ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАДИОСИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Математические модели сообщений

Дискретизация непрерывных сообщений

Оптимизация устройств и систем приема информации

Лекция 2

Математические модели сообщений

Математической моделью *дискретного* сообщения служит дискретная случайная последовательность (x_i) – случайный процесс, у которого область определения и область значений являются дискретными множествами.

Дискретная случайная последовательность с *независимыми* элементами. Для этой последовательности случайные элементы независимы и принимают значения их множества X с вероятностями $p(x_i) = p_i, i = 1 \dots m$. Эта модель описывает сообщения ***дискретного источника без памяти***.

Дискретная случайная последовательность с *зависимыми* элементами. Она описывает сообщения ***дискретного источника с памятью***. Модель задается вероятностями:

$$p(x_1^{j+1}, x_2^{j+2}, \dots x_N^{j+N}) = p(x_1^{j+1}) p(x_2^{j+2} \mid x_1^{j+1}) p(x_3^{j+3} \mid x_2^{j+2}, x_1^{j+1}) \dots p(x_N^{j+N} \mid x_{N-1}^{j+N-1} \dots x_1^{j+1})$$

N - длина последовательности $x_1^{j+1}, x_2^{j+2}, \dots x_N^{j+N}$

j - моменты начального дискетного времени

$p(x_k^{j+k} \mid x_{k-1}^{j+k-1} \dots x_1^{j+1})$ вероятность появления в момент времени *j+k* символа x_k при условии, что предыдущими символами были $x_{k-1} \dots x_1$

Математические модели сообщений

Дискретный источник называется ***стационарным****,* если его статистическое описание не зависит от начала отсчета времени *j*.

Математической моделью *непрерывных* сообщений является непрерывный случайный процесс *X(t).* Описание такого процесса дается n-мерной функцией распределения:

$$F(x_1, x_2, \dots x_n; t_1, t_2, \dots t_n)$$

или n-мерной функцией распределения плотности вероятности

$$\omega_n(x_1, x_2, \dots x_n; t_1, t_2, \dots t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots x_n; t_1, t_2, \dots t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

Здесь $n \to \infty$.

С целью упрощения в качестве моделей непрерывных сообщений используют двумерные и одномерные законы распределения.

Реальные сообщения являются нестационарными. Обычно используют либо квазистационарные модели, либо стационарные.

В качестве стационарных моделей сообщений и помех часто используют *гауссовский* случайный процесс.

Математические модели сообщений

Математическое ожидание случайного процесса:

$$m_x(t) = M\{X(t)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\omega(x,t)dx$$

Дисперсия случайного процесса:

$$D_x(t) = M\{[X(t) - m_x(t)]^2\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x - m_x]^2\omega(x,t)dx$$

Корреляционная функция случайного процесса:

$$R_x(t_1,t_2) = M\{[X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2 - m_x(t_2))]\}$$
$$= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)][x_2 - m_x(t_2)]\omega_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

Для стационарных процессов:

$m_x(t) = m_x = const;$

$D_x(t) = D_x = const;$

$R_x(t_1,t_2) = R_x(t_1 - t_2).$

Математические модели сообщений

Эргодический случайный процесс: все характеристики, найденные путем статистического усреднения совпадают с характеристиками, найденными путем усреднения по времени одной реализации:

$$m_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

$$D_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x(t) - m_x]^2 dt$$

$$R_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x(t) - m_x][x(t-\tau) - m_x]dt$$

Пик-фактор сообщения – отношение максимальной мгновенной мощности сообщения к средней:

$$K_{\text{п}} = \frac{P_{max}}{P_x}; \qquad K_{\text{п}} = 10\lg(\frac{P_{max}}{P_x})$$

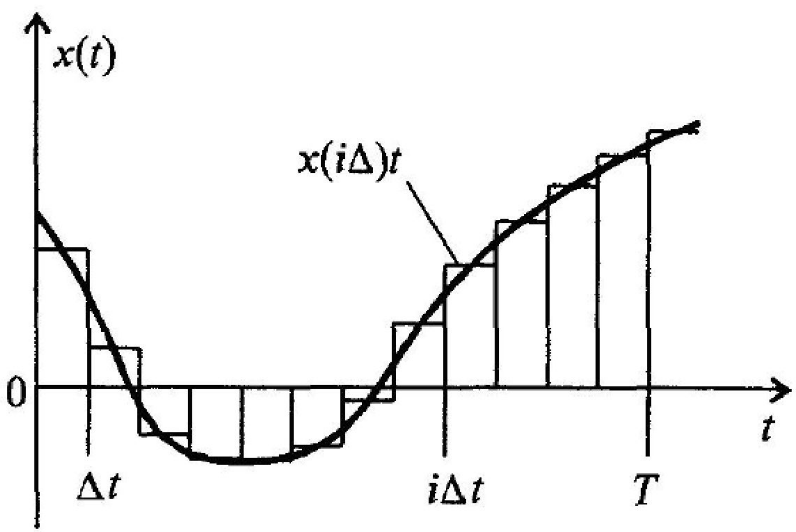
Динамическим диапазоном называется отношение максимальной мгновенной мощности сообщения к минимальной мгновенной мощности:

$$D = 10\lg(\frac{P_{max}}{P_{min}})$$

Дискретизация непрерывных сообщений

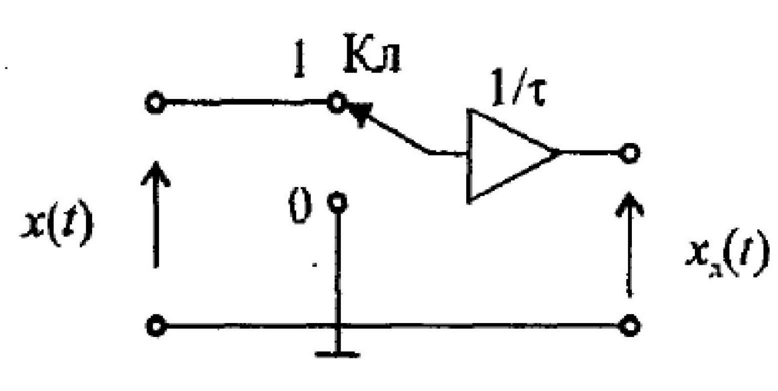
Под ***дискретизацией*** сигналов понимают преобразование функций *непрерывных* переменных в функции *дискретных* переменных, по которым исходные непрерывные функции могут быть восстановлены с заданной точностью.

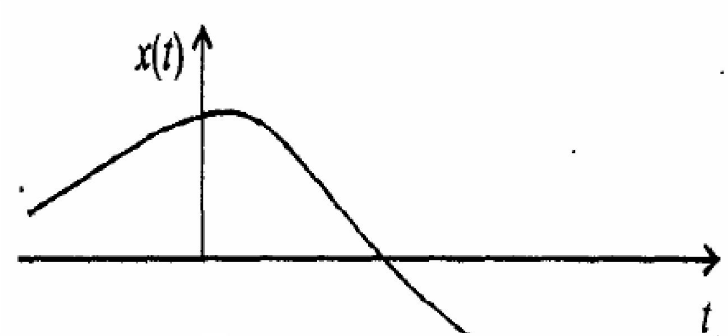
Для *точного* представления произвольной непрерывной функции *x(t)* на конечном интервале времени *T* необходимо располагать данными о мгновенных значениях этой функции во всех точках интервала.

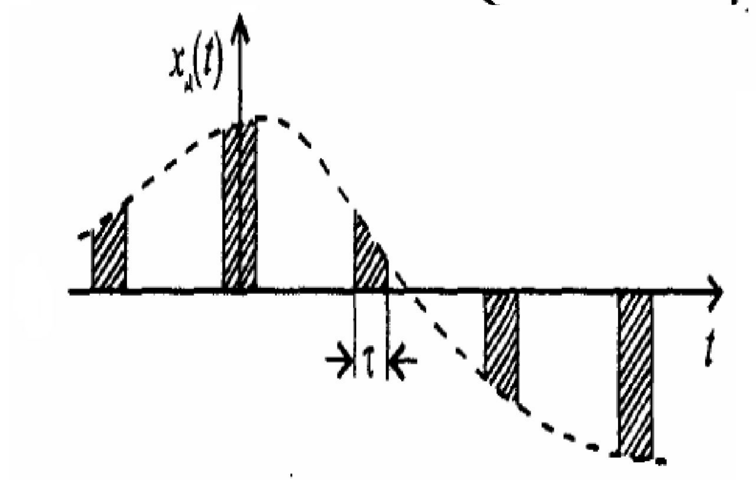


Приближённое представление о функции x(t) можно составить по её отображению в виде дискретной последовательности импульсов, имеющих на интервалах Δt значения x(iΔt), называемых ***отсчётами***

Дискретизация непрерывных сообщений







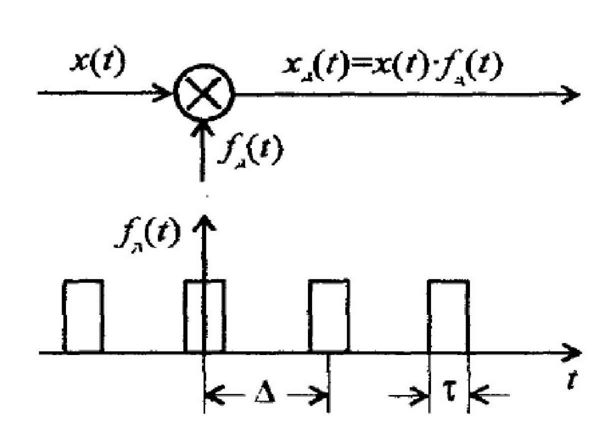
Частота дискретизации $F_Д = {}^{1}/_{t}$

$$x_Д(t) = x(t) f_Д(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_\tau(t - kt)$$

$$\psi_\tau = \begin{cases} {}^{1}/_{\tau}, t = [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \\ 0, t \neq [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \end{cases}$$

Множитель 1/τ нормирует функцию ψ_τ к единичной площади.

Дискретизация непрерывных сообщений



при $\tau \to 0$ периодическая функция дискретизации заменяется решётчатой функцией:

$$f_{\text{р}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$$

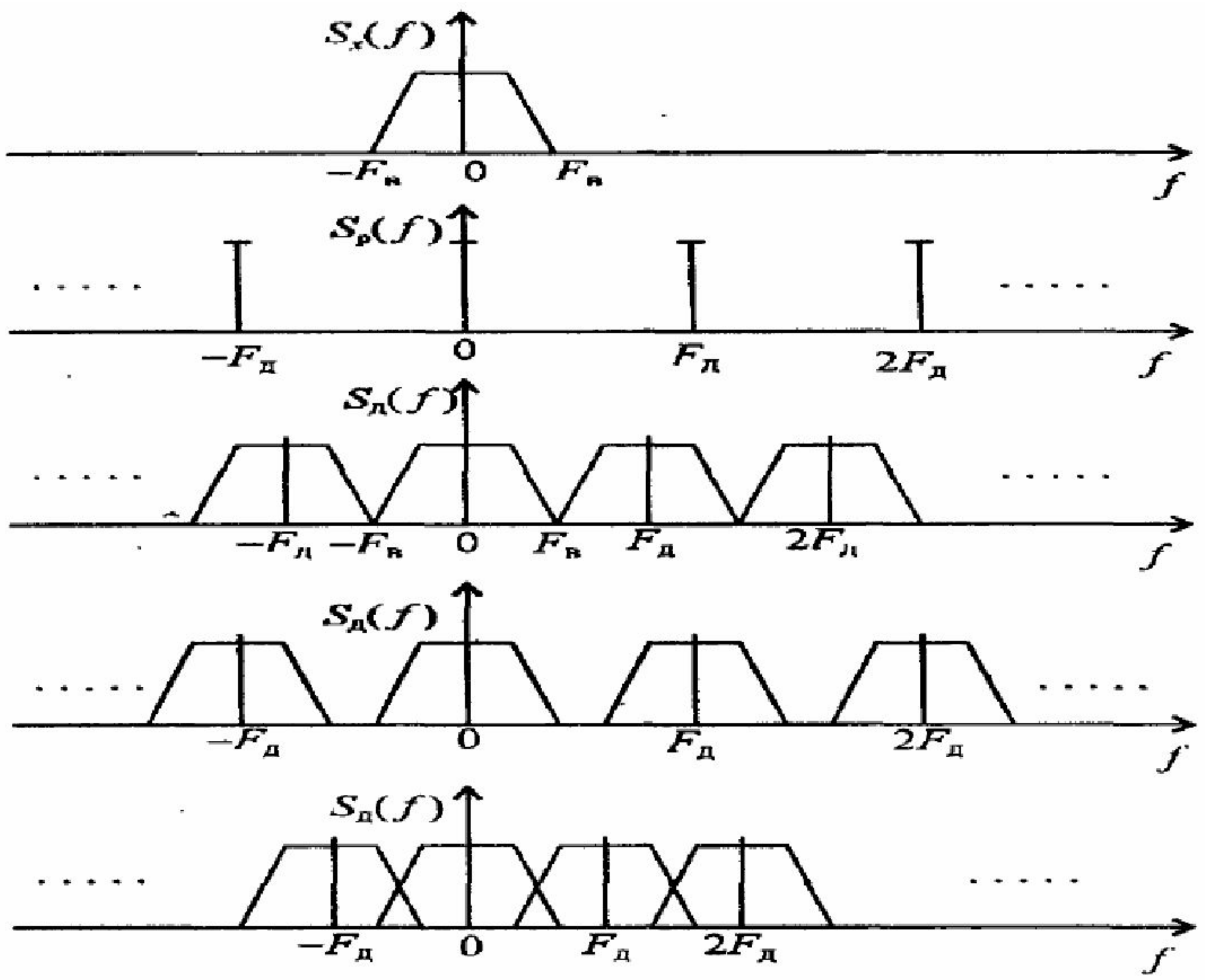
$$x_{\text{Д}}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t - k\Delta t)$$

Процедура дискретизации сводится к образованию произведения дискретизируемой функции *x(t)* на последовательность импульсов дискретизации *f∂ (t)*.

В спектральной области произведение функций времени соответствует свертке их спектров.

Спектр периодической последовательности импульсов дискретизации является линейчатым. Частота дискретизации определяется интервалом дискретизации $F_Д = 1/\Delta t$.

Дискретизация непрерывных сообщений



Дискретизация непрерывных сообщений

Для неискажённого воспроизведения функции *x(t)* по последовательности отсчётов посредством идеального фильтра низких частот необходимо выбирать частоту дискретизации так, чтобы спектральные компоненты свёртки $S_x(f)$ с каждой из дискретных составляющих периодической функции $pF_Д$ (p=0, ±1, ±2, ...) располагались в неперекрывающихся областях. Этому соответствуют значения $F_Д > 2F_в$. При $F_Д < 2F_в$ спектральные области перекрываются, а в полосу частот ($-F_в, F_в$) дискретизируемого сигнала попадут спектральные компоненты смежных областей и возникнут искажения при восстановлении функции по отсчётам.

Для точного воспроизведения непрерывной функции с ограниченным (финитным) спектром достаточно располагать значениями функции (отсчётами) лишь в отдельных точках.

В общем случае процессы дискретного представления описываются выражениями:

$$(c_{1,}c_{2,} \dots c_N) = A[x(t)]$$

$$x'(t) = A'[(c_{1,}c_{2,} \dots c_N)]$$

где A — оператор дискретного представления, A' — оператор восстановления, *c1, c2, ...,* c_N –совокупность координат дискретного представления непрерывного сигнала *x(t)*, *x’(t)* - восстановленный по координатам дискретного представления сигнал

Дискретизация непрерывных сообщений

При линейных процессах представления и восстановления эти выражения можно представить в виде:

$$c_i = \int_0^{T_c} x(t)\psi_i(t)dt, i = 1, \dots, N$$

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(t)$$

где $\psi_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ - *весовые и базисные* (координатные) функции.

В зависимости от системы используемых весовых функций $\psi_i(t)$, *i = 1,...,N*, различают дискретное *временное*, дискретное *обобщенное* и дискретное *разностное* представления.

В случае дискретного временного представления используется система весовых функций $\psi_i(t) = \delta(t - t_i)$, *i=1, 2,...,N*, где $\delta(t - t_i)$ - дельта-функция. При этом координаты $c_i = x(t_i)$, *i=1, ... ,N*, т. е. совпадают с мгновенными значениями (отсчётами) непрерывной функции *x(t)* в дискретные моменты t_i.

Представление называется ***регулярным***, если шаг дискретизации $T_д = t_i - t_{i-1}$ постоянный. В противном случае оно называется ***нерегулярным***.

Дискретизация непрерывных сообщений

При представлении сигналов регулярными отсчётами основным является выбор частоты дискретизации *Fд = 1/Tд* и базисных функций $\varphi_i(t)$. Особенно важно найти минимальную частоту *Fд*, при которой еще имеется принципиальная возможность восстановления непрерывного сигнала с заданной погрешностью.

Для модели сигнала с ограниченным спектром решение указанных задач содержится в ***теореме Котельникова***, формулировка которой звучит так: ***любую непрерывную функцию со спектром, ограниченным полосой частот от нуля до Fв, можно однозначно определить последовательностью ее мгновенных значений, взятых через интервалы Tд ≤ 1/(2 Fв) по формуле:***

$$x'(t) = \sum_{i=\infty}^{\infty} x(iT_{\text{д}}) \frac{\sin[2\pi F_{\text{в}}\left(t - iT_{\text{д}}\right)]}{2\pi F_{\text{в}}(t - iT_{\text{д}})}$$

Этот ряд называется ***рядом Котельникова***.
Базисные функции:

$$\varphi_i(t) = \frac{\sin[(2\pi F_{\text{в}}\left(t - iT_{\text{д}}\right)]}{2\pi F_{\text{в}}(t - iT_{\text{д}})}$$

Они образуют ортогональную на бесконечном интервале систему функций.

Дискретизация непрерывных сообщений

Фундаментальное значение теоремы Котельникова заключается в том, что она обосновывает возможность дискретизации по аргументу (времени) любых функций с ограниченным спектром. На ней основаны все методы импульсной модуляции.

Пусть для некоторых сигналов $x(t)$ с ограниченным спектром все отсчёты в точках $k\Delta t$, лежащих за пределами некоторого интервала времени длительностью Т, равны нулю. Тогда ряд вырождается в конечную сумму, число членов которой n равно числу отсчётных точек, умещающихся на интервале Т:

$$n \approx T / \Delta t = 2F_в T,$$

В теории связи ее называют ***базой*** сигнала.

Иногда полученный результат формулируют следующим образом: сигнал длительностью T, спектр которого не содержит частот выше $F_в$ полностью определяется заданием $2F_в T$ его отсчётов.

Однако спектр ограниченного во времени сигнала не может быть конечным, так что таких сигналов в природе не существует. Поэтому сигнал, представленный конечным числом членов ряда Котельникова, существует и за пределами интервала времени T, внутри которого находятся все ненулевые отсчёты.

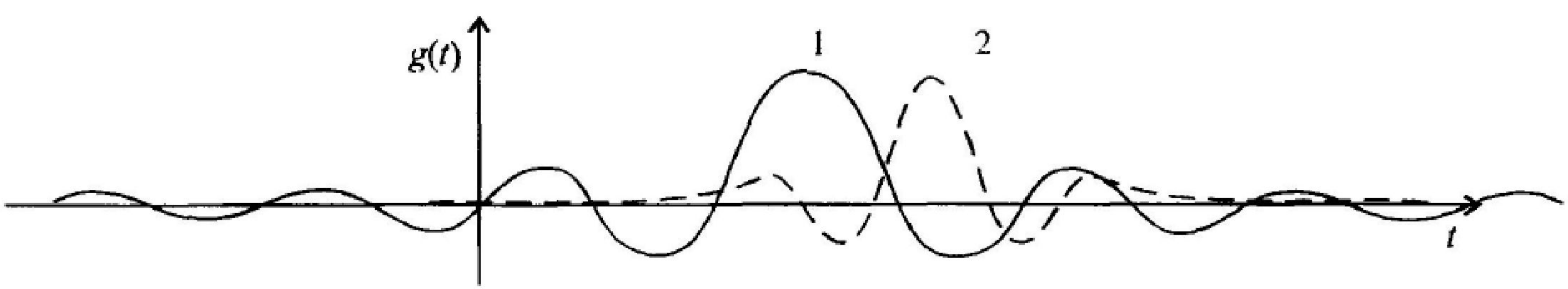
Дискретизация непрерывных сообщений

Тем не менее, на практике часто приходится иметь дело с конечными сигналами, энергия которых почти полностью сосредоточена внутри полосы частот $|f| \leq F_в$, для таких сигналов нередко используют конечное число $2F_вT$ членов ряда Котельникова. Но в данном случае это представление является приближенным, и сумма такого конечного ряда отличается от функции *x(t)* некоторой погрешностью.

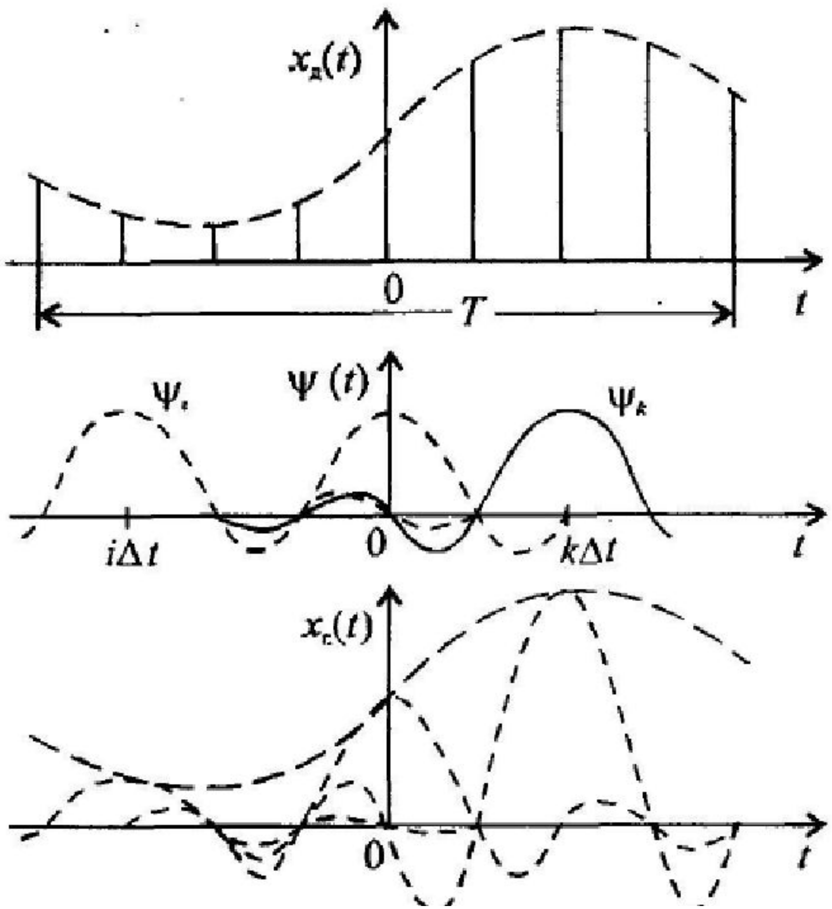
Восстановление непрерывной функции по ее отсчётам

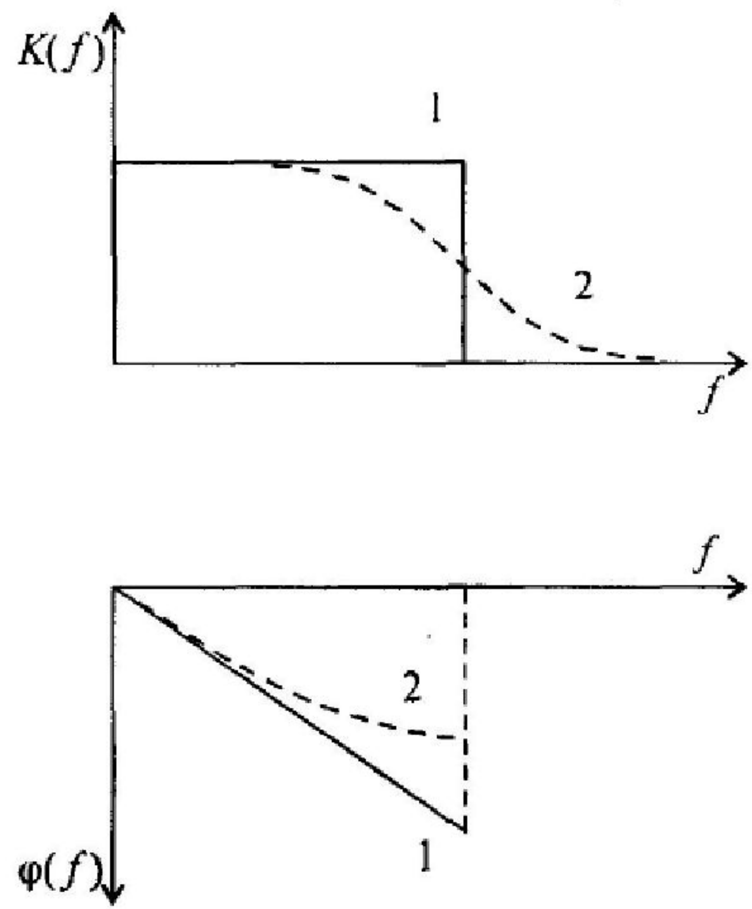
Непрерывный сигнал восстанавливается, если на вход идеального фильтра нижних частот с полосой пропускания *0... Fв* подать последовательность дельта-функций $\delta(t - iT_д)$, $i = .., -1, 0, 1, ...$, умноженных на коэффициенты $x(iT_Д)$.

На практике вместо дельта-функций используют короткие импульсы, а вместо идеального фильтра нижних частот — реальный фильтр нижних частот, что, естественно, приводит к погрешности восстановления.



Дискретизация непрерывных сообщений





Дискретизация непрерывных сообщений

Теорему Котельникова можно распространять и на случайные сигналы. Тогда она формулируется следующим образом: для случайного процесса с односторонней спектральной плотностью мощности, удовлетворяющей условию $Gx(f)=0$ при $f > F_в$, ряд:

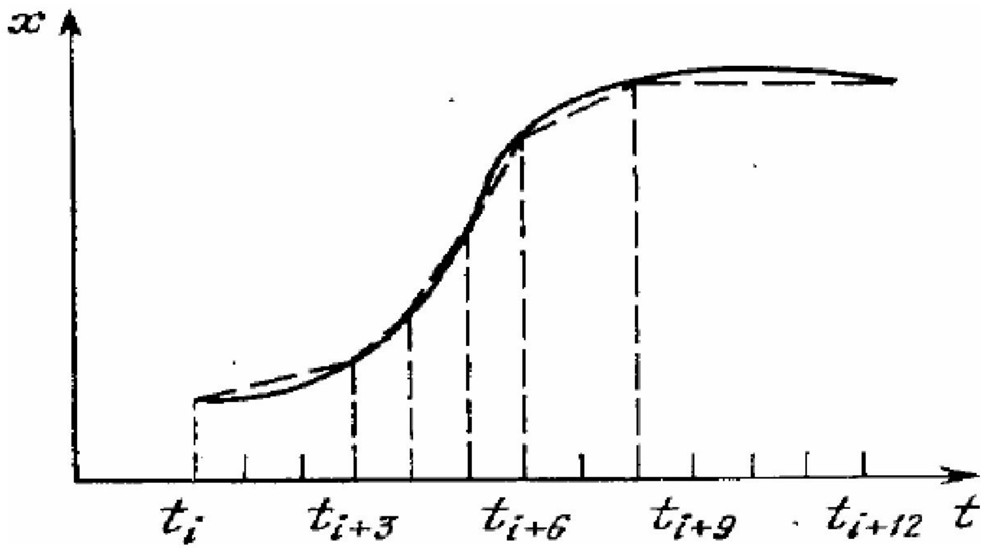
$$\sum_{i=\infty}^{\infty} X(iT_{\text{Д}}) \frac{\sin[2\pi F_{\text{В}}(t - iT_{\text{Д}})]}{2\pi F_{\text{В}}(t - iT_{\text{Д}})}$$

где $X(iT_{\partial})$—случайные величины, представляющие собой отсчёты случайного процесса, взятые через интервалы времени $T_{\partial} = 1/(2F_в)$, сходится в среднеквадратическом смысле к процессу $X(t)$.

Адаптивная дискретизация непрерывных сообщений

В данном случае координатами являются мгновенные значения непрерывного сигнала в некоторых точках опроса, неравноотстоящих друг от друга. На интервалах, где функция меняется в больших пределах, отсчеты берутся чаще, а на интервалах медленного изменения - реже. Для представления сообщения стараются использовать как можно меньшее число отсчетов, но достаточное для восстановления сообщения с заданной погрешностью.

Дискретизация непрерывных сообщений



Отсчеты, позволяющие восстановить непрерывное сообщение на приемной стороне с заданной точностью, называются обычно *существенными*. Различные способы адаптивной дискретизации отличаются алгоритмами формирования существенных отсчетов и видом служебной информации. *Простейший* алгоритм формирования существенных отсчетов. Пусть последний существенный отсчет был в момент t_i. Для формирования следующей выборки сравнивают текущее значение функции $x(t)$ с $x(t_i)$. Момент t_{i+j}, при котором

$|x(t_{i+j}) - x(t_i)| = \varepsilon_m$, соответствует очередной существенной выборке.

Дискретизация непрерывных сообщений

При адаптивной дискретизации отсчеты передаются в случайные моменты. Поэтому для восстановления непрерывного сообщения по отсчетам приемная сторона должна знать, к каким тактовым моментам относятся принятые отсчеты. В связи с этим на приемную сторону приходится передавать дополнительную служебную информацию. Такой информацией могут быть значения тактовых моментов, соответствующих существенным выборкам. Адаптивные способы дискретизации широко применяют при отсутствии априорной информации о корреляционной функции или спектральной плотности мощности непрерывных сообщений.

Оптимизация устройств и систем приема информации

Задача приёма сигналов состоит в наилучшем воспроизведении информации, заключенной в сигнале, искаженном помехами, т.е. по заранее известным характеристикам передаваемого сигнала, канала связи и помех, зная их функциональное взаимодействие необходимо получить оптимальное приемное устройство, наилучшим образом воспроизводящее переданное сообщение.

Оптимальным называют приемник, для которого вызванные помехами искажения сообщения минимальны.

При приеме решают две задачи: задачу обнаружения сигнала и задачу различения сигналов на фоне помех.

При решении конкретных задач оптимального приёма используют следующие модели радиосигналов:

1. Сигнал с полностью известными параметрами

$$A(t) = A_0(t - \tau_0)\cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau_0) + \varphi_0] \text{ при } t[0, T]$$

где индекс 0 означает, что эти параметры известны.

2. Сигнал со случайной начальной фазой

$$A(t, \varphi) = A_0(t - \tau_0)\cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau_0) + \varphi] \text{ при } t[0, T]$$

где **ф** – начальная фаза – случайная величина, равномерно распределенная на интервале.

Оптимизация устройств и систем приема информации

3. Сигнал со случайной амплитудой и начальной фазой

$$A(t, A, \varphi) = A_0(t)\cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau_0) + \varphi]$$

здесь величины **А** и **ф** статистически независимы. Причем величина **А** распределена по закону Рэлея, а начальная фаза равномерно распределена на интервале (**-π, π**) .

В качестве помехи при анализе используется белый шум. Спектральная плотность белого шума постоянна в неограниченной полосе частот и равна ***N0 / 2***. Односторонняя спектральная плотность шума в полосе частот от **0** до ∞ равна ***N0*** . ***N0*** – нормированная спектральная плотность шума, приходящаяся на 1 Гц полосы пропускания приемника.

<u>Вероятностные характеристики обнаружения сигнала</u>

В результате процесса обнаружения должно быть принято решение о наличии или отсутствии сигнала.

Пусть А1 – есть сигнал, А2 – нет сигнала.

В результате действия помех каждому из условий может быть два решения при приеме смеси сигнал + шум:

- A_1^* – есть сигнал,
- A_2^* – нет сигнала.

Оптимизация устройств и систем приема информации

Условная вероятность правильного обнаружения сигнала

$$Д = P\left(A_1^* I A_1\right)$$

Сигнал передавался и решение принято, что сигнал есть.

Условная вероятность пропуска сигнала

$$\hat{Д} = P\left(A_2^* I A_1\right)$$

Сигнал передавался, а решение при приёме принято, что сигнала нет.

$Д$ и $\hat{Д}$ соответствуют одному и тому же условию наличия сигнала и являются взаимоисключающими, поэтому

$$Д + \hat{Д} = 1$$

Условная вероятность ложной тревоги

$$F = P\left(A_1^* I A_2\right)$$

Сигнал не передавался, а решение принято, что сигнал есть.

Оптимизация устройств и систем приема информации

Условная вероятность правильного необнаружения

$$\hat{F} = P\left(A_2^* I A_2\right)$$

Сигнал не передавался и решение принято, что сигнала нет.

Здесь также справедливо равенство

$$F + \hat{F} = 1$$

основными характеристиками обнаружения являются вероятность правильного обнаружения Д и вероятность ложной тревоги (ЛТ) F.

Критерии оптимального обнаружения и различения сигналов

Качество приема оценивается вероятностью правильного приёма символов двоичного сигнала.

Максимум этой вероятности называется *потенциальной помехоустойчивостью*, а демодулятор, обеспечивающий этот максимум, называется *идеальным приёмником*.

При решении вопроса обнаружения и различения сигналов необходимо:

– определить критерии оптимального приёма;

– определить алгоритм преобразования смеси сигнал + шум и по этому алгоритму определить структуру приёмника.

Оптимизация устройств и систем приема информации

Критерий максимума правдоподобия

В этом критерии анализируется отношение правдоподобия

$$\Lambda_{i,j} = \frac{W(x/a_i)}{W(x/a_j)}$$

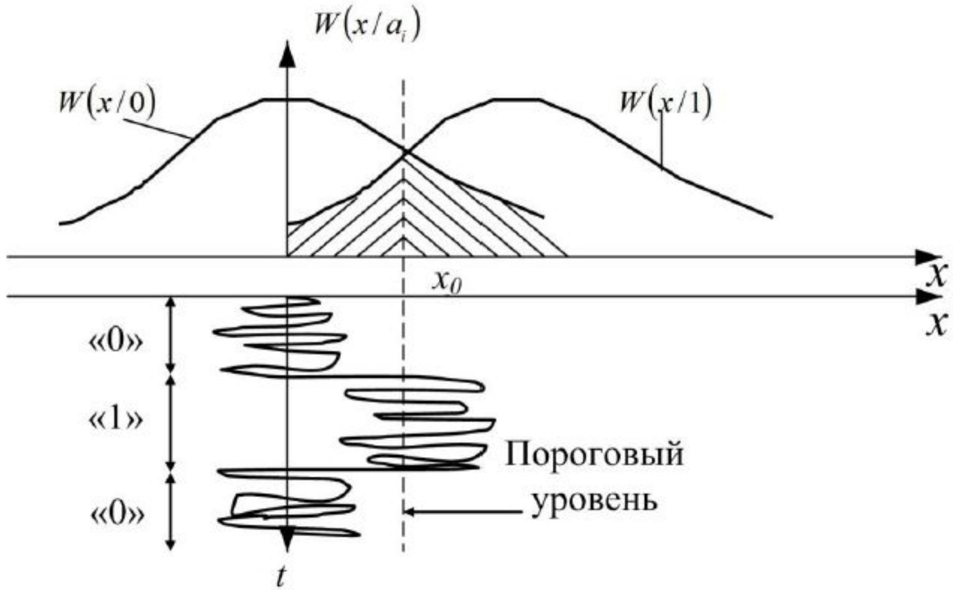
$W(x/a_i)$ – плотность вероятности реализации символа ai

$W(x/a_j)$ – плотность вероятности реализации символа aj

Для двоичных символов отношение правдоподобия выглядит

$$\Lambda_{1,0} = \frac{W(x/1)}{W(x/0)}$$

Оптимизация устройств и систем приема инфо



Процедура принятия решения, что в смеси сигнал + шум «1» или «0», сводится к сравнению ***x(t)*** с порогом ***x0*** . При этом возникают ошибки. Вероятность ошибки ложной тревоги F

$$F = \int_{x_0}^{\infty} W(x/0)\,dx$$

Вероятность пропуска сигнала

$$\hat{Д} = \int_{-\infty}^{x_0} W(x/1)\,dx$$

Оптимизация устройств и систем приема информации

Вероятность правильного обнаружения

$$Д = \int_{x_0}^{\infty} W(x/1)\,dx$$

Критерий максимума правдоподобия используется в системах цифровой передачи информации. Здесь вероятности символов «1» и «0» равны, опасность ошибок F и $\hat{Д}$ одинакова.

Критерий Байеса

Второе название: критерий минимума среднего риска. Риск ложной тревоги определяется выражением

$$\overline{R_{ЛТ}} = C_{ЛТ} \cdot P(0) \cdot \int_{x_0}^{\infty} W(x/0)\,dx,$$

P(0) – вероятность передачи символа «0»

$C_{ЛТ}$ – безразмерный коэффициент, имеющий величину значимости ложной тревоги (цена ложной тревоги).

Оптимизация устройств и систем приема информации

Риск пропуска сигнала определяется выражением

$$\overline{R}_{\text{проп.цели}} = C_{\text{ПЦ}} \cdot P(1) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{x_0} W(x/1)\,dx}_{\text{Вероятность пропуска цели } \hat{Д}},$$

P(1) – вероятность передачи символа «1»;

$C_{\text{ПЦ}}$ – значимость пропуска сигнала (цена пропуска сигнала).

Средневзвешенный суммарный риск

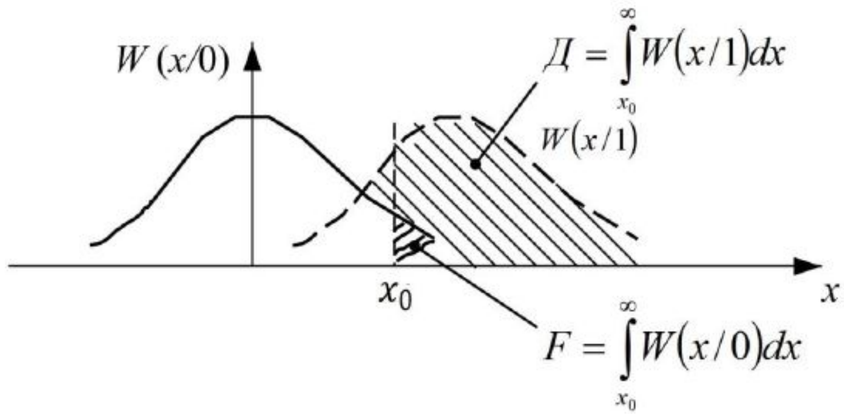
$$\overline{R} = \overline{R}_{\text{ЛТ}} + \overline{R}_{\text{ПЦ}}$$

Из всех систем обнаружения наилучшей следует считать ту, которая обеспечивает ***наименьший*** средний риск.

Оптимизация устройств и систем приема информации

<u>Критерий Неймана–Пирсона</u>

По заданной величине ***F*** по кривой вероятности ***W(x/0)*** в отсутствии сигнала определяется ***x0***



При полученном ***x0*** определяется ***Д*** – вероятность правильного обнаружения при заданном уровне сигнала.

Нормы на параметры обнаружения:

$$Д=0,7–0,99;\ F=10^{-3}–10^{-5}.$$

Всегда стремятся уменьшить ***F*** и увеличить ***Д***. Однако уменьшение ***F*** изменением порога ***x0*** уменьшает и ***Д***. Причём ***Д*** уменьшается более интенсивно. Чтобы обнаружение осуществлялось с заданными параметрами ***Д*** и ***F*** , необходимо стабилизировать пороговый уровень ***x0*** при одном шуме в отсутствие сигнала. В приёмном устройстве применяется автоматический регулятор порогового уровня в зависимости от уровня шума.

Оптимизация устройств и систем приема информации

Корреляционный прием

Корреляционный (когерентный) приём – это приём сигналов с определённой фазой.

Пусть на интервале от ***0*** до ***T*** наблюдается смесь ***x(t)*** сигнала и шума. Сигнал представляет детерминированную функцию времени и известных параметров. Помеха ***n(t)*** представляет гауссовский белый шум.

Принятие решения о наличии сигнала в смеси сигнал + шум производится при анализе отношения правдоподобия

$$\Lambda=\frac{W(x/1)}{W(x/0)}.$$

Если смесь сигнал + шум определены по времени, то имеется возможность накопления сигнала за период

$$z(T)=\int_0^T x(t)\cdot s(t)dt$$

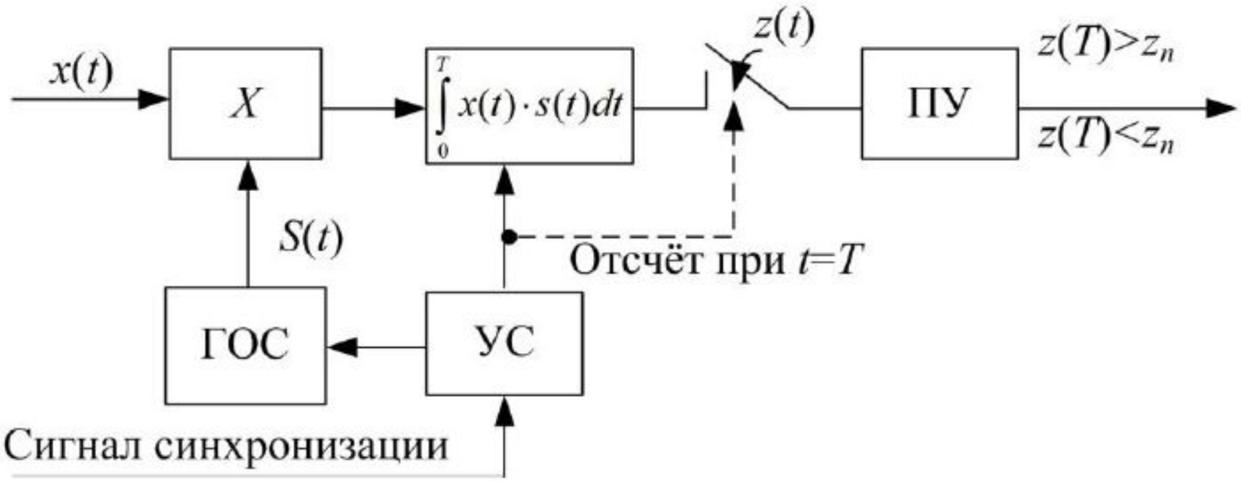
z(T) – корреляционный интеграл

Значение корреляционного интеграла сравнивается с пороговым уровнем z_n :

если $z(T) > z_n$ – сигнал в смеси есть,

если $z(T) < z_n$ – сигнала в смеси нет.

Оптимизация устройств и систем приема

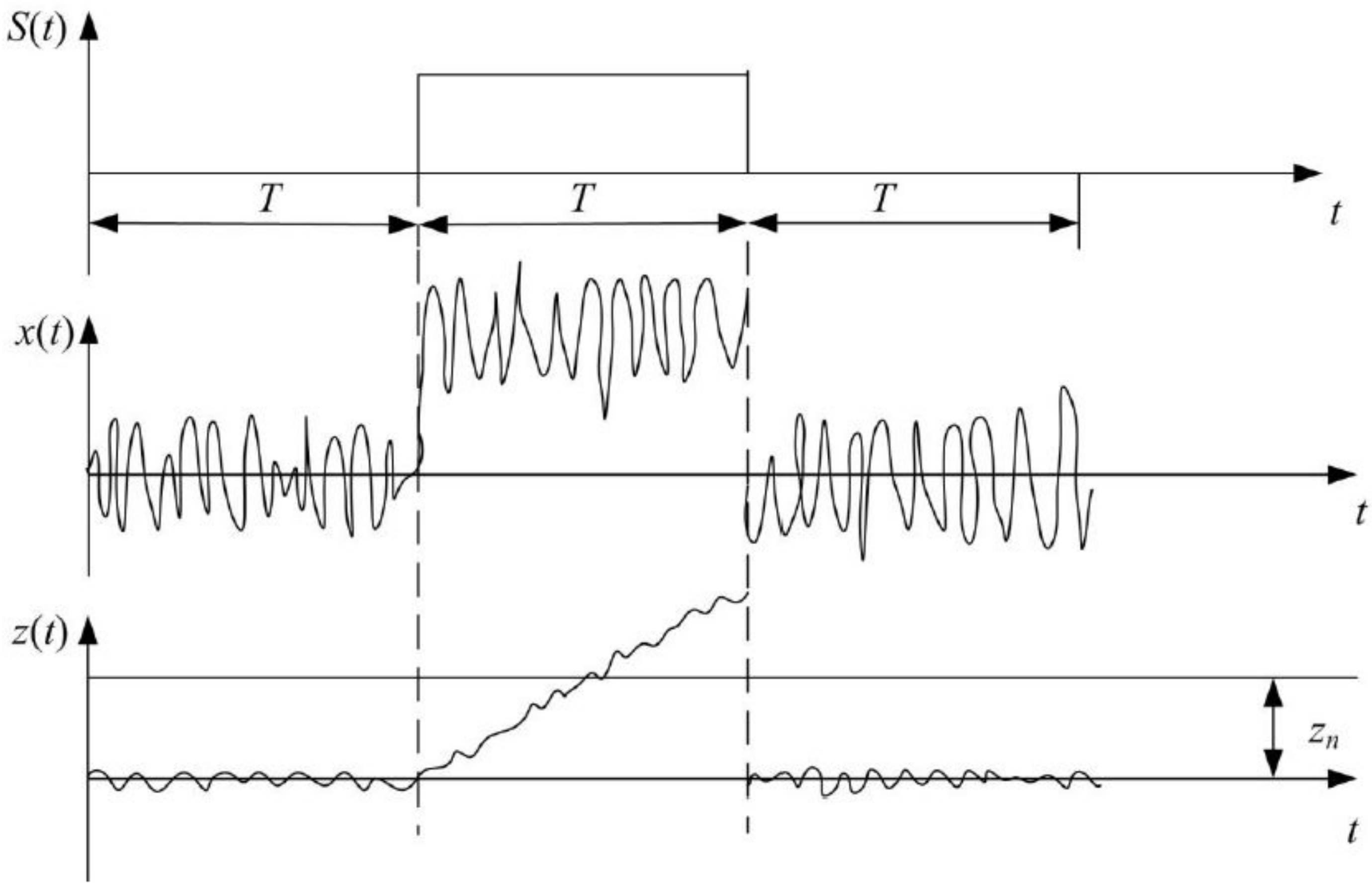


В пороговом устройстве (ПУ) производится сравнение значения корреляционного интеграла в момент ожидаемого окончания действия сигнала ***S(t)*** с порогом ***zn*** и принимается решение о наличии или отсутствии сигнала. Начало интегрирования и его окончание совпадают по времени с началом и окончанием ожидаемого сигнала ***S(t)*** , что

обеспечивается устройством синхронизации (УС).

При корреляционном приёме необходима чёткая временная привязка работы устройств передачи и приёма, т.е. временное положение входного сигнала и его копии должно быть одинаковым. Только в этом случае возможно осуществить умножение ***S(t) x(t)*** и получить эффект от интегрирования. Это возможно в радиосистемах передачи информации, где осуществляется тактовая синхронизация.

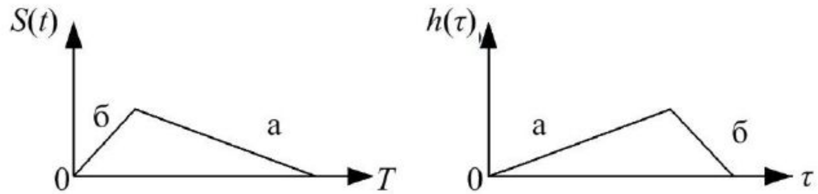
Оптимизация устройств и систем приема информации

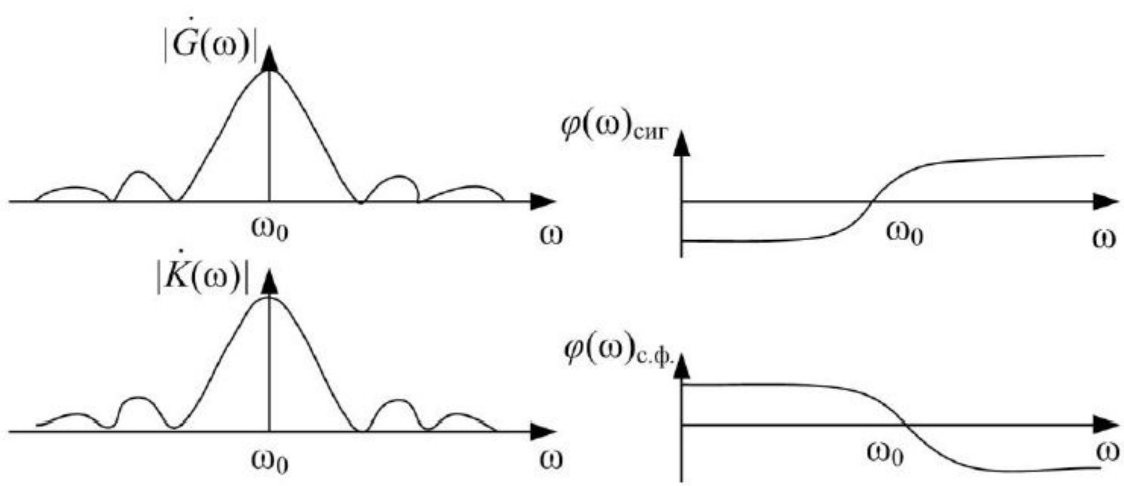


Оптимизация устройств и систем приема информации

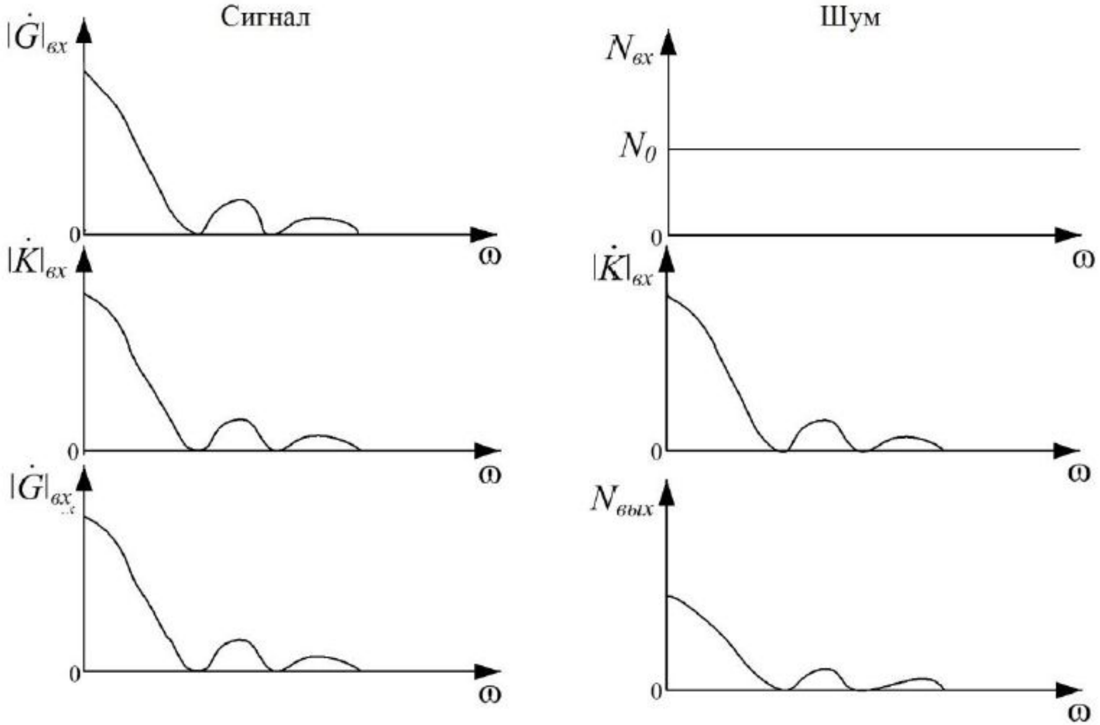
<u>Согласованная фильтрация в оптимальных обнаружителях</u>

Импульсная характеристика согласованного (оптимального) фильтра должна быть зеркальным отображением сигнала.





Оптимизация устройств и систем приема ин



При согласованной фильтрации информация о параметрах сигнала заложена в параметрах фильтра. Поэтому согласованный фильтр инвариантен к моменту прихода сигнала и синхронизация работы передающего и приёмного устройств не требуется.
Согласованный фильтр является оптимальным по критерию максимума отношения сигнал/шум на его выходе.