимума правдоподобия используется в системах цифровой передачи информации. Здесь вероятности символов «1» и «0» равны, опасность ошибок F и \hat{D} одинакова.

Критерий Байеса

Второе название: критерий минимума среднего риска. Риск ложной тревоги определяется выражением

$$\overline{R_{ЛТ}} = C_{ЛТ} \cdot P(0) \cdot \int_{x_0}^{\infty} W(x/0) dx$$

$P(0)$ – вероятность передачи символа «0»

$C_{ЛТ}$ – безразмерный коэффициент, имеющий величину значимости ложной тревоги (цена ложной тревоги).

Оптимизация устройств и систем приема информации

Риск пропуска сигнала определяется выражением

$$\bar{R}_{\text{проп. цели}} = C_{\text{ПЦ}} \cdot P(1) \cdot \int_{-\infty}^{x_0} W(x/1) dx,$$

Вероятность пропуска цели \hat{D}

$P(1)$ – вероятность передачи символа «1»;

$C_{\text{ПЦ}}$ – значимость пропуска сигнала (цена пропуска сигнала).

Средневзвешенный суммарный риск

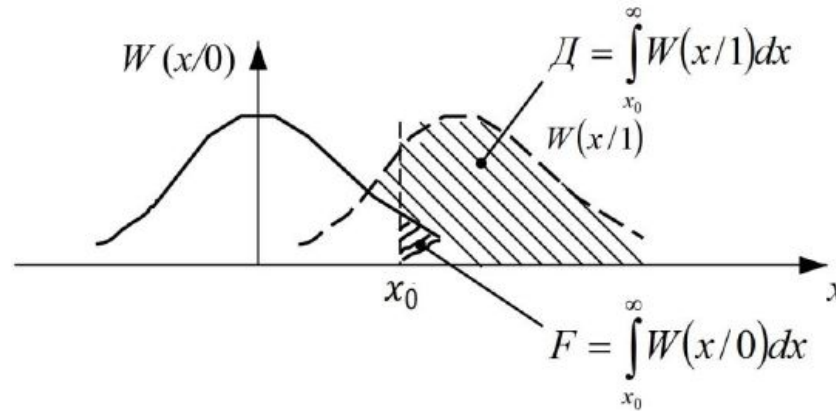
$$\bar{R} = \hat{\bar{R}}_{\text{Л}} + \bar{R}_{\text{ПЦ}}$$

Из всех систем обнаружения наилучшей следует считать ту, которая обеспечивает **наименьший** средний риск.

Оптимизация устройств и систем приема информации

Критерий Неймана–Пирсона

По заданной величине F по кривой вероятности $W(x/0)$ в отсутствии сигнала определяется x_0



При полученном x_0 определяется D – вероятность правильного обнаружения при заданном уровне сигнала.

Нормы на параметры

$$D=0,7-0,99; F=10^{-3}-10^{-5}.$$

обнаружения:

Всегда стремятся уменьшить F и увеличить D . Однако уменьшение F изменением порога x_0 уменьшает и D . Причём D уменьшается более интенсивно. Чтобы обнаружение осуществлялось с заданными параметрами D и F , необходимо стабилизировать пороговый уровень x_0 при одном шуме в отсутствие сигнала. В приёмном устройстве применяется автоматический регулятор порогового уровня в зависимости от уровня шума.

Оптимизация устройств и систем приема информации

Корреляционный прием

Корреляционный (когерентный) приём – это приём сигналов с определённой фазой.

Пусть на интервале от 0 до T наблюдается смесь $x(t)$ сигнала и шума. Сигнал представляет детерминированную функцию времени и известных параметров. Помеха $n(t)$ представляет гауссовский белый шум.

Принятие решения о наличии сигнала в смеси сигнал + шум производится при анализе отношения правдоподобия

$$\Lambda = \frac{W(x/1)}{W(x/0)}$$

Если смесь сигнал + шум определены по времени, то имеется возможность накопления сигнала за период

$$z(T) = \int_0^T x(t) \cdot s(t) dt$$

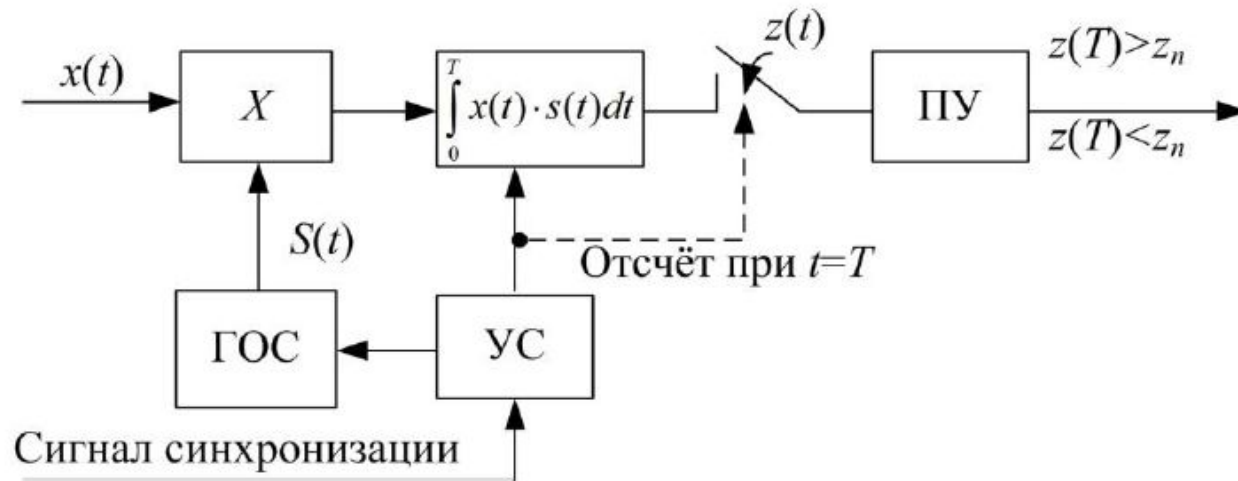
$z(T)$ – корреляционный интеграл

Значение корреляционного интеграла сравнивается с пороговым уровнем z_n :

если $z(T) > z_n$ – сигнал в смеси есть,

если $z(T) < z_n$ – сигнала в смеси нет.

Оптимизация устройств и систем приема

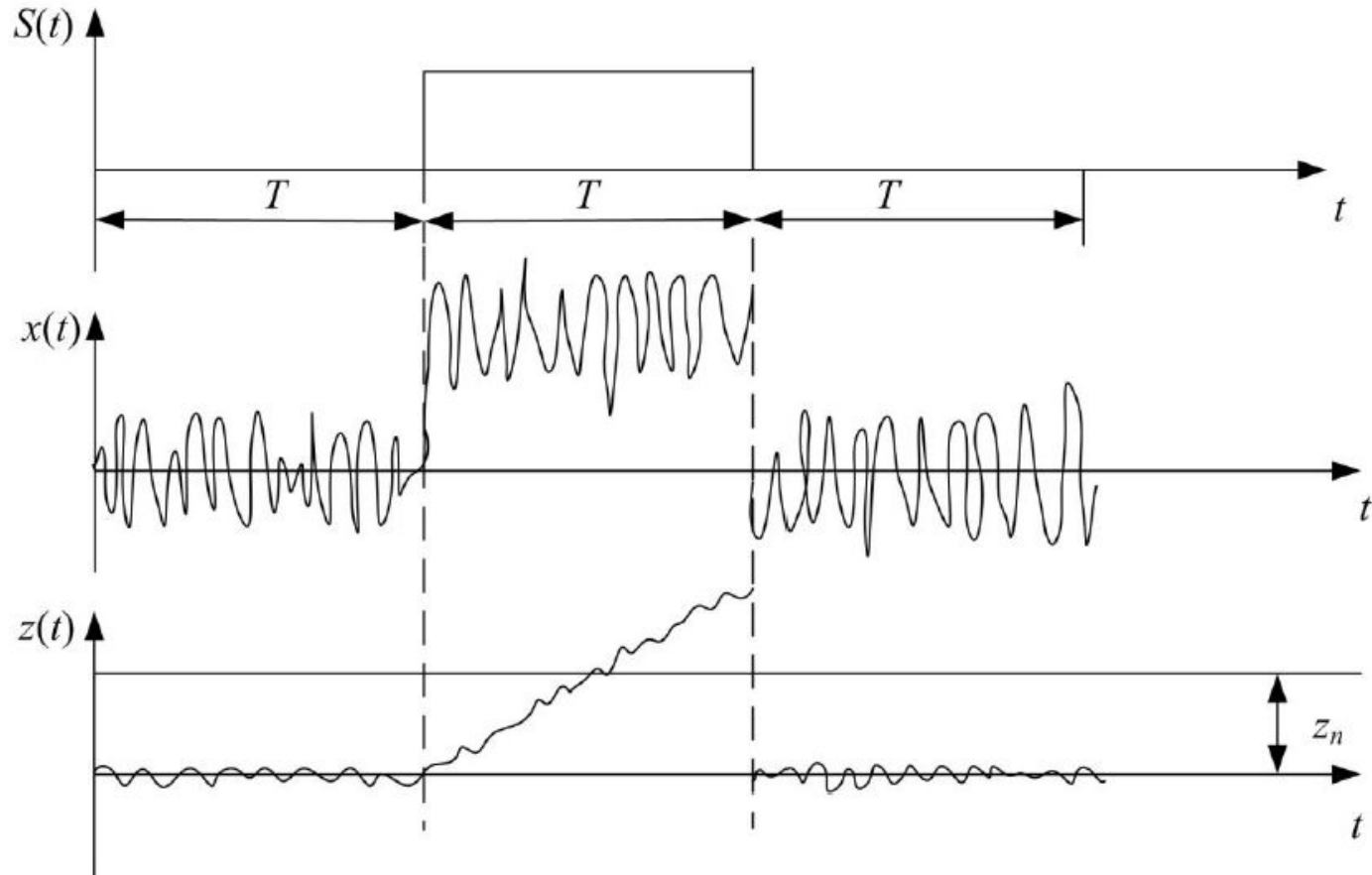


В пороговом устройстве (ПУ) производится сравнение значения корреляционного интеграла в момент ожидаемого окончания действия сигнала $S(t)$ с порогом z_n и принимается решение о наличии или отсутствии сигнала. Начало интегрирования и его окончание совпадают по времени с началом и окончанием ожидаемого сигнала $S(t)$, что

обеспечивается устройством синхронизации (УС).

При корреляционном приёме необходима чёткая временная привязка работы устройств передачи и приёма, т.е. временное положение входного сигнала и его копии должно быть одинаковым. Только в этом случае возможно осуществить умножение $S(t) x(t)$ и получить эффект от интегрирования. Это возможно в радиосистемах передачи информации, где осуществляется тактовая синхронизация.

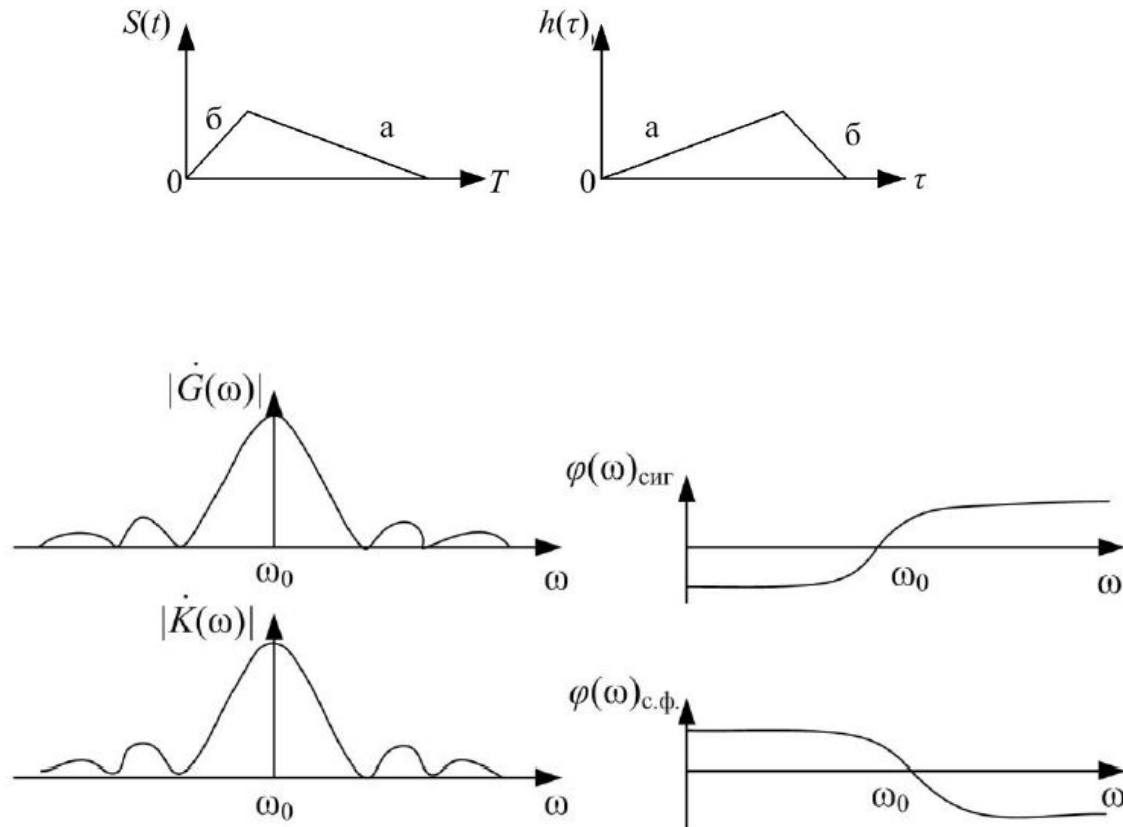
Оптимизация устройств и систем приема информации



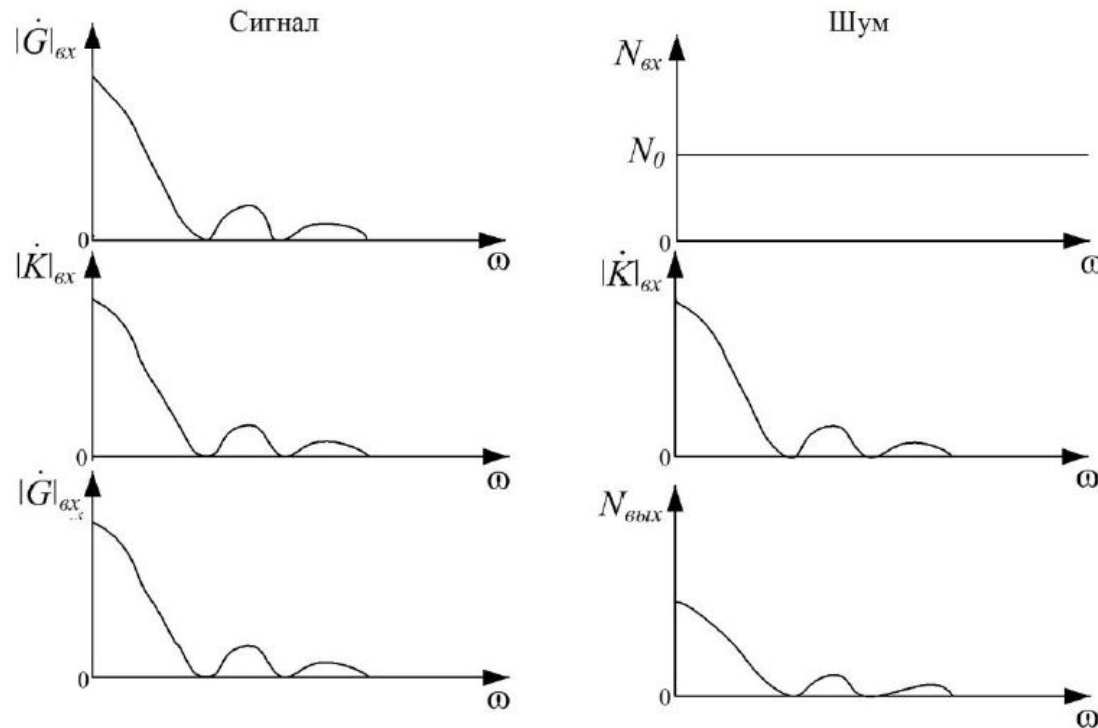
Оптимизация устройств и систем приема информации

Согласованная фильтрация в оптимальных обнаружителях

Импульсная характеристика согласованного (оптимального) фильтра должна быть зеркальным отображением сигнала.



Оптимизация устройств и систем приема



При согласованной фильтрации информация о параметрах сигнала заложена в параметрах фильтра. Поэтому согласованный фильтр инвариантен к моменту прихода сигнала и синхронизация работы передающего и приёмного устройств не требуется.

Согласованный фильтр является оптимальным по критерию максимума отношения сигнал/шум на его выходе.