

***ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС***

***В***

***ЯДЕРНО-***

***ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ***

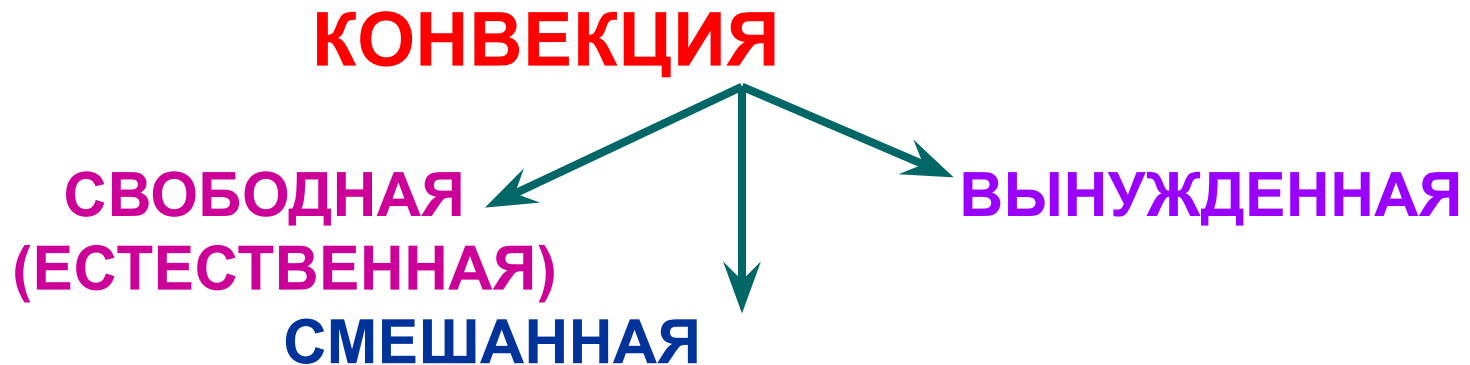
***УСТАНОВКАХ***

***ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС  
В ЯДЕРНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ  
УСТАНОВКАХ***

***Тема № 6***

**КОНВЕКТИВНЫЙ  
ТЕПЛОМАССООБМЕН  
В ОДНОФАЗНЫХ ПОТОКАХ**

**КОНВЕКЦИЯ** (от лат. *convectio* – *принесение, доставка*) – перенос субстанции (массы, импульса, энергии, в частности, тепла) в жидкостях, газах или сыпучих средах потоками вещества.



**СВОБОДНАЯ (ЕСТЕСТВЕННАЯ) КОНВЕКЦИЯ** возникает под действием неоднородного поля массовых сил (например, гравитационных; в системе, движущейся с ускорением), неоднородность которого обусловлена неоднородной (вследствие теплообмена) плотностью текущей среды.

Вещество, нагретое сильнее, имеет меньшую плотность и

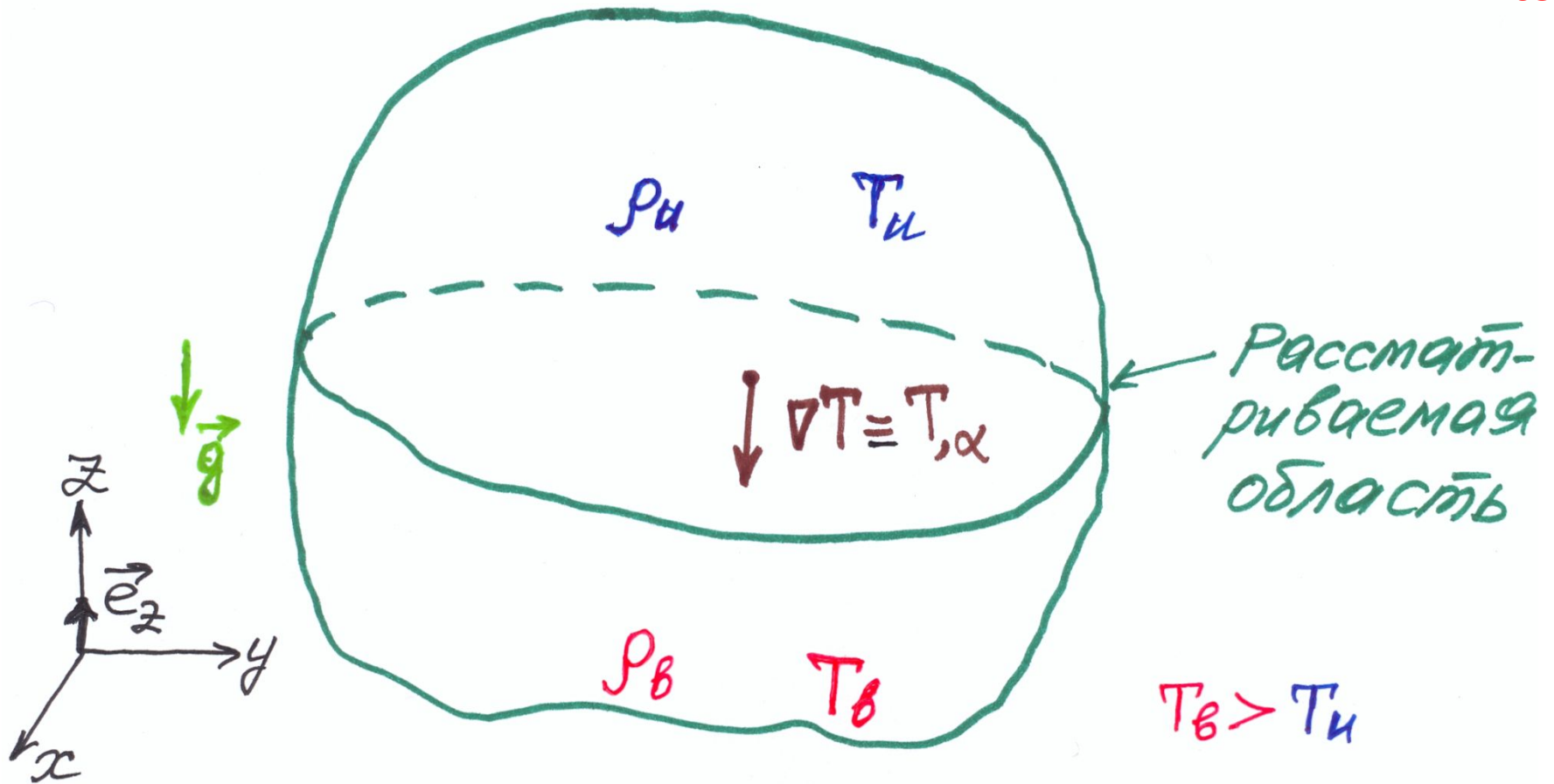
под действием архимедовой  $F_{Ar}$  силы перемещается относительно менее нагретого вещества.

04

$$f_{Ar} = \frac{F_{Ar}}{V} = g (\rho_u - \rho_b) \quad .$$

Направление силы  $f_{Ar}$  следовательно, и конвекция для нагретых объёмов вещества противоположно направлению силы тяжести.

Конвекция приводит к выравниванию температуры вещества.



$$\nabla T \equiv T_{,z} = T_{,z} \cdot \vec{e}_z = -\frac{dT}{dz} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{g} = -g \vec{e}_z$$

При стационарном подводе теплоты к веществу в нём возникают стационарные конвекционные потоки, переносящие теплоту от более нагретых слоев к менее нагретым.

С уменьшением разности температур между слоями интенсивность конвекции уменьшается.

При высоких значениях теплопроводности и вязкости среды конвекция также оказывается ослабленной.

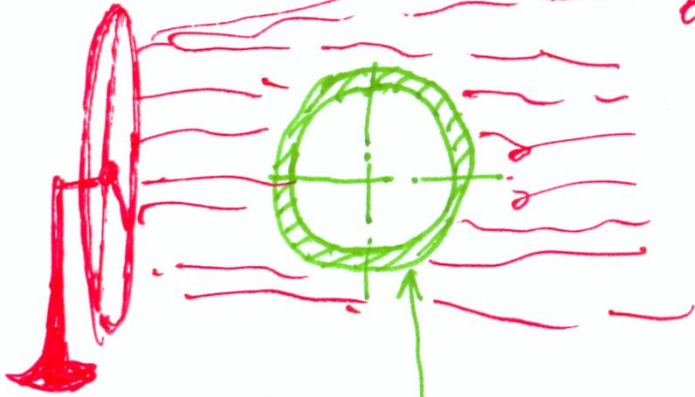
На конвекцию ионизованного газа (например, солнечной плазмы) существенно влияет магнитное поле и состояние газа (степень его ионизации и т.д.).

В условиях невесомости **естественная конвекция невозможна.**

**ВЫНУЖДЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ** – перемещение теплоносителя относительно поверхности теплообмена вызвано какими-либо внешними побудителями (насос, мешалки и т.п.). Интенсивность переноса теплоты здесь зависит не только от перечисленных выше факторов, но и от скорости вынужденного движения вещества.

## Вынужденная

тепло уносится  
вправо потоком  
воздуха

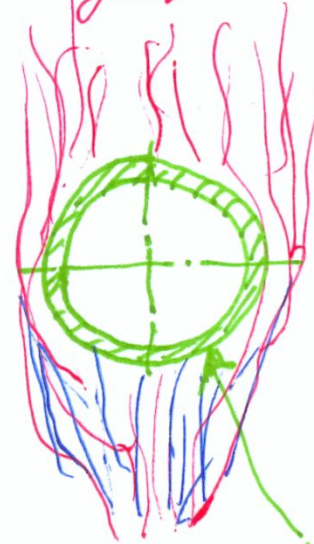


нагреваемая  
труба

Перенос в условиях  
вынужденной  
конвекции

## Естественная

тепло переносится вверх  
восходящим потоком  
нагретого  
воздуха



нагреваемая  
труба

Перенос в условиях  
естественной  
конвекции



ВЫНУЖДЕННАЯ	СВОБОДНАЯ
Гидродинамические условия теплопереноса определяются заранее некоторым внешним источником	Гидродинамические условия теплопереноса определяются подъёмными силами, возникающими в нагретой жидкости (газе)
Сначала определяется поле скоростей, которое затем используется для нахождения поля температуры	Поля скоростей и температуры взаимосвязаны и могут быть определены только путём совместного решения системы уравнений гидродинамики и теплопереноса
Число Нуссельта является функцией чисел Рейнольдса и Прандгля: $Nu = Nu(Re, Pr)$	Число Нуссельта является функцией чисел Грасгофа и Прандгля: $Nu = Nu(Gr, Pr)$

Конвекция широко распространена в природе: в нижнем слое земной атмосферы, морях и океанах, в недрах Земли, на Солнце (в слое до глубины  $\sim 20\div 30\%$  радиуса Солнца от его поверхности) и т.д.

С помощью конвекции осуществляют охлаждение или нагревание жидкостей и газов в различных технических устройствах (*Конвективный теплообмен*).

**КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН** – процесс переноса тепла, происходящий в движущихся текучих средах (жидкостях либо газах) и обусловленный совместным действием двух механизмов переноса тепла – собственно конвективного переноса и теплопроводности.

Таким образом, в случае конвективного теплообмена распространение тепла в пространстве осуществляется за счёт переноса тепла при перемещении текучей среды из области с более высокой температурой в область с меньшей температурой, а также за счёт теплового движения микрочастиц и обмена кинетической энергией между ними.

В связи с тем, что для неэлектропроводных сред интенсивность конвективного переноса очень велика по сравнению с теплопроводностью, последняя (теплопроводность) при **ламинарном течении** играет заметную роль лишь в переносе тепла в направлении, поперечном течению потока.

Роль теплопроводности при конвективном теплообмене более значительна при движении электропроводных сред (например, жидких металлов). В этом случае теплопроводность существенно влияет и на перенос тепла в направлении движения жидкости.

При **турбулентном течении** основную роль в процессе переноса тепла поперек потока играет пульсационное перемещение турбулентных вихрей поперек течения жидкости.

Участие теплопроводности в процессах конвективного теплообмена приводит к тому, что на эти процессы оказывают существенное влияние теплофизические свойства среды: коэффициент теплопроводности, теплоёмкость, плотность.

В связи с тем, что в процессах конвективного теплообмена главную роль играет конвективный перенос, эти процессы в значительной мере зависят от характера движения жидкости, то есть от значения и направления скорости течения теплоносителя, от распределения скоростей в потоке, от режима движения жидкости (ламинарное течение либо турбулентное). При больших (сверхзвуковых) скоростях движения газа на процессы конвективного теплообмена начинает влиять распределение давления в потоке.

На практике встречаются случаи, когда приходится учитывать как вынужденную, так и свободную конвекцию. В этом случае употребляется термин **смешанная конвекция**.

Наиболее интересным с точки зрения технических приложений случаем конвективного теплообмена является *конвективная теплоотдача*.

**КОНВЕКТИВНАЯ ТЕПЛООТДАЧА** – перенос тепла между некоторой выделенной поверхностью и движущейся относительно её (поверхности) текущей средой (жидкостью, газом).

В качестве выделенной поверхности теплообмена обычно рассматривается поверхность твёрдого тела, но это может быть и граница раздела фаз или различных жидкостей.

Задача расчёта состоит в нахождении плотности теплового потока на границе раздела фаз, то есть величины, показывающей, какое количество тепла получает или отдает единица поверхности раздела фаз за единицу времени.

Помимо указанных выше факторов, влияющих на процесс конвективного теплообмена, плотность теплового потока зависит также от формы и размеров тела, от степени шероховатости поверхности, а также от температур поверхности и теплоотдающей или тепловоспринимающей среды.



Различают два типа задач конвективного теплообмена.

**ТЕПЛООБМЕН  
ПРИ ТЕЧЕНИИ  
В КАНАЛАХ  
(ВНУТРЕННИЕ ЗАДАЧИ)**

теплообмен между стенками канала и потоком теплоносителя в нём.

**ТЕПЛООБМЕН  
ПРИ ВНЕШНЕМ  
ОБТЕКАНИИ ТЕЛ**

17

теплообмен между поверхностью и омывающим её снаружи потоком теплоносителя

Для характеристики интенсивности конвективного теплообмена используются

местный и средний

**коэффициенты теплоотдачи.**

# Местный теплоотдачи

# коэффициент

18

$$\alpha = \frac{q_c}{\Delta T_p}$$

$q_c$  – локальная плотность теплового  
потока на поверхности  
теплообмена

$\Delta T_p$  – расчётный температурный  
напор

В задачах теплообмена при внешнем обтекании тел<sup>19</sup>

$$\Delta T_p = \Delta T_{init} = |T_{wall} - T_{initial}|$$

$\Delta T_{init}$  – начальный температурный напор

$T_{wall}$  – температура стенки

$T_{initial}$  – начальная температура – температура набегающего потока теплоносителя вдали от поверхности

В задачах теплообмена при течении в каналах

$$\Delta T_p = \Delta T_M = |T_{wall} - T_{cross}|$$

$\Delta T_M$  – местный температурный напор

$T_{wall}$  – температура стенки

$T_{cross}$  – средняя калориметрическая (среднемассовая) температура теплоносителя в рассматриваемом сечении канала

$$\bar{T}_{\text{cross}} = \bar{T}_{\text{cross}}(\bar{i}_{\text{cross}}) \quad .$$

Здесь  $\bar{i}_{\text{cross}}$  – среднemasсовая энтальпия, определяемая следующим образом:

$$\bar{i}_{\text{cross}} \equiv \frac{\int_{S_{\text{cross}}} \rho v_{\text{axial}} i \, dS}{\int_{S_{\text{cross}}} \rho v_{\text{axial}} \, dS} \quad ,$$

где  $\rho$  – плотность теплоносителя, кг/м<sup>3</sup>;  $i$  – удельная энтальпия теплоносителя, Дж/кг;  $v_{\text{axial}}$  – аксиальная (продольная) составляющая скорости теплоносителя, м/с;  $S_{\text{cross}}$  – площадь поперечного сечения потока теплоносителя, м<sup>2</sup>. Предполагается, что величины  $\rho$ ,  $i$  и  $w_{\text{axial}}$  могут изменяться в пределах поперечного сечения.

Для потока в канале с заданной тепловой нагрузкой, то есть с заданной плотностью теплового потока на внутренней стороне стенки канала (например – трубы), локальное значение средней по сечению калориметрической (среднемассовой) температуры теплоносителя можно определить из уравнения теплового баланса:

$$\bar{T}_{\text{cross}} = \bar{T}_{\text{input}} \pm \int_L \frac{q_{\text{wall}} \Pi}{c_{p\text{cool}} G_{\text{cool}}} dz \quad ,$$

где  $\bar{T}_{input}$  – усреднённая по сечению температура теплоносителя на входе в канал (трубу), К;  $q_{wall}$  – плотность теплового потока на внутренней поверхности стенки канала (одинаковая для всех точек периметра поперечного сечения), Вт/м<sup>2</sup>;  $\Pi$  – периметр поперечного сечения, м;  $c_{p,cool}$  – удельная изобарная теплоёмкость теплоносителя, Дж/(кг·К);  $G_{cool}$  – массовый расход теплоносителя через сечение, кг/с;  $L$  – длина канала, м;  $Z$  – аксиальная координата, м. Массовый расход теплоносителя через поперечное сечение определяется следующим образом:

$$G \equiv \rho v_{axial} S_{cross} \quad .$$

Знак «+» выбирается в том случае, если теплоноситель нагревается (принимает тепло от стенок канала); «-» – если теплоноситель охлаждается (отдаёт тепло стенке канала).

На практике широко применяется *средний по поверхности коэффициент теплоотдачи*, который можно определить следующим образом:

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{Q_{\text{surface}}}{S_{\text{surface}} \overline{\Delta T}} \equiv \frac{q_{\text{surface}}}{\overline{\Delta T}_p} ,$$

где  $Q_{\text{surface}}$  – тепловой поток через поверхность теплообмена, Вт;  $S_{\text{surface}}$  – площадь поверхности теплообмена, м<sup>2</sup>.



При вычислении  $\bar{\alpha}$  можно использовать следующие средние температурные напоры.

Начальный:

$$\overline{\Delta T_p} = \overline{\Delta T_{\text{initial}}} \equiv \left| \overline{T_{\text{wall}}} - T_{\text{initial}} \right| ,$$

$\overline{T_{\text{wall}}}$  – средняя температура стенки, К.

Арифметический:

$$\overline{\Delta T_p} = \overline{\Delta T_a} \equiv \left| \overline{T_{\text{wall}}} - \frac{\overline{T_{\text{input}}} + \overline{T_{\text{output}}}}{2} \right| ,$$

$\overline{T_{\text{input}}}$  – среднемассовая температура на входе в теплообменную систему, К;  $\overline{T_{\text{output}}}$  – среднемассовая (калориметрическая) температура на выходе из теплообменной системы, К.

$$\overline{\Delta T}_p = \overline{\Delta T}_{\ln} \equiv \frac{\overline{\Delta T}_{\max} - \overline{\Delta T}_{\min}}{\ln\left(\frac{\overline{\Delta T}_{\max}}{\overline{\Delta T}_{\min}}\right)},$$

$$\overline{\Delta T}_{\max} \equiv \max(\overline{\Delta T}_{\text{input}}, \overline{\Delta T}_{\text{output}}),$$

$$\overline{\Delta T}_{\min} \equiv \min(\overline{\Delta T}_{\text{input}}, \overline{\Delta T}_{\text{output}}),$$

$$\overline{\Delta T}_{\text{input}} \equiv T_{\text{wall}} - \overline{T}_{\text{input}},$$

$$\overline{\Delta T}_{\text{output}} \equiv T_{\text{wall}} - \overline{T}_{\text{output}},$$

$T_{\text{wall}}$  – локальная температура стенки, К.

$$\overline{\Delta T_p} = \overline{\Delta T_{int}} \equiv \left| \frac{1}{L} \int_L (T_{wall} - \overline{T_z}) dz \right| ,$$

$\overline{T_z}$  – среднемассовая температура теплоносителя в поперечном сечении на расстоянии  $Z$  от входа в теплообменную систему, К;  $L$  – длина теплообменной системы (например – трубы), м.

Если  $\frac{\overline{\Delta T_{max}}}{\Delta T_{min}} < 2$ , в большинстве теплотехнических

расчётов вместо среднего логарифмического или средне интегрального температурного напора можно использовать средний арифметический температурный напор.

В зависимости от того, к какому температурному напору относят тепловой поток, различают и средние коэффициенты теплоотдачи: *средний начальный, средний арифметический, средний логарифмический и средний интегральный*, соответственно. Названные коэффициенты связаны между собой соотношением

$$\overline{\alpha_{\text{initial}}} \overline{\Delta T_{\text{initial}}} = \overline{\alpha_a} \overline{\Delta T_a} = \overline{\alpha_{\ln}} \overline{\Delta T_{\ln}} = \overline{\alpha_{\text{int}}} \overline{\Delta T_{\text{int}}} = \overline{q_{\text{wall}}} \quad .$$

В общем случае коэффициент теплоотдачи является функцией

- формы обтекаемого тела,
- размеров обтекаемого тела,
- режима течения,
  - скорости теплоносителя,
  - температуры теплоносителя,
  - физических свойств теплоносителя,
  - направления теплового потока.

*Основной и наиболее трудной проблемой в расчётах процессов конвективной теплоотдачи является нахождение коэффициента теплоотдачи.*

Коэффициент теплоотдачи возрастает при увеличении скорости движения среды и при переходе от ламинарного режима движения к турбулентному в связи с интенсификацией конвективного переноса.

Он также всегда больше для тех сред, у которых выше коэффициент теплопроводности.

Коэффициент теплоотдачи существенно повышается, если на поверхности происходит фазовый переход (например, испарение или конденсация), всегда сопровождающийся выделением (поглощением) скрытой теплоты.

На значение коэффициента теплоотдачи сильное влияние оказывает массообмен на поверхности.

Современные методы описания процесса конвективного теплообмена, основанные на теории пограничного слоя, позволяют получить теоретические (точные или приближённые) решения для некоторых достаточно простых ситуаций.

32

В большинстве же встречающихся на практике случаев коэффициент теплоотдачи определяют экспериментальным путём.

При этом как результаты теоретических решений, так и экспериментальные данные обрабатываются методами теории подобия и представляются обычно в следующем безразмерном виде:

$$\text{Nu} \equiv \text{Nu}(\text{Re}, \text{Pr}) \quad \text{— для } \textbf{вынужденной} \text{ конвекции,}$$

$$\text{Nu} \equiv \text{Nu}(\text{Gr}, \text{Pr}) \quad \text{— для } \textbf{свободной} \text{ конвекции.}$$

где  $\text{Nu}$ ,  $\text{Re}$ ,  $\text{Pr}$ ,  $\text{Gr}$  – критериальные числа Нуссельта, Рейнольдса, Прандтля и Грасгоффа, соответственно.



Критериальное число **РЕЙНОЛЬДСА** – критерий режима движения. Характеризует динамический режим потока, являясь мерой отношения действующих в потоке сил инерции и сил вязкого трения (молекулярного трения)

$$Re \equiv \frac{w L}{\nu} \equiv \frac{\rho w L}{\mu},$$

где  $w$  – скорость потока, м/с ;  
 $\rho$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup> ;  
 $L$  – характерный размер, м ;  
 $\mu$  – динамическая вязкость, Па·с ;  
 $\nu$  – кинематическая вязкость, м<sup>2</sup>/с .

$$\begin{aligned}
 \text{Re} &\equiv \frac{w L}{\nu} = \frac{\rho w^2}{\mu \frac{w}{L}} = \\
 &= \frac{\frac{\rho w^2}{2}}{\text{const} \cdot \mu \frac{w}{L}} = \frac{\frac{\rho w^2}{2}}{\text{const} \cdot \mu \frac{w}{L}} = \\
 &= \frac{\left[ \begin{array}{l} \text{динамический напор} \\ \text{(силы инерции)} \end{array} \right]}{\text{сила вязкого трения}} .
 \end{aligned}$$

**Рейнольдс**, Рейнолдс (Reynolds) Осборн (23.8.1842, Белфаст, — 21.2.1912, Уотчет, Сомерсетшир), английский физик и инженер, член Лондонского королевского общества (с 1877).

Окончил Кембриджский университет (1867). Профессор Манчестерского университета (1868).

С 1888 возглавил Витвортовскую инженерную лабораторию. Основные труды по теории динамического подобия течений вязкой жидкости, по теории турбулентности и теории смазки.

В 1876—83 экспериментально установил критерий перехода ламинарного течения в цилиндрических трубах в турбулентное.

Предложил дифференциальные уравнения для осреднённого движения жидкости, учитывающие дополнительные напряжения (турбулентные напряжения).

Внёс большой вклад в развитие гидродинамической теории смазки. Исследовал также явление кавитации на лопасти вращающегося винта, атмосферную рефракцию звука, групповую скорость распространения волн на свободной поверхности воды, теплопередачу от твёрдых стенок к жидкости и т. д.

$$\text{Gr} \equiv \frac{g L^3 \beta \Delta T}{\nu^2}$$

является мерой отношения сил инертно-гравитационной конвекции и сил вязкого трения.

$g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м/с}^2$ ;

$\beta$  – коэффициент объёмного расширения,  $\text{К}^{-1}$ ;

$\Delta T$  – разность температур,  $\text{К}$ ;

$\nu$  – кинематический коэффициент вязкости,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;

$L$  – характерный размер,  $\text{м}$ .

## Критериальное число *Прандтля*

$$Pr \equiv \frac{\nu}{a}$$

является мерой подобия температурных и скоростных полей в потоке теплоносителя.

При  $Pr=1$  и  $Pr_{,\alpha}=0$  поля температур и скоростей подобны.

$\nu$  – кинематический коэффициент вязкости,  $m^2/s$ .

$a$  – коэффициент температуропроводности,  $m^2/s$ .

**Число Прандтля** — физическая характеристика среды и зависит только от её термодинамического состояния.

У газов число Прандтля с изменением температуры практически не изменяется:

для двухатомных газов  $Pr \approx 0.72$

38

для трёх- и многоатомных  $Pr \in [0.12, 1.0]$  .

У неметаллических жидкостей число Прандтля изменяется с изменением температуры тем значительнее, чем больше вязкость жидкости.

Для воды

при  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$   $Pr = 13.5$  , а при  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$   $Pr = 1.74$  .

Для трансформаторного масла

при  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$   $Pr = 866.0$  , а при  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$   $Pr = 43.9$  .

У жидких металлов  $Pr \ll 1$ .

и не так сильно изменяется с температурой.

Для натрия при 100 °С	$Pr = 0.0115$
при 700 °С	$Pr = 0.0039$ .

Число Прандтля связано с другими критериями подобия — числом Пекле и числом Рейнольдса соотношением

$$Pr = \frac{Pe}{Re} .$$

**Прандтль (Prandtl)** Людвиг (4.2.1875, Фрейзинг, Бавария, — 15.8.1953, Гёттинген), немецкий учёный в области механики, один из основателей экспериментальной аэродинамики. 40

Окончил Высшее политехническое училище в Мюнхене. Профессор Высшего технического училища в Ганновере (с 1901), Гёттингенского университета (с 1904), директор института гидроаэродинамики кайзера Вильгельма в Гёттингене (1925—47).

Основные труды по теории упругости и пластичности, гидроаэромеханике, газовой динамике и динамической метеорологии. В 1904 ввёл представление о пограничном слое и объяснил сопротивление формы при обтекании тела отрывом пограничного слоя.

Создал теорию самолётного крыла конечного размаха, разработал методы упрощённого решения соответствующих уравнений, исследовал крыло с наивыгоднейшим распределением циркуляций, рассмотрел случай нестационарного решения (совместно с Бирнбаумом), ввёл чёткое понятие индуцированного сопротивления, дал формулу для его определения и т.д.

Изучал турбулентное течение в трубах, турбулентность свободной атмосферы, переход от ламинарного течения к турбулентному, исследовал сверхзвуковое истечение газов и паров под давлением и разработал линеаризованную теорию крыла в дозвуковом потоке сжимаемого газа. Именем Прандтля названы уравнения, понятия, приборы.

Основал школу в прикладной гидроаэромеханике.



Критериальное число **Нуссельта** –

$$\text{Nu} \equiv \frac{\alpha \cdot L}{\lambda_{\text{fluid}}}$$

«безразмерный коэффициент теплоотдачи».

*Является мерой отношения характерного размера  $L$  и толщины теплового пограничного слоя  $\delta_T$*

характеризует связь между интенсивностью теплоотдачи и температурным полем в пограничном слое.

$\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,  **$\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$** ;

$\lambda_{\text{fluid}}$  – коэффициент теплопроводности жидкости,  **$\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$** ;

$L$  – характерный размер,  **$\text{м}$** .

На границе с обтекаемым телом скорость жидкости равна нулю. Следовательно, тепловой поток в пристенном слое обусловлен только теплопроводностью

42

$$\mathbf{q} = -\lambda_{\text{fluid}} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right)_{\text{wall}} .$$

$\left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right)_{\text{wall}}$  – градиент температуры в тонком пристенном слое .

С другой стороны  
 $\mathbf{q} = \alpha (T_{\text{wall}} - T_{\text{fluid}}) = \alpha \Delta T$  .

Имеем

$$\alpha \Delta T = -\lambda_{\text{fluid}} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right)_{\text{wall}} .$$

Определим безразмерный тепловой напор :

$$\mathfrak{g} = \frac{\Delta T}{\Delta T_0} .$$

Можем записать

$$\text{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda} = \left( \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \xi_n} \right)_{\text{wall}} .$$

Критериальное число **Пекле** –

$$Pe \equiv \frac{w \cdot L}{a} .$$

Критерий теплового подобия.

*Является мерой отношения конвективного и кондуктивного (обусловленного теплопроводностью, то есть молекулярного) теплопереноса.*

Характеризует связь между интенсивностью теплоотдачи и температурным полем в пограничном слое.

$w$  – скорость теплоносителя, *м/с*;

$a$  – коэффициент температуропроводности жидкости, *м<sup>2</sup>/с*;

$L$  – характерный размер, *м*.

$$Pe = \frac{w L}{a} = \left| a \equiv \frac{\lambda}{c_p \rho} \right| = \frac{w c_p \rho L}{\lambda} = \frac{c_p \rho w}{\lambda / L} .$$

$(c_p \rho w)_{wall}$  – изменение теплосодержания потока  
в осевом направлении при изменении температуры на 1К .

$\lambda / L$  – тепловой поток обусловленный теплопроводностью при  $\Delta T = 1K$  .

Критериальное число **Стантона** –

$$St \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p w} .$$

*Является мерой отношения конвективного теплообмена «стенка–поток» и конвективного уноса тепла потоком теплоносителя.*

$\alpha$  – коэффициент теплоотдачи, *Вт/(м<sup>2</sup>·К)*;

$w$  – скорость теплоносителя, *м/с*;

$\rho$  – плотность теплоносителя, *кг/м<sup>3</sup>*;

$c_p$  – удельная теплоёмкость теплоносителя, *Дж/(кг·К)*.

Критериальное число **ФРУДА** – критерий гравитационного подобия. Является мерой отношения действующих в однородном потоке сил инерции и тяжести:

$$Fr \equiv \frac{w^2}{g L} \quad , \quad 45$$

где  $w$  – скорость потока,  $м/с$ ;  $g$  – ускорение свободного падения,  $м/с^2$ ;  $L$  – характерный размер,  $м$ .

$$\begin{aligned}
 Fr &\equiv \frac{w^2}{g L} = \frac{\rho w^2}{\rho g L} = \\
 &= \text{const} \frac{\rho \frac{w^2}{2}}{\rho g L} = \\
 &= \frac{\left[ \begin{array}{l} \text{динамический напор потока} \\ \text{(его кинетическая энергия)} \end{array} \right]}{\text{сила тяжести}} .
 \end{aligned}$$

Критериальное число **ГАЛЛИЛЕЯ** – критерий подобия полей свободного течения. Является мерой отношения сил тяжести и сил вязкого трения (молекулярного трения) в потоке. В форме критерия Архимеда, характеризует взаимодействие сил молекулярного трения и подъёмной силы, обусловленной разностью плотностей в изотермическом потоке. В форме критерия Грасгоффа – неизотермического.

$$\text{Ga} \equiv \frac{g L^3}{\nu^2} ,$$

где  $L$  – характерный размер,  $m$ ;  $g$  – ускорение свободного падения,  $m/c^2$ ;  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $m^2/c$ .

$$\text{Ga} = \frac{\text{Re}^2}{\text{Fr}} .$$

Критериальное число **АРХИМЕДА** – характеризует взаимодействие сил молекулярного трения и подъёмной силы, обусловленной разностью плотностей в изотермическом потоке. Является мерой отношения подъёмной силы, обусловленной разностью плотностей и силы вязкого трения:

$$\text{Ar} \equiv \frac{g L^3}{\nu^2} \cdot \frac{\rho - \rho_0}{\rho} ,$$

где  $L$  – характерный размер,  $m$ .

$$\text{Ga} = \text{Ar} \cdot \frac{\rho - \rho_0}{\rho} , \quad \text{Ar} = \text{Ga} \frac{\rho}{\rho - \rho_0} .$$

Критериальное число **Рэля** –

$$Ra \equiv \frac{gL^3 \beta \Delta T}{\nu a}$$

является мерой отношения подъёмных сил, обусловленных градиентом плотности, и сил вязкости .

$g$  – ускорение свободного падения,  $m/c^2$ ;

$\beta$  – коэффициент объёмного расширения,  $K^{-1}$ ;

$\Delta T$  – разность температур,  $K$ ;

$\nu$  – кинематический коэффициент вязкости,  $m^2/c$ ;

$L$  – характерный размер,  $m$ ;

$a$  – коэффициент температуропроводности,  $m^2/c$ .



**Рэлей**, Рейли (Rayleigh) Джон Уильям (12.11.1842, Лэнгфорд-Гров, графство Эссекс, — 30.6.1919, Тирлинг-Плейс, близ г. Уитем), английский физик, один из основоположников теории колебаний.

49

Член Лондонского королевского общества (1873).

Фамилия до получения титула лорда Рэля (1873) — Стретт (Strutt).

Окончил Кембриджский университет (1865); после смерти Дж. Максвелла (1879) стал профессором этого университета и директором Кавендишской лаборатории. С 1887 профессор Британского королевского института (Лондон).

Диапазон научных интересов Р. очень широк: акустика, теория колебаний, оптика, электричество и другие области физики. Р. исследовал акустические колебания (колебания струн, стержней, пластинок и др.).

В 1873 он сформулировал ряд фундаментальных теорем линейной теории колебаний, позволяющих делать качественные заключения о собственных частотах колебательных систем, и разработал количественный метод возмущений для нахождения собственных частот колебательной системы, мало отличающейся от простой системы с известными собственными частотами.

Рэлей впервые указал на специфичность нелинейных систем, способных совершать незатухающие колебания без периодического воздействия извне, и на особый характер этих колебаний (называемых впоследствии автоколебаниями). **50**

Он объяснил различие групповой и фазовой скоростей и получил формулу для групповой скорости (формула Рэлея).

Он рассмотрел также задачу сложения многих колебаний со случайными фазами и получил функцию распределения для результирующей амплитуды — так называемое распределение Рэлея.

Метод, разработанный при этом Рэлеем, надолго определил дальнейшее развитие теории случайных процессов.

В теории упругих волн Рэлей рассмотрел вопросы дифракции, рассеяния и поглощения волн, давление звука, исследовал волны конечной амплитуды и особый вид поверхностных волн (волны Рэлея).

Работы Рэля по теории колебаний систематизированы им в фундаментальном труде «Теория звука» (2 тт., 1877—78, 2 изд. 1894—96), в котором впервые отчётливо проявился единый подход к изучению колебательных и волновых процессов, имеющих различную природу. Эти идеи Рэля легли в основу современной теории колебаний.

51

В 1900 Рэлей вывел один из законов излучения абсолютно чёрного тела (закон Рэля-Джинса); эта работа имела большое значение для возникновения теории квантов.

Рэлей заложил основы теории молекулярного рассеяния света. Установив обратную пропорциональность интенсивности рассеянного света 4-й степени длины волны (закон Рэля), он объяснил голубой цвет неба.

В 1879 Р. создал теорию разрешающей способности оптических приборов.

В 1894 совместно с У. Рамзаем открыл аргон. Имя Рэля получили многие физические понятия, законы, приборы (диск Рэля, интерферометр Рэля, рэлеевское рассеяние света, закон Рэля намагничивания и др.).

Нобелевская премия (1904).

Критериальное число *Маха*

$$M \equiv \frac{V_{\text{fluid}}}{V_{\text{sound}}} .$$

Критерий газодинамического подобия. Является мерой отношения скорости жидкости (теплоносителя) и скорости распространения в нём упругих деформаций (скорости звука).

$V_{\text{fluid}}$  – скорость жидкости, *м/с*.

$V_{\text{sound}}$  – скорость звука, *м/с*.

Критериальное число **Эйлера** –

$$Eu \equiv \frac{\Delta P}{\rho w^2} .$$

Критерий подобия полей давления.

*Мера отношения силы давления и инерционной силы в потоке: отношение перепада давления и кинетической энергии потока.*

*Мера отношения перепада статического давления в потоке к динамическому напору потока –  $(\rho W^2/2)$ .*

$\Delta P$  – перепад давления, **Па**;

$\rho$  – плотность теплоносителя, **кг/м<sup>3</sup>**;

$w$  – скорость потока, **м/с**.

Это и есть искомое **дифференциальное уравнение сохранения импульса**, которое также называют **уравнением движения в напряжениях**, или **первым законом Коши**.

Учитывая определение субстанциональной производной, выражение (61) сформулируем в виде

54

$$\rho v^{\alpha}_{,t} + \rho v^{\alpha} v^{\beta}_{,\beta} = T^{\alpha\beta}_{,\beta} + \rho f^{\alpha} \quad (62)$$

Умножив уравнение неразрывности (55) скалярно на

вектор скорости  $v^{\beta}$  и сложив с (62), получим

$$\left(\rho v^{\alpha}\right)_{,t} + \left(\rho v^{\alpha} v^{\beta}\right)_{,\beta} = T^{\alpha\beta}_{,\beta} + \rho f^{\alpha} \quad (63)$$

Введем в рассмотрение

**тензор дополнительных напряжений**  $\tau^{\alpha\beta}$ ,

который зададим так:

$$\tau^{\alpha\beta} \equiv T^{\alpha\beta} + P I^{\alpha\beta}, \quad (64)$$

**Реологическое уравнение (реологический закон)** – уравнение, связывающее компоненты тензоров напряжений, деформаций и их производных по времени.

55

Производная по времени от тензора деформаций называется *тензором скоростей деформаций*.

Таким образом, *реологическое уравнение* – это уравнение связывающее *тензор напряжений* с *тензором скоростей деформаций*.

В зависимости от того, какое реологическое соотношение используется, принято выделять, как наиболее важные с методологической и практической точки зрения, следующие типы жидкостей:

- **идеальная жидкость,**
- **ньютоновская жидкость,**
- **сильно реологическая жидкость.**

# Идеальная жидкость

$$T^{\alpha\beta} \equiv \tau^{\alpha\beta} - P I^{\alpha\beta} \quad .$$

Идеальная жидкость – касательные напряжения отсутствуют :

$$\begin{aligned} \tau^{\alpha\beta} &\equiv 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow T^{\alpha\beta} &\equiv -P I^{\alpha\beta} \quad . \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение сохранения  
импульса (количества движения)  $\equiv$   
 $\equiv$  Уравнение движения в напряжениях  $\equiv$   
 $\equiv$  Первый закон Коши

$$\begin{aligned} &(\rho v^\alpha)_{,t} + (\rho v^\alpha v^\beta)_{,\beta} = - (P I^{\alpha\beta})_{,\beta} + \rho f^\alpha \quad . \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + (\rho \underline{v} \nabla) \underline{v} = - \nabla P + \rho \underline{f} \quad . \end{aligned}$$



$$\left(\rho v^\alpha\right)_{,t} + \left(\rho v^\alpha v^\beta\right)_{,\beta} = -\left(P I^{\alpha\beta}\right)_{,\beta} + \rho f^\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_{,t} v^\alpha + \rho v^\alpha_{,t} + \left(\rho v^\alpha\right)_{,\beta} v^\beta + \rho v^\alpha v^\beta_{,\beta} = \quad 57$$

$$= -\left(P I^{\alpha\beta}\right)_{,\beta} + \rho f^\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\rho_{,t} + \left(\rho v^\beta\right)_{,\beta}\right] v^\alpha + \rho v^\alpha_{,t} + \rho v^\beta v^\alpha_{,\beta} =$$

$$= -\left(P I^{\alpha\beta}\right)_{,\beta} + \rho f^\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho v^\alpha_{,t} + \rho v^\beta v^\alpha_{,\beta} = -\left(P I^{\alpha\beta}\right)_{,\beta} + \rho f^\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_{,\beta} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{жидкость несжимаемая} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^\alpha_{,t} + v^\beta v^\alpha_{,\beta} = -\left(\frac{P}{\rho} I^{\alpha\beta}\right)_{,\beta} + f^\alpha .$$

← уравнение Эйлера (1755 год) .

# Ньютоновская жидкость

58

*Ньютоновской жидкостью называется жидкость, для которой справедливо следующее утверждение: тензор дополнительных напряжений линейно пропорционален градиенту вектора скорости.*

$$\tau^{\alpha\beta} \equiv \mu \left[ \left( v^{\alpha}_{,\beta} + v^{\beta}_{,\alpha} \right) - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} v^{\gamma}_{,\gamma} \right] + \zeta \delta^{\alpha\beta} v^{\gamma}_{,\gamma} . \quad (*)$$

Соотношение (\*) называют обобщённым законом Ньютона для вязкой жидкости. Коэффициентом пропорциональности  $\mu$  определяет внутреннее трение или, иначе говоря, вязкость жидкости по Ньютону. Эту величину принято также называть **динамическим коэффициентом вязкости**. Второе слагаемое учитывает эффекты сжимаемости. Величину  $\zeta$  называют **второй вязкостью**. Если жидкость несжимаемая (а во многих случаях, в частности, при параметрах потока, характерных для задач реакторной теплофизики, и при рассмотрении жидкости как сжимаемой) вторым слагаемым пренебрегают. В этом случае тождество (\*) принимает вид (обобщённый закон Ньютона для несжимаемой жидкости)

$$\tau^{\alpha\beta} \equiv \mu \left[ \left( v^{\alpha}_{,\beta} + v^{\beta}_{,\alpha} \right) - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} v^{\gamma}_{,\gamma} \right] . \quad (**)$$

Тождество (\*) – реологическое уравнение ньютоновской жидкости.

Тождество (\*\*) – реологическое уравнение ньютоновской несжимаемой жидкости.

Коэффициентом пропорциональности является внутреннее трение или, иначе говоря, вязкость жидкости по Ньютону. Эту величину (обычно обозначают  $\mu$ ) принято называть **динамический коэффициент вязкости**.

Динамический коэффициент вязкости является функцией температуры:  $\mu = \mu(T)$ .

В реальных жидкостях при очень больших давлениях динамический коэффициент вязкости – функция температуры и давления:  $\mu = \mu(T, P)$ .

Размерность: в СИ –  $[\mu] = \text{Па} \cdot \text{с}$ ; в СГС –  $[\mu] = \text{пуаз}$ .  $1 \text{Па} \cdot \text{с} = 10 \text{Пуаз}$ .

Кинематический коэффициент вязкости – отношение динамического коэффициента вязкости к плотности:  $\nu = \mu / \rho$ .

Размерность: в СИ –  $[\nu] = \text{м}^2 / \text{с}$ ; в СГС –  $[\nu] = \text{стокс}$ .

Воспользовавшись тождеством (\*) преобразуем записанное в дивергентной форме дифференциальное уравнение сохранения количества движения к виду

$$\begin{aligned}
 & (\rho v^\alpha)_{,t} + (\rho v^\alpha v^\beta)_{,\beta} = \\
 & = -P_{,\alpha} + \left[ \mu (v^\alpha_{,\beta} + v^\beta_{,\alpha}) - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} \mu v^\gamma_{,\gamma} \right]_{,\beta} + (\zeta \delta^{\alpha\beta} v^\gamma_{,\gamma})_{,\beta} + \rho f^\alpha \quad . \quad (\nabla)
 \end{aligned}$$

Это так называемое **полное уравнение Навье-Стокса** – **уравнение движения** (синоним уравнение сохранения количества движения) **ньютоновской сжимаемой жидкости**.

Воспользовавшись тождеством (\*\*) преобразуем записанное в дивергентной форме дифференциальное уравнение сохранения количества движения к виду

61

$$\begin{aligned} & (\rho v^\alpha)_{,t} + (\rho v^\alpha v^\beta)_{,\beta} = \\ & = -P_{,\alpha} + \left[ \mu (v^\alpha_{,\beta} + v^\beta_{,\alpha}) - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} \mu v^\gamma_{,\gamma} \right]_{,\beta} + \rho f^\alpha \quad . \end{aligned} \quad (\nabla \nabla)$$

Это так называемое **уравнение Навье-Стокса** – **уравнение движения** (синоним уравнение сохранения количества движения) **ньютоновской несжимаемой жидкости**.

Для стационарного движения ( $\nabla \nabla$ ) принимает вид

$$(\rho v^\alpha v^\beta)_{,\beta} = -P_{,\alpha} + \left[ \mu (v^\alpha_{,\beta} + v^\beta_{,\alpha}) - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} \mu v^\gamma_{,\gamma} \right]_{,\beta} + \rho f^\alpha \quad . \quad (\nabla \nabla \nabla)$$

Перейдя от субстанциональной производной к частным производным и использовав уравнение неразрывности (55), получим **дивергентный вид дифференциального уравнения сохранения энергии в терминах энтальпии**

$$\begin{aligned}
 & (\rho \iota)_{,t} + (\rho \iota v^\alpha)_{,\alpha} = \\
 & = -q^\alpha_{,\alpha} + P_{,t} + P_{,\alpha} v^\alpha + \tau^{\alpha\beta} v^\beta_{,\alpha} + \rho Q \quad .
 \end{aligned}
 \tag{85}$$

$$\begin{aligned}
 & (\rho \iota)_{,t} + (\rho \iota v^\alpha)_{,\alpha} = \\
 & = -q^{\alpha}_{,\alpha} + P_{,t} + P_{,\alpha} v^\alpha + \rho Q + \Phi \quad .
 \end{aligned}$$

**$\Phi$  – диссипативная функция:**

$$\Phi \equiv \left\{ \begin{array}{c} \tau^{*\alpha\beta} \\ \tau^{\alpha\beta} \end{array} \right\} \cdot v^{\beta}_{,\alpha} \quad .$$

$$\Phi \Big|_{\tau^*} \equiv \left\{ \mu \left[ \left( v^{\alpha}_{,\beta} + v^{\beta}_{,\alpha} \right) - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} v^{\gamma}_{,\gamma} \right] + \zeta \delta^{\alpha\beta} v^{\gamma}_{,\gamma} \right\} \cdot v^{\beta}_{,\alpha} \quad .$$

$$\Phi \Big|_{\tau} = \mu \left[ \left( v^{\alpha}_{,\beta} + v^{\beta}_{,\alpha} \right) - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} v^{\gamma}_{,\gamma} \right] \cdot v^{\beta}_{,\alpha} \quad .$$

**Всегда  $\Phi > 0$ .** Следовательно, всегда часть тепла диссипирует.

# Понятие турбулентности



Турбулентные вихри. Рисунок Леонардо да Винчи



Хинце И.О., Турбулентность, пер. с англ., М., 1963.

Монин А.С., Яглом А.М., Статистическая гидромеханика,

ч. 1, М., 1965,

ч. 2, М., 1967.

**Ламинарное течение** (от лат. *lamina* — пластинка), упорядоченное течение жидкости или газа, при котором жидкость (газ) перемещается как бы слоями, параллельными направлению течения.

Ламинарные течения наблюдаются или у очень вязких жидкостей, или при течениях, происходящих с достаточно малыми скоростями, а также при медленном обтекании жидкостью тел малых размеров.

В частности, ламинарные течения имеют место в узких (капиллярных) трубках, в слое смазки в подшипниках, в тонком пограничном слое, который образуется вблизи поверхности тел при обтекании их жидкостью или газом, и др.

С увеличением скорости движения данной жидкости ламинарное течение может в некоторый момент перейти в неупорядоченное турбулентное течение.

При этом резко изменяется сила сопротивления движению.

**Режим течения жидкости характеризуется числом Рейнольдса.**

Когда значение меньше некоторого критического числа  $RE_{кр}$ , имеет место ламинарное течение жидкости.

Если  $RE \geq RE_{кр}$ , режим течения может стать турбулентным.

Значение зависит от вида рассматриваемого течения.

Для течения в круглых трубах (если характерной скоростью считать среднюю по сечению скорость, а характерным размером – диаметр трубы)  $Re_{кр} = 2200$ .

При  $Re < 2200$  течение жидкости в трубе будет ламинарным.

Расход жидкости при ламинарном течении в трубе определяется законом Пуазейля.

Наш мир устроен таким образом, что большинство течений, интересных с практической точки зрения, являются турбулентными. 68

Рассмотрим, например, воздух. Вязкость  $\nu=1.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ .  
Переход от ламинарного режима течения к турбулентному осуществляется, в зависимости от типа течения, при числе Рейнольдса  $Re=UL/\nu \sim 10^2 \div 10^5$ .

Это означает, что переход происходит при произведении линейного масштаба на скоростной  $UL \sim 10^{-3} \div 10^0 \text{ м}^2/\text{с}$ , что весьма немного.

*С физической точки зрения, причиной возникновения турбулентности является неустойчивость того или иного рода, возникающая в рассматриваемом течении (например, след за цилиндром или тепловая неустойчивость).*

Следует отметить, что во многих случаях появлению турбулентности предшествует появление упорядоченных нестационарных структур.

С математической точки зрения появление турбулентности (как решения уравнения Навье-Стокса), как правило, обусловлено доминированием дестабилизирующих конвективных членов над стабилизирующими вязкими членами в уравнении баланса импульса. В результате этого, уравнения Навье-Стокса, описывающие течения жидкости и газа, теряют устойчивость. При этом происходит лавинообразное накопление возмущений определенного вида.

С третьей стороны, процесс потери устойчивости можно рассматривать как проявление второго начала термодинамики: природа не терпит слишком «упорядоченных» течений.

Потеря устойчивости ламинарным потоком – явление довольно тонкое, зависящее от большого количества внешних факторов, таких как уровень турбулентности внешнего потока, градиентов температур или давления, вдува-отсоса и т. п. (примеры: пограничный слой при наличии градиента давления, струя с внешним возмущением).

70

Следует отметить, что при потере устойчивости колебания только начинают развиваться, полностью турбулентным течение становится гораздо позже (ниже по потоку), когда амплитуды пульсаций достигнут определенного уровня.

Нелинейность газодинамических систем (с физической точки зрения) и описывающих их уравнений Навье-Стокса (с математической точки зрения) приводит к тому, что амплитуда возмущений оказывается ограниченной.

Когда амплитуда возмущений достигает насыщения, часто говорят, что течение стало «развитым турбулентным».

**Турбулентность** – явление, наблюдаемое во многих течениях жидкостей и газов и заключающееся в том, что в этих течениях образуются многочисленые вихри различных размеров, вследствие чего их гидродинамические и термодинамические характеристики (скорость, температура, давление, плотность) испытывают хаотические флуктуации и потому изменяются от точки к точке и во времени нерегулярно.

Этим турбулентные отличаются от ламинарных.

Большинство течений жидкостей и газов в природе (движение воздуха в земной атмосфере, воды в реках и морях, газа в атмосферах Солнца и звёзд и в межзвёздных туманностях и т.п.) и в технических устройствах (в трубах, каналах, струях, в пограничных слоях около движущихся в жидкости или газе твёрдых тел, в следах за такими телами и т.п.) оказываются турбулентными.

Благодаря большой интенсивности турбулентного перемешивания турбулентные течения обладают повышенной способностью к передаче количества движения (импульса).

А потому к повышенному силовому воздействию на обтекаемые твёрдые тела), передаче тепла, ускоренному распространению химических реакций (в частности, горения), способностью нести и передавать взвешенные частицы, рассеивать звуковые и электромагнитные волны и создавать флуктуации их амплитуд и фаз, а в случае электропроводной жидкости – генерировать флуктуирующее магнитное поле и т.д.



Турбулентность возникает вследствие гидродинамической неустойчивости ламинарного течения, которое теряет устойчивость и превращается в турбулентное, когда так число Рейнольдса превзойдёт некоторое критическое значение. По экспериментальным данным, в прямых круглых трубах при наибольшей возможной степени возмущённости течения у входа в трубу критическое число Рейнольдса равно 2300.

Уменьшая степень начальной возмущённости течения, можно добиться затягивания ламинарного режима до значительно больших значений числа Рейнольдса. В трубах до 50 000.

Возникновение турбулентности при обтекании твёрдых тел может проявляться не только в виде турбулизации пограничного слоя, но и в виде образования турбулентного следа за телом в результате отрыва пограничного слоя от его поверхности.

Турбулизация пограничного слоя до точки отрыва приводит к резкому уменьшению полного коэффициента сопротивления тела.

Турбулентность может возникнуть и вдали от твёрдых стенок, как при потере устойчивости поверхности разрыва скорости (например, образующейся при отрыве пограничного слоя или являющейся границей затопленной струи или поверхностью разрыва плотности), так и при потере устойчивости распределения плотностей слоев жидкости в поле тяжести, то есть при возникновении конвекции.

Критическое число Рэлея имеет значение около  $1100 \div 1700$ .

Вследствие чрезвычайной нерегулярности гидродинамических полей турбулентных течений применяется статистическое описание турбулентности: гидродинамические поля трактуются как случайные функции от точек пространства и времени, и изучаются распределения вероятностей для значений этих функций на конечных наборах таких точек.

75

Наибольший практический интерес представляют простейшие характеристики этих распределений: средние значения и вторые моменты гидродинамических полей, в том числе дисперсии компонент скорости; компоненты турбулентного потока количества движения (так называемое напряжения Рейнольдса) и турбулентного потока тепла.

Статистические моменты гидродинамических полей турбулентного потока должны удовлетворять некоторым уравнениям (вытекающим из уравнений гидродинамики), простейшие из которых — так называемые уравнения Рейнольдса, получаются непосредственным усреднением уравнений гидродинамики.

Однако точного решения их до сих пор не найдено, поэтому используются различные приближённые методы.

Основной вклад в передачу через турбулентную среду количества движения и тепла вносят **крупномасштабные компоненты турбулентности** (масштабы которых сравнимы с масштабами течения в целом); поэтому их описание — основа расчётов сопротивления и теплообмена при обтекании твёрдых тел жидкостью или газом. 76

Для этой цели построен ряд так называемых полуэмпирических теорий турбулентности, в которых используется аналогия между турбулентным и молекулярным переносом, вводятся понятия пути перемешивания, интенсивности турбулентности, коэффициента турбулентной вязкости и теплопроводности и принимаются гипотезы о наличии линейных соотношений между напряжениями Рейнольдса и средними скоростями деформации, турбулентным потоком тепла и средним градиентом температуры.

Такова, например, применяемая для плоскопараллельного усреднённого движения формула Буссинеска с коэффициентом турбулентного перемешивания (турбулентной вязкости), который, в отличие от коэффициента молекулярной вязкости, уже не является физической постоянной жидкости, а зависит от характера усреднённого движения.

Большую роль в полуэмпирических теориях играют гипотезы подобия.

В частности, они служат основой полуэмпирической теории Кармана.

А.Н. Колмогоров предложил использовать в полуэмпирических теориях гипотезу подобия, по которой характеристики турбулентности выражаются через её интенсивность и масштаб (например, скорость диссипации энергии  $\epsilon \sim b^3/l$ ).

Одним из важнейших достижений полуэмпирической теории турбулентности является установление универсального (по числу Рейнольдса, при больших  $Re$ ) логарифмического закона для профиля скорости в трубах, каналах и пограничном слое.

Мелкомасштабные компоненты турбулентности (масштабы которых малы по сравнению с масштабами течения в целом) вносят существенный вклад в ускорения жидких частиц и в определяемую ими способность турбулентного потока нести взвешенные частицы, в относительное рассеяние частиц и дробление капель в потоке, в перемешивание турбулентных жидкостей, в генерацию магнитного поля в электропроводной жидкости, в спектр неоднородностей электронной плотности в ионосфере, в флуктуации параметров электромагнитных волн, в болтанку летательных аппаратов и т.д.

Описание мелкомасштабных компонент турбулентности базируется на гипотезах Колмогорова, основанных на представлении о каскадном процессе передачи энергии от крупномасштабных ко всё более и более мелкомасштабным компонентам турбулентности. 79

Вследствие хаотичности и многокаскадности этого процесса при очень больших числах Рейнольдса режим мелкомасштабных компонент оказывается пространственно-однородным, изотропным и квазистационарным и определяется наличием среднего притока энергии от крупномасштабных компонент и равной ему средней диссипации энергии в области минимальных масштабов.

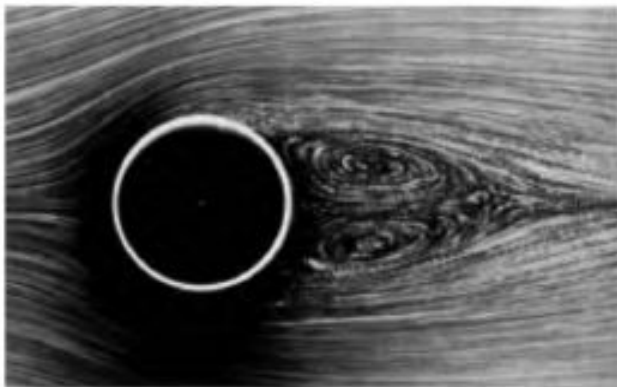
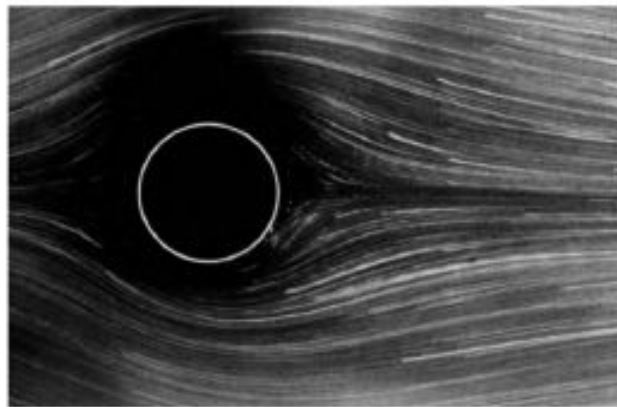
По первой гипотезе Колмогорова, статистические характеристики мелкомасштабных компонент определяются только двумя параметрами.

По второй гипотезе, при очень больших  $Re$  в мелкомасштабной области существует такой (так называемый инерционный) интервал масштабов, больших по сравнению с  $\eta$ , в котором параметр оказывается несущественным, так что в этом интервале характеристики турбулентности определяются только одним параметром.

# Что такое турбулентное течение?

Течения сплошной среды

Стационарные  
(не зависят от времени)



Нестационарные



Обтекание круглого цилиндра при  
числах Рейнольдса 10, 25 и 140



# Что такое турбулентное течение?

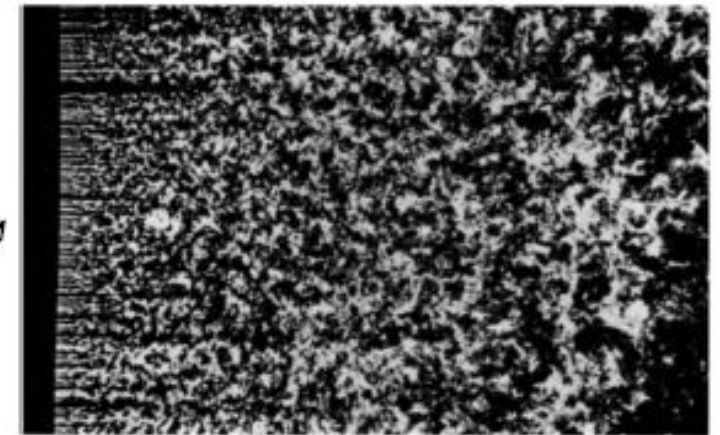
81

Нестационарные течения

Упорядоченные  
(можно заранее предсказать  
параметры потока в любой точке  
в любой момент времени)



Неупорядоченные



Волны на поверхности  
и течение за решеткой

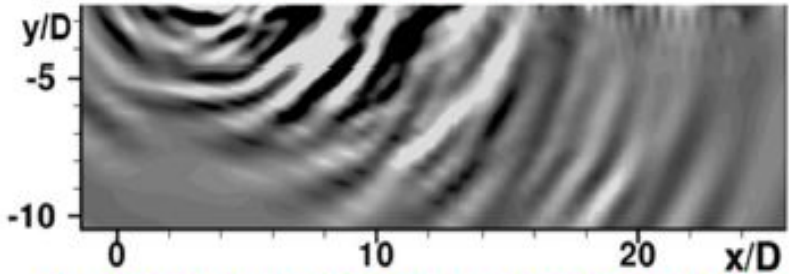
# Что такое турбулентное течение?

Неупорядоченные течения

Потенциальные  
(случайные волновые)

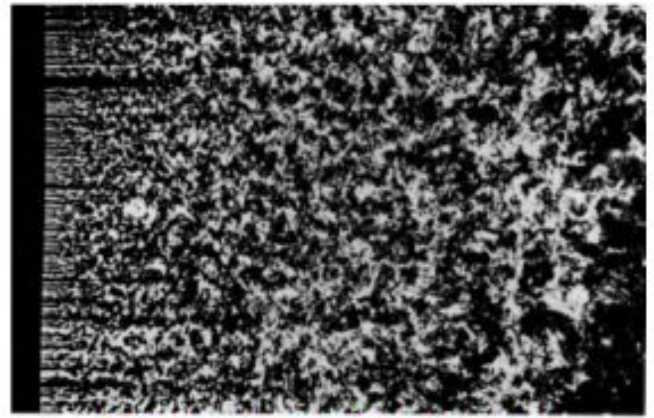


Волны на поверхности



Акустические волны в пространстве

Вязкие, вихревые  
(турбулентные)



Течение за решеткой

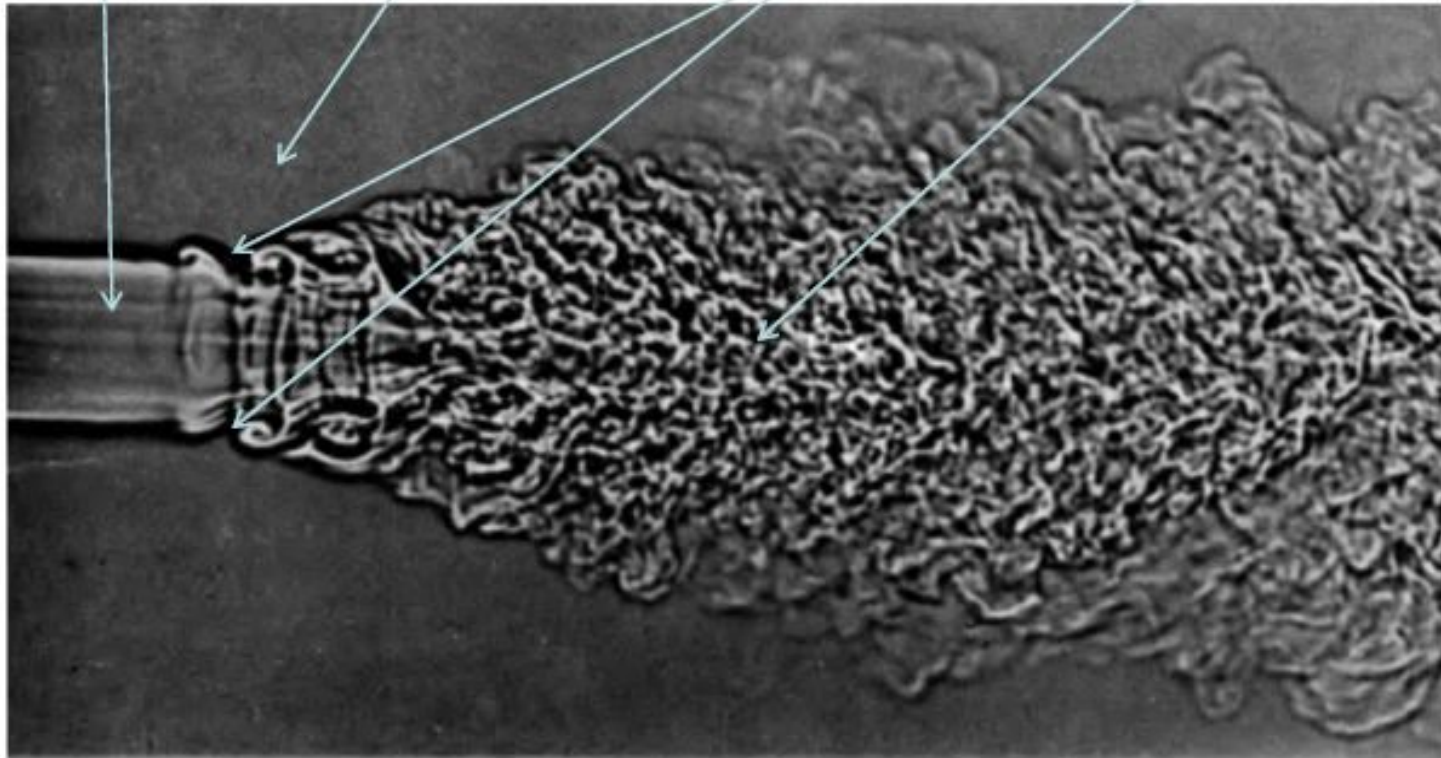


Пограничный слой на выпуклой поверхности

# Многие течения носят смешанный характер

83

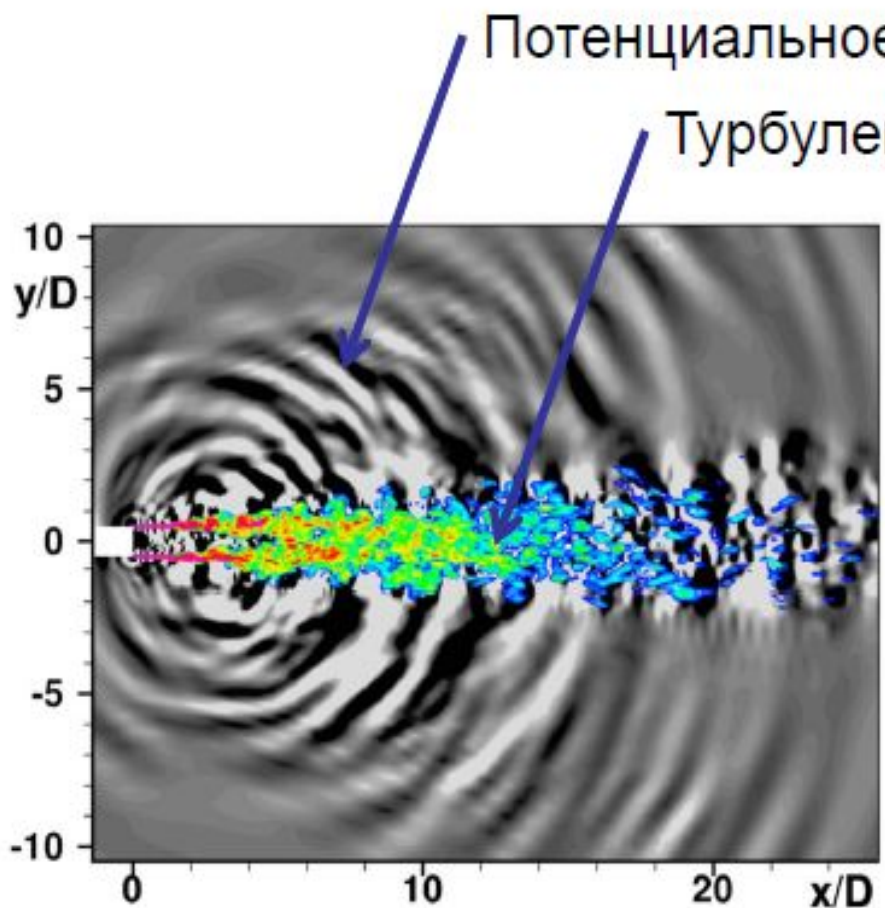
Неподвижная среда  
Турбулентное течение  
Ламинарное течение  
Упорядоченные вихри



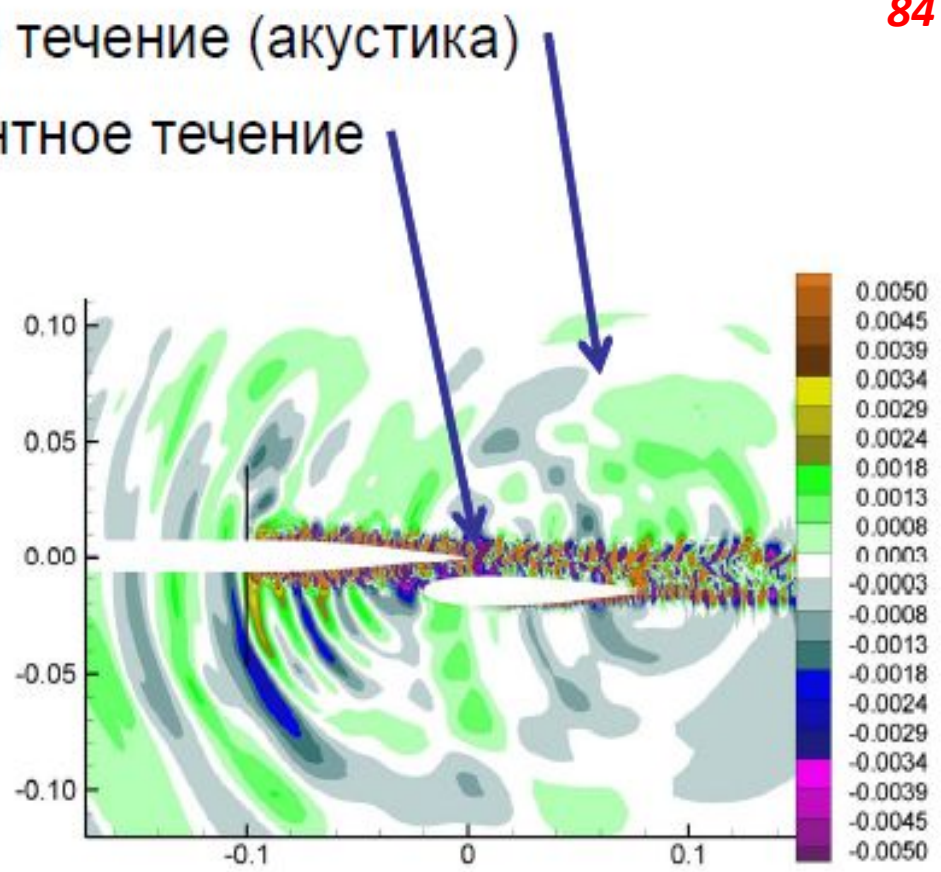
Течение в круглой затопленной струе

# Многие течения носят смешанный характер

84



Шум, возникающий при истечении круглой затопленной струи

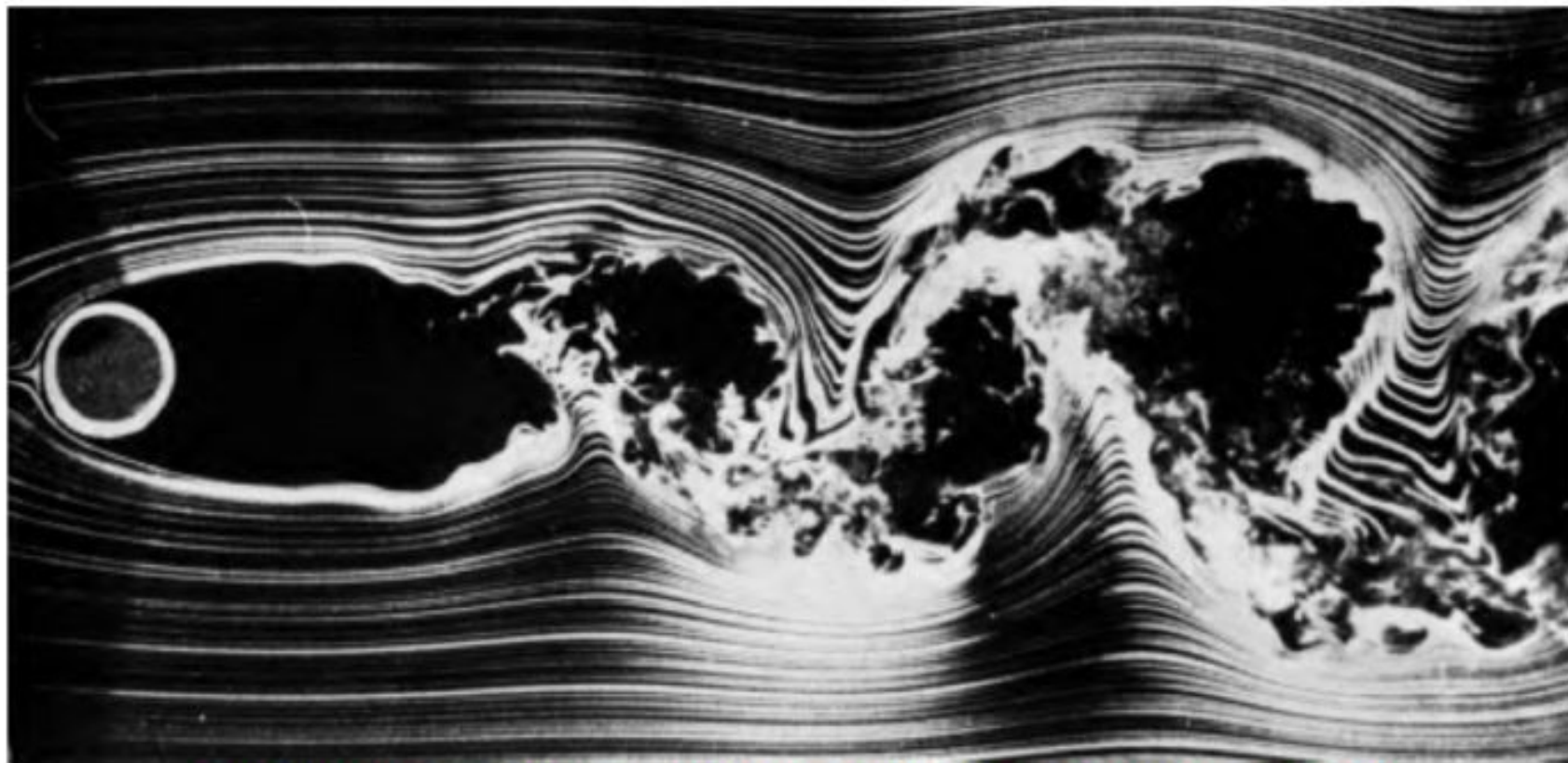


Шум от задней кромки крыла при наличии закрылка

# Когерентные структуры

Турбулентность возникает на фоне упорядоченного движения (дорожка Кармана)

- Крупные, относительно упорядоченные структуры называются **когерентными**
  - Характерны для большинства турбулентных течений



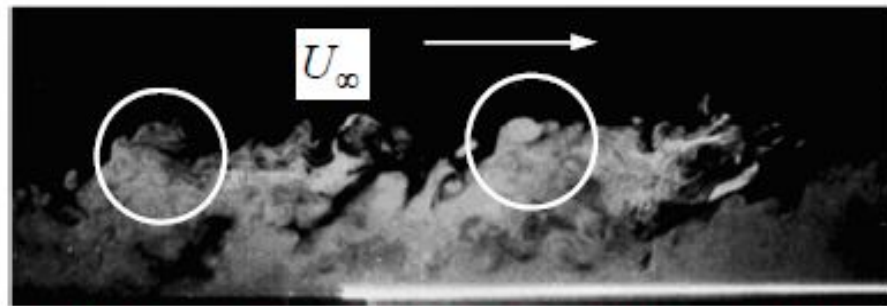
Обтекание круглого цилиндра при числе Рейнольдса  $10^4$

# Разнообразие турбулентных течений

86



Обтекание цилиндра



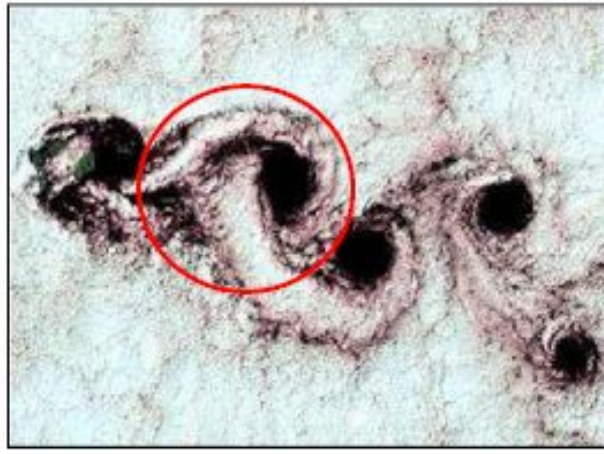
Пограничный слой на плоской стенке



Извержение  
вулкана



Затопленная  
струя



След за островом в океане



Галактические облака

Все эти турбулентные течения имеют общие свойства

- Трехмерный нестационарный характер
- Наличие в потоке как *крупных (когерентных)*, так и *очень мелких хаотичных структур*

# Различие между ламинарным и турбулентным потоками

В турбулентном потоке имеют место хаотические флуктуации (пульсации) основных газодинамических переменных: давления, температуры, плотности, скорости и т.д.



Пульсации (в первую очередь скорости) обеспечивают дополнительный перенос импульса, энергии и т.д.

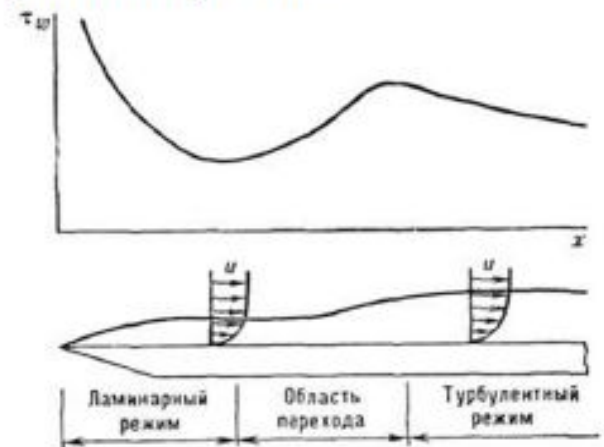
- Этот перенос намного превосходит молекулярный перенос



Происходит существенное изменение всех основных характеристик течения



При расчете нельзя игнорировать влияние турбулентности



Напряжение трения на стенке в пограничном слое

# Определение турбулентности

88

Все известные определения турбулентности отражают лишь часть свойств этого исключительно сложного физического явления

*Турбулентность – это трехмерное нестационарное движение жидкости, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение хаотических пульсаций параметров потока (скорости, давления и т.д.) в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения*

*П.Брэдшоу*

Турбулентность - это неупорядоченное движение, которое в общем случае возникает в жидкостях, газообразных или капельных средах, когда они обтекают непроницаемые поверхности или же когда соседние друг с другом потоки одной и той же жидкости следуют рядом или проникают один в другой.

Т. Карман

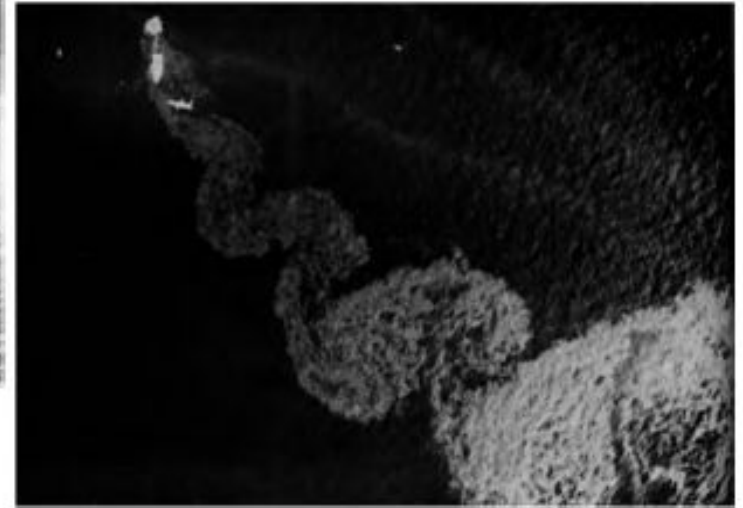
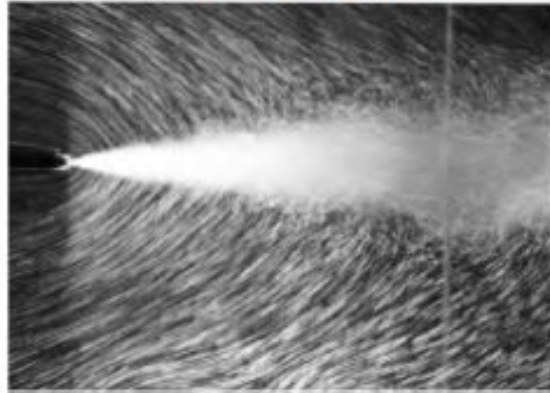
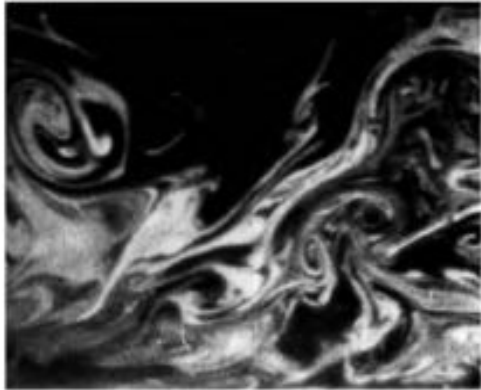
Турбулентное движение жидкости предполагает наличие неупорядоченного течения, в котором различные величины претерпевают хаотическое изменение во времени и по пространственным координатам и при этом могут быть выделены статистически точные их осредненные значения.

И. Хинце

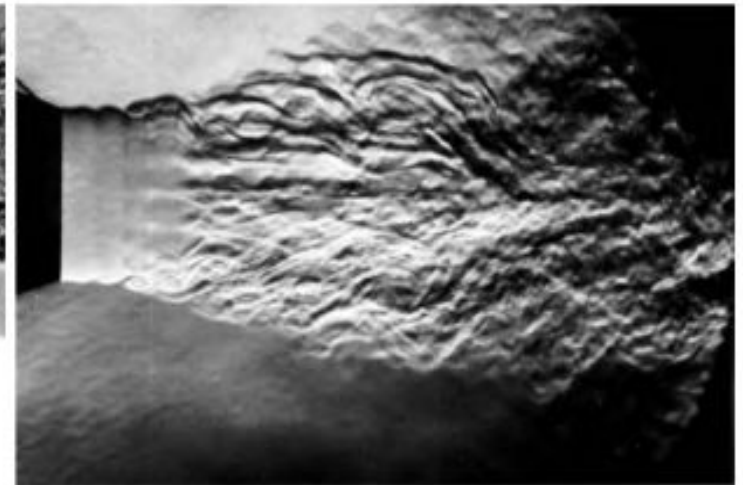
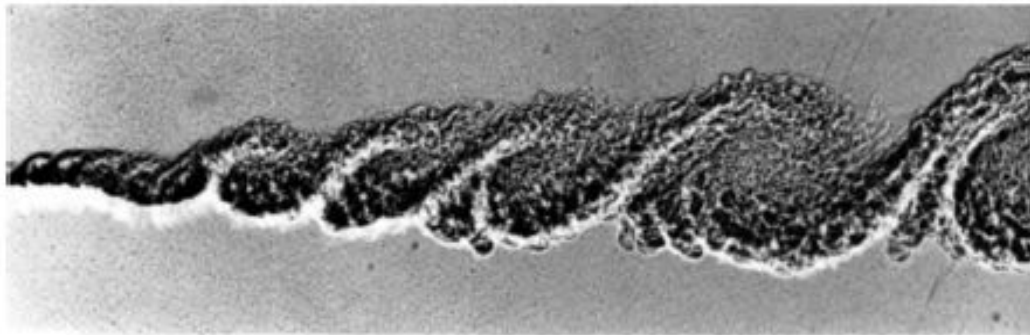


# Как определить характер течения?

## I. Визуально



Примеси (дым, туман, частицы)

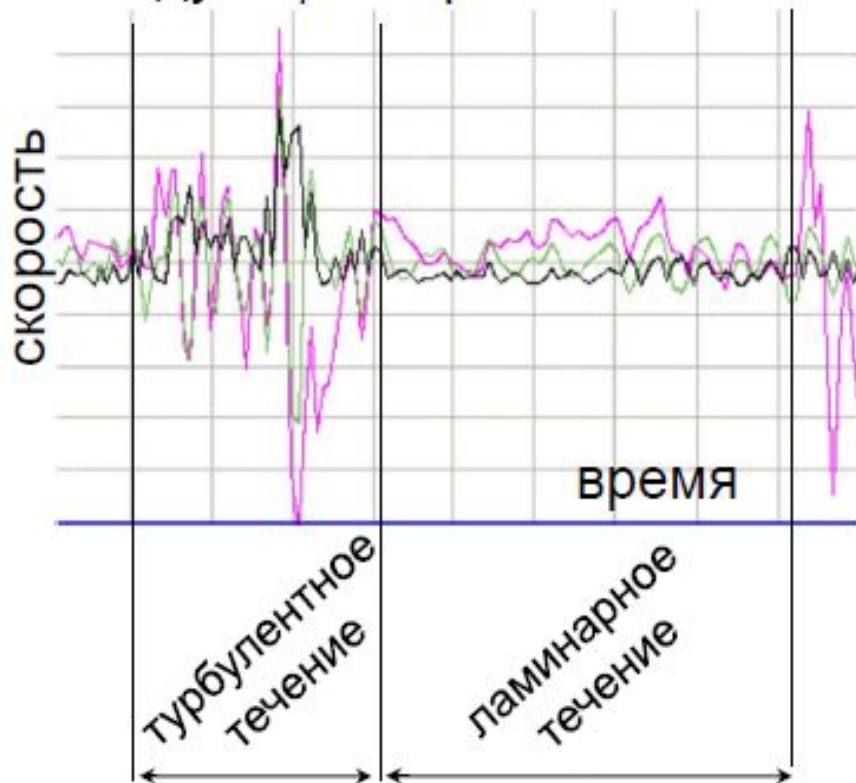


Теневые фотографии

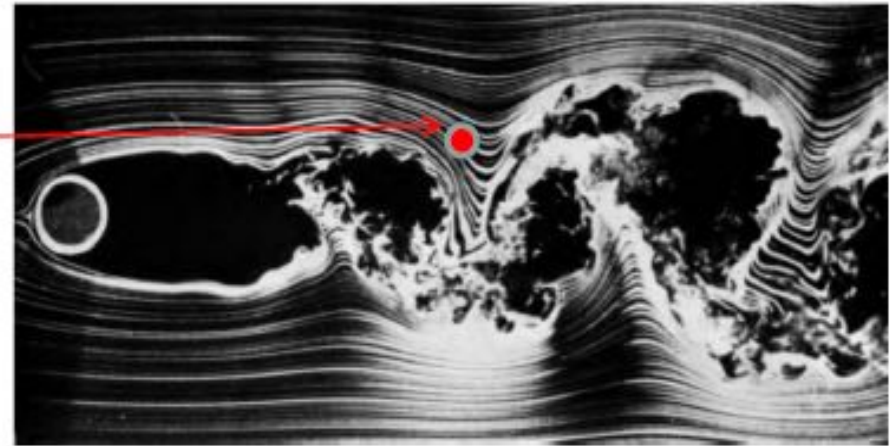
## II. При помощи измерений

# Переमेжаемость

Если провести измерения в точке потока за цилиндром то получится примерно следующая картина

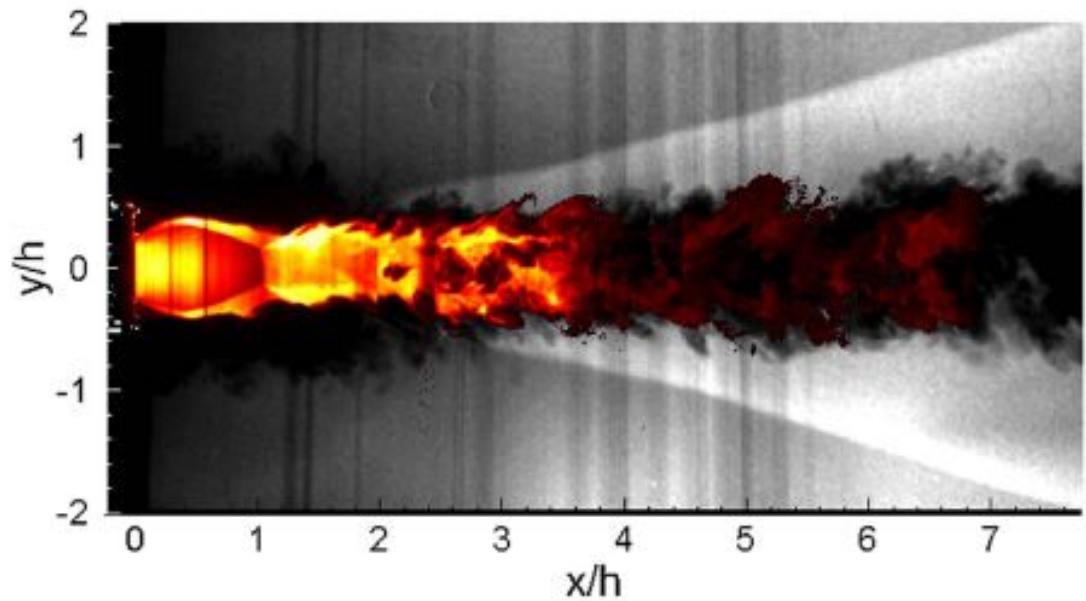
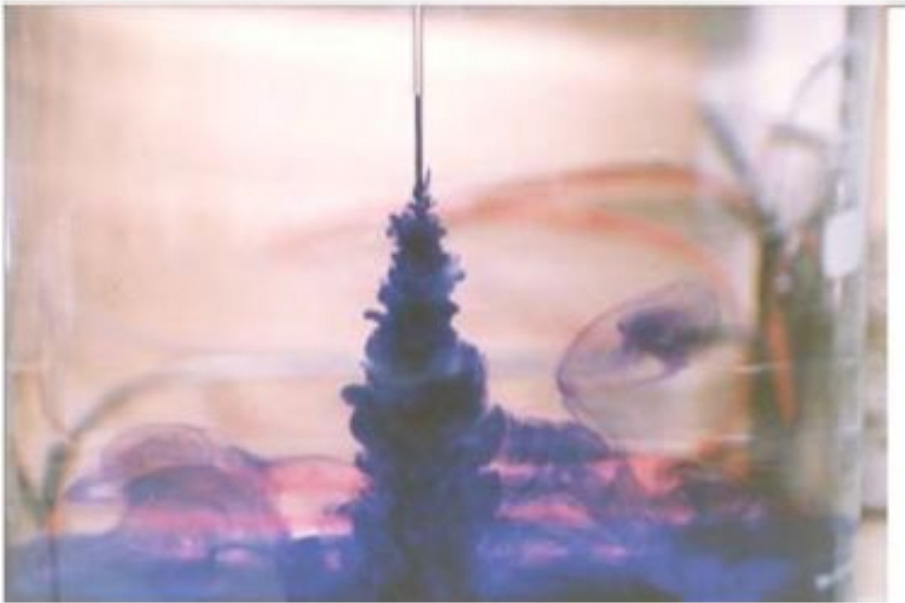


Величина  $\gamma = \frac{t_1}{t_2}$  называется коэффициентом перемежаемости



Явление чередования ламинарной и турбулентной форм движения называется перемежаемостью

# Переход к турбулентности



# Переход к турбулентности

При рассмотрении перехода можно задаваться разными вопросами:

- Почему происходит переход?
- Когда и как он происходит?
- Как его промоделировать при проведении расчетов?

**Первым вопросом** занимается теория динамического хаоса – один из разделов синергетики (науки о самоорганизации)

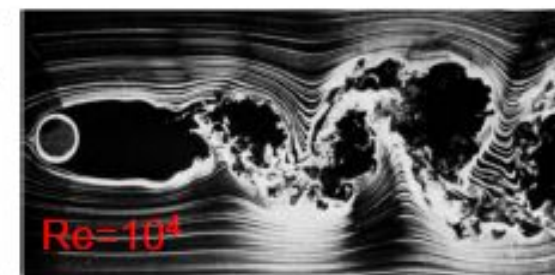
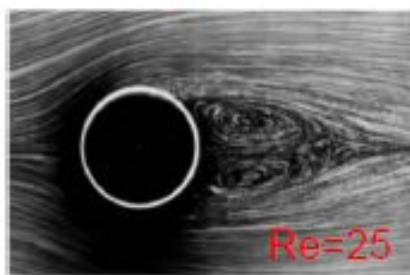
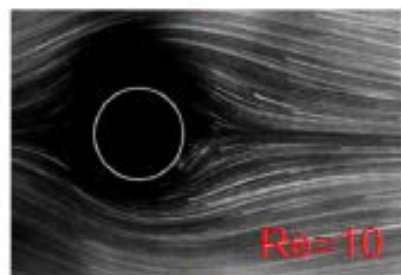
- Неустойчивость – признак того, что такая форма движения не может больше существовать
  - Должна появиться новая форма движения
  - Процесс ветвления решения называется бифуркацией
- Такой подход позволяет отвлечься от детального рассмотрения самого процесса перехода

Стационарное  
безотрывное

Стационарное  
отрывное

Нестационарное  
упорядоченное

Турбулентное



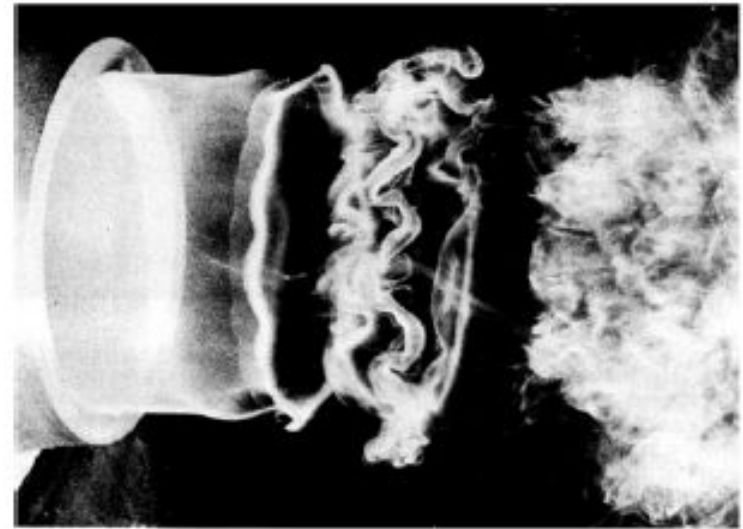
Изменение структуры течения при увеличении числа Рейнольдса

# Когда происходит переход к турбулентности

93

При значениях числа Рейнольдса  $Re = \frac{UL}{\nu}$ , превышающих

некоторое критическое значение, упорядоченное стационарное движение газов и жидкостей (*ламинарное движение*) теряет устойчивость и становится *турбулентным*



- Критические значения чисел Рейнольдса различны для разных течений, но не очень велики, так что подавляющее большинство реальных течений в природе и технике являются турбулентными

# Почему возникает турбулентность?

94

- Число Рейнольдса характеризует соотношение сил инерции (конвекции) и вязкости в рассматриваемом течении.
- Конвекция дестабилизирует течение, а вязкие силы – стабилизируют.
  - Могут быть другие дестабилизирующие причины
    - ✓ Температурная стратификация

Увеличение числа Рейнольдса (превышение  $Re_{кр}$ )

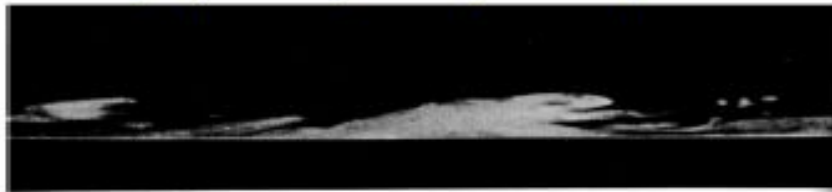


# Потеря устойчивости

Потеря устойчивости потока зависит как от типа течения, так и от множества других факторов



Не существует «универсального» числа Рейнольдса перехода



- Отрицательный градиент давления (ускоряющийся поток)



- Положительный градиент давления (замедляющийся поток)

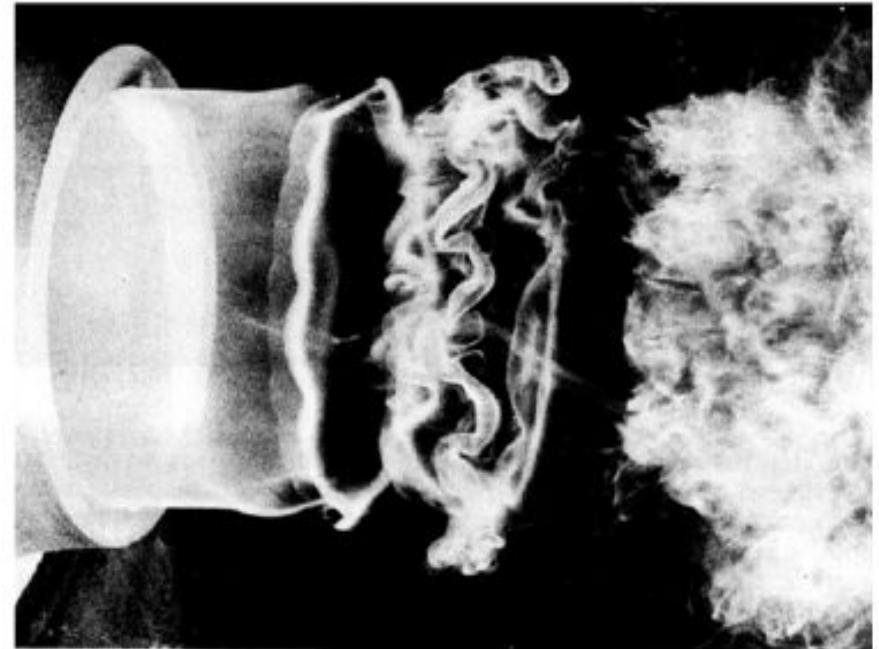
Влияние градиента давления на переход к турбулентности в пограничном слое

Вопросами определения границ устойчивости занимается теория устойчивости

# Сценарий возникновения турбулентности в свободных течениях



Турбулизация слоя смешения



Турбулизация круглой струи

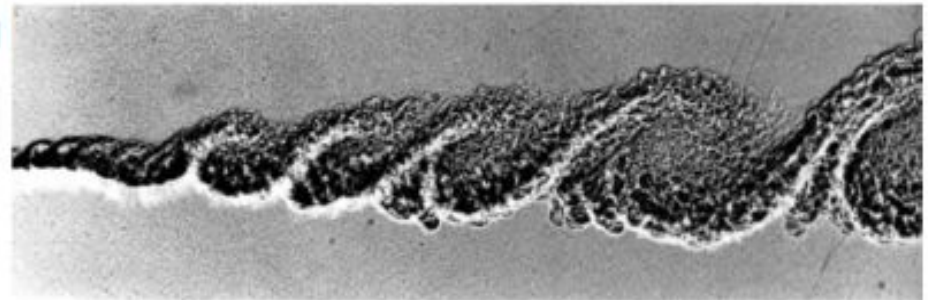
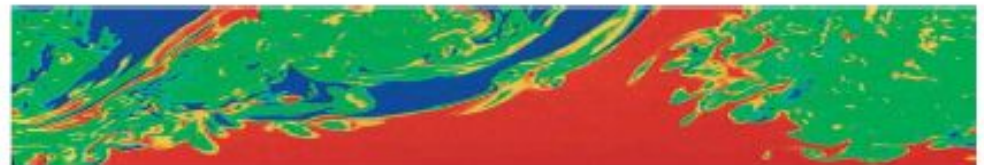
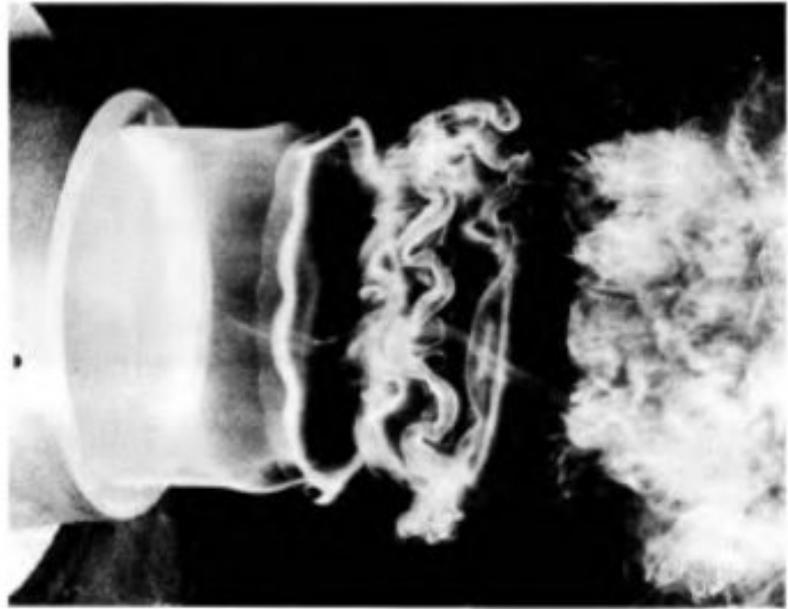
Появление систем упорядоченных движений, которые на определенном этапе турбулизуются



# Переход к трехмерной турбулентности

Происходит благодаря двум механизмам

- Двумерные вихри теряют устойчивость в третьем направлении
  - За счет попадания в области потока разной скорости они растягиваются
  - Превращаются в вихри типа braid (шнурок)
  - Появляются продольные вихри типа rib (ребро)
  
- Мелкомасштабный переход к турбулентности
  - Происходит в сдвиговом слое между двумя соседними вихрями
  - $3 \cdot 10^3 < Re_\theta < 5 \cdot 10^3$
  - Мелкомасштабная турбулентность «размывает» когерентные структуры

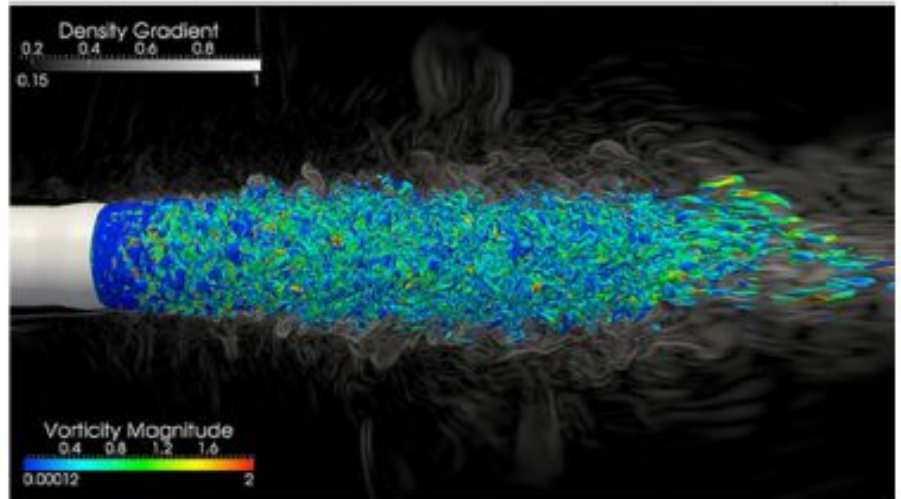


# Затопленная струя

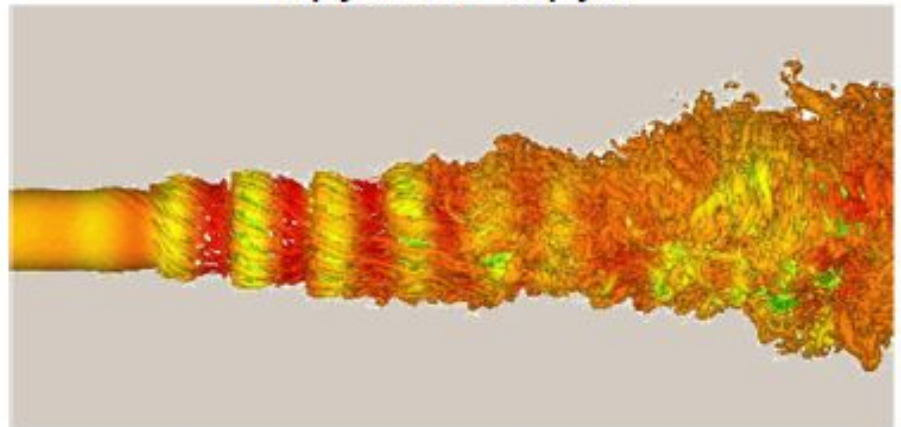
Струя, вытекающая в ту же самую среду



Плоская струя (из узкой щели)



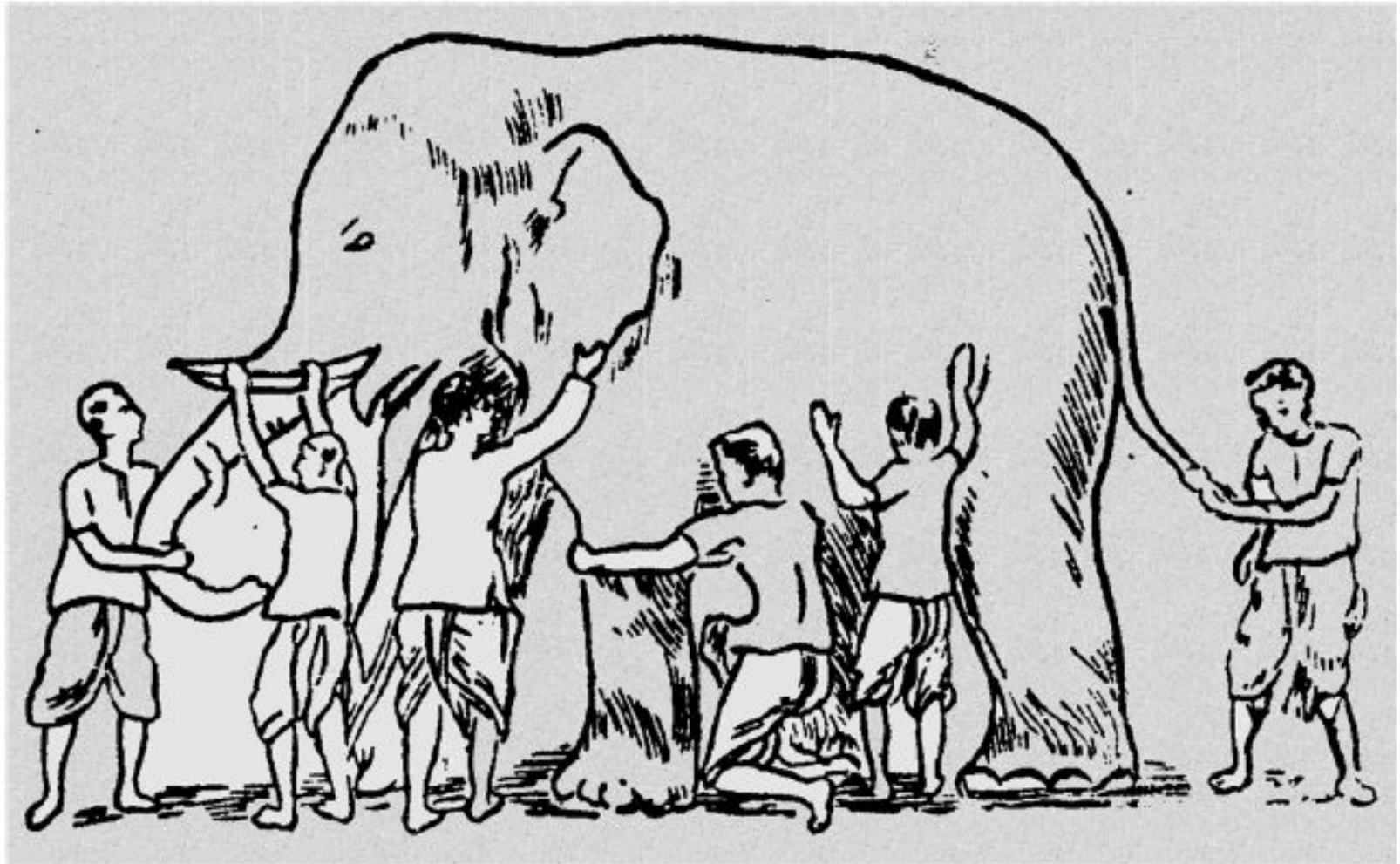
Круглая струя



Круглая закрученная струя

# Характеристики турбулентности

99



Турбулентность - сложный и многообразный процесс, для описания которого используются различные подходы и понятия

## *Характеристики турбулентности*

*Несмотря на простое определение, сводящееся к понятию «случайных пульсаций», турбулентность имеет чрезвычайно сложную природу.*

Причина турбулентных пульсаций связана с неустойчивостью потока в целом, и их масштаб определяется балансом воздействия различной природы.

На первый взгляд абсолютно «случайный процесс», тем не менее, подчиняется неким закономерностям, которые можно извлечь при помощи разных подходов (в первую очередь математических).

Введем основные понятия, которые используются для описания свойств турбулентности.

Часто используется понятие «турбулентного вихря», а турбулентность определяют как совокупность разномасштабных вихрей.

Можно показать, что в несжимаемой жидкости вихрь с любым распределением угловой скорости удовлетворяет уравнению неразрывности.

Это означает, что турбулентное движение несжимаемой жидкости может быть представлено в виде суперпозиции различных вихрей.

Популярность использования термина «турбулентный вихрь» (кроме причин исторического характера, связанных с гипотезой пути смещения Прандтля) обусловлена тем, что при визуализации турбулентных течений эти «вихри» видны и хорошо различимы.

*Максимальный размер вихрей близок к характерному линейному масштабу задачи  $L$ .*

Примеры: пограничный слой, профиль под углом атаки.

Часто движение наиболее крупных вихрей оказывается в значительной степени упорядоченным (например, течение за цилиндром).

Такие структуры часто называют когерентными.

Вихри минимального размера диссипируют непосредственно в тепло.

Их размер характеризуется так называемым колмогоровским масштабом:  $\eta_k = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ , где  $\varepsilon$  – местная скорость диссипации на единицу массы, а  $\nu$  – кинематическая вязкость.

Наибольшее количество энергии при этом переносят вихри некоторого «среднего» размера.

Часто пользуются понятиями «*характерный размер*» и «*характерное время жизни*» турбулентного вихря.

Если при этом не конкретизируется, какие именно вихри имеются ввиду, чаще всего эти понятия относятся именно к «средним» наиболее «энергонесущим» вихрям.

# Турбулентные вихри

Турбулентность это совокупность турбулентных вихрей различного размера

- Начиная с некоторого малого размера вихри диссипируют в тепло под воздействием вязкости. Характерный размер минимальных вихрей определяется колмогоровским масштабом

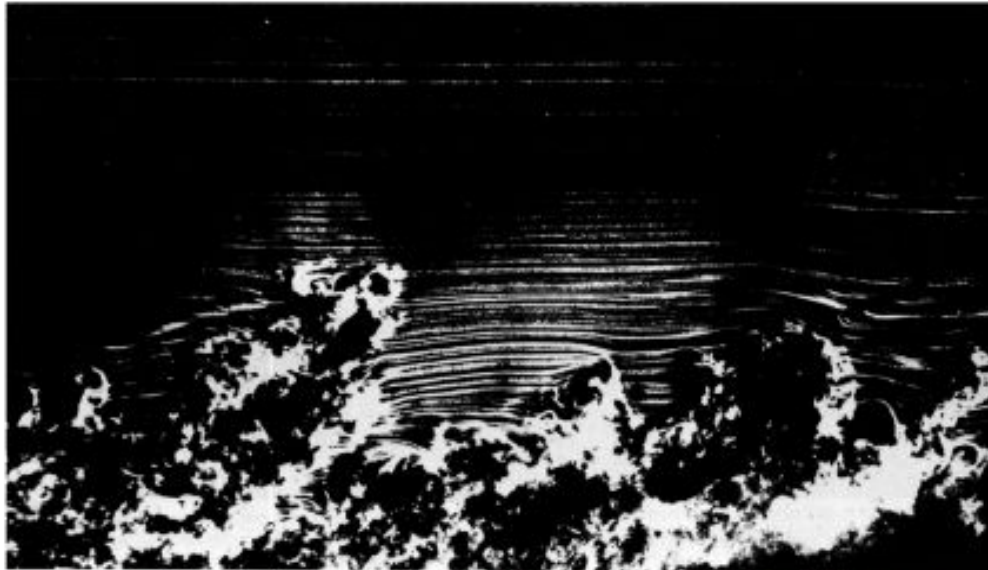
$$\eta_k = \left( \nu^3 / \varepsilon \right)^{1/4}$$

$\varepsilon$  – местная скорость диссипации на единицу массы  
 $\nu$  – кинематическая вязкость.

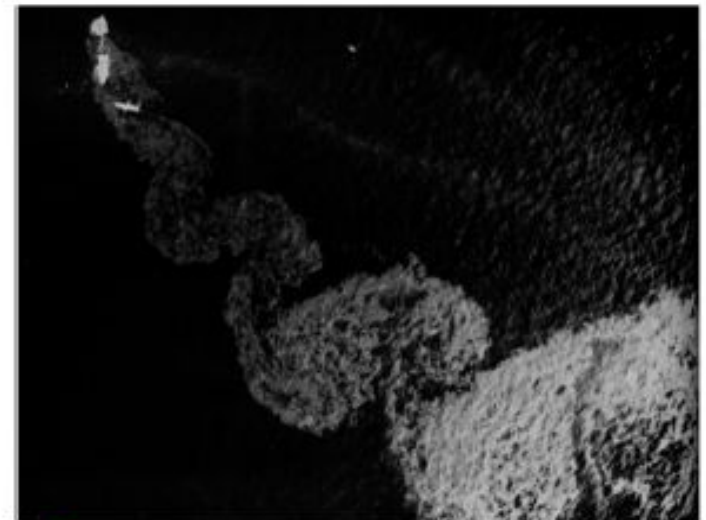
- Максимальный размер турбулентных вихрей, существующих в потоке, имеет порядок характерного линейного масштаба течения
  - Когерентные структуры



- Каждый вихрь характеризуется «размером» и «временем жизни», которые не могут быть определены точно.
- Вихри, которые переносят наибольшее количество энергии называются «энергонесущими»
  - Понятиями «характерный размер» и «характерное время жизни» вихрей обычно характеризуют средний размер и среднее время жизни «энергонесущих» вихрей
  - Линейный масштаб турбулентности (теория Прандтля)

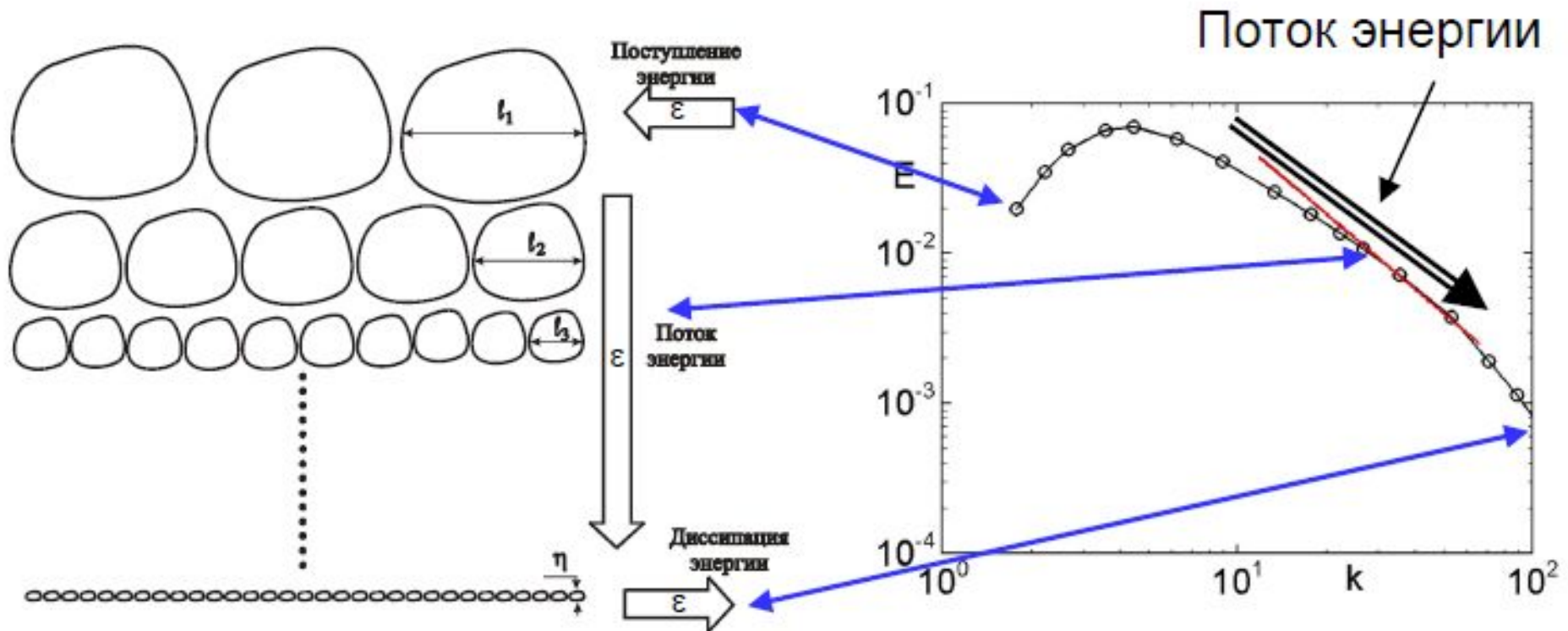


Вихри в турбулентном пограничном слое



Вихри в следе за плохо обтекаемым телом





- Энергия поступает от осредненного потока к наиболее крупным вихрям
- Последовательно передается все более и более мелким вихрям ("каскадный перенос")
- Наиболее мелкие (колмогоровские) вихри диссипируют и передают энергию тепловому движению

С практической точки зрения в большинстве случаев основной интерес представляют не актуальные величины, а усреднённые характеристики. Например, подъёмная сила крыла, коэффициент потерь в турбине, сопротивление планёра самолёта.

Однако бывают задачи, в которых существенный интерес представляют именно пульсации. Например, задачи аэроакустика и аэроупругости.

Именно поэтому большое развитие получила *статистическая теория турбулентности*, которая основана на аппарате математической статистики (теории вероятностей).

Другой общепринятый подход в значительной мере базируется на использовании экспериментальных данных и называется *полуэмпирической теорией турбулентности*.

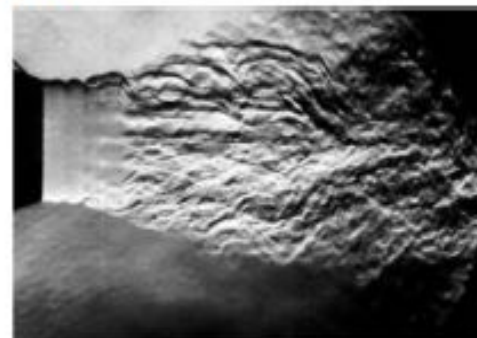
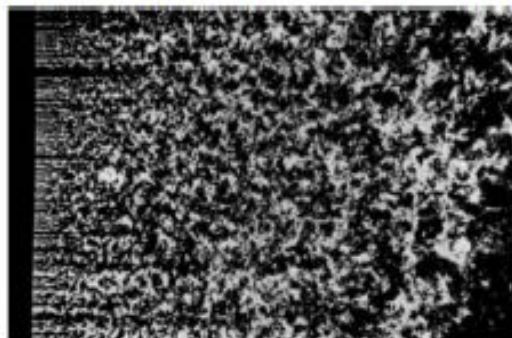
Кроме того, существует значительное количество менее значимых с практической точки зрения подходов (например, основанных на теории хаоса).

# Понятие средней величины и пульсации

- Турбулентные структуры существуют на фоне «основного» движения

107

- Например, однородного потока или струи



- Это «основное» движение можно выделить путем осреднения
  - Поэтому его обычно называют осредненным движением
- Определение осредненного движения зависит от выбранного **способа осреднения:**

по времени

по пространству

по ансамблю

по фазе

- Таким образом турбулентное течение можно разделить осредненную (детерминированную) и пульсационную составляющие

$$u \cong \bar{u} + u'$$

- Турбулентные течения, у которых осредненная составляющая не зависит от времени называют стационарными

При описании турбулентного потока используются, как предложено Рейнольдсом, усреднённые по времени уравнения сохранения.

При этом интервал усреднения  $\Delta t$  выбирается достаточно большим по сравнению с характерным временем турбулентных пульсаций.

Турбулентная величина  $\psi$ , являющаяся функцией координат и времени

$$\psi \equiv \psi(x^\alpha, t),$$

представляется, как сумма макроскопической составляющей  $\bar{\psi}$

и флуктуации  $\psi'$ :

$$\psi \equiv \bar{\psi} + \psi'.$$

Среднее значение турбулентной величины определяется следующим образом:

$$\bar{\psi} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \psi dt \quad ,$$

Очевидно, что

$$\overline{\bar{\psi}} = \bar{\psi} \quad .$$

Для средних значений справедливы также следующие соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\psi + \xi} = \bar{\psi} + \bar{\xi} \\ \overline{\psi \xi} = \bar{\psi} \bar{\xi} \\ \overline{\psi_{,\alpha}} = \bar{\psi}_{,\alpha} ; \quad \overline{\psi_{,t}} = \bar{\psi}_{,t} \end{array} \right. .$$

Полагаем, что макроскопическая составляющая равна своему среднему значению:

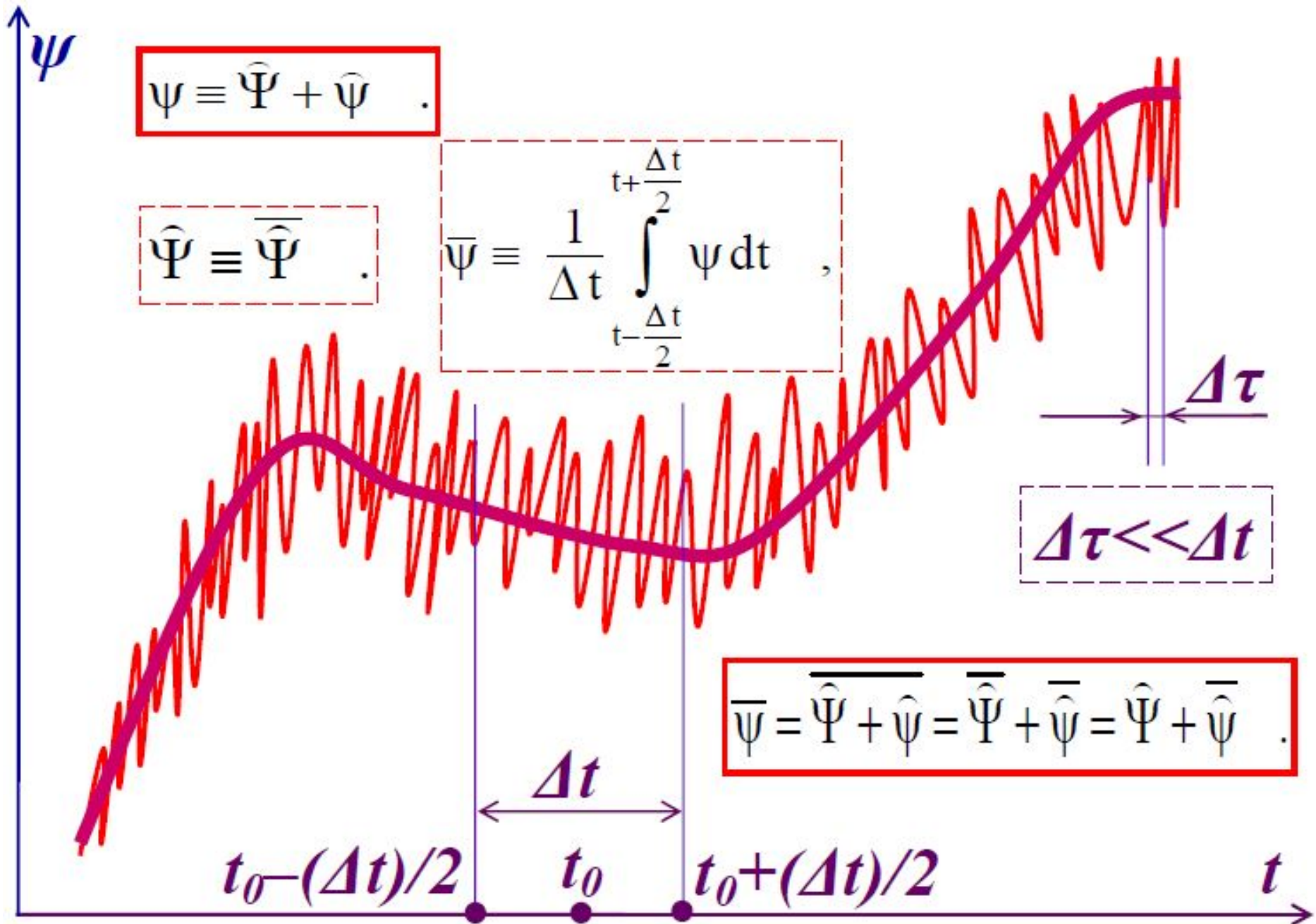
$$\underline{\Psi} \equiv \bar{\Psi} .$$

Из этого НЕ следует равенство среднего значения турбулентной величины и среднего значения её макроскопической составляющей:

$$\overline{\psi} = \overline{\psi} + \overline{\psi} = \overline{\psi} + \overline{\psi} = \overline{\psi} + \overline{\psi} .$$

Существуют два метода определения макроскопических составляющих. В обоих макроскопическая составляющая плотности полагается равной среднему значению плотности:

$$\overline{\rho} = \overline{\rho} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t - \frac{\Delta t}{2}}^{t + \frac{\Delta t}{2}} \rho \, dt .$$





Если в качестве макроскопической составляющей выбрано среднее значение величины, условимся флуктуационную составляющую

$$\psi''$$

обозначать двумя штрихами вверху:

Можем

записать:

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'' \quad .$$

получи

м

$$\bar{\rho}'' = 0 \quad .$$

Аналогичное представление используется для давления:

$$P = \bar{P} + P'' \quad , \quad P'' = 0 \quad .$$

Макроскопические составляющие скорости и энергии (энтальпии) могут быть представлены таким же образом (этот метод усреднения назовем первым), либо как массово взвешенные величины. Вторым методом, который применяется в данной работе, позволяет избавиться в усреднённых уравнениях сохранения от членов, содержащих усреднённый массовый поток, обусловленный турбулентностью. Флуктуацию турбулентной величины в этом

$$\psi'$$

случае будем обозначать одним штрихом вверху: Таким образом, для скорости, внутренней энергии и энтальпии можем записать, соответственно, следующие выражения:

$$v^\alpha \equiv \tilde{v}^\alpha + v'^\alpha, \quad u \equiv \tilde{u} + u',$$

$$i \equiv \tilde{i} + i',$$

$$\tilde{v}^\alpha \equiv \frac{\overline{\rho v^\alpha}}{\bar{\rho}} \quad ,$$

$$\tilde{u} \equiv \frac{\overline{\rho u}}{\bar{\rho}} \quad ,$$

$$\tilde{\tau} \equiv \frac{\overline{\rho \tau}}{\bar{\rho}} \quad .$$

Заметим, что в этом случае

$$\begin{cases} \tilde{v}^\alpha = \overline{\tilde{v}^\alpha} \\ \overline{\rho v'^\alpha} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \tilde{u} = \overline{\tilde{u}} \\ \overline{\rho u'} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \tilde{t} = \overline{\tilde{t}} \\ \overline{\rho t'} = 0 \end{cases}.$$

Для несжимаемой  
жидкости

$$\bar{\rho} = \rho$$

и, следовательно, для некоторой турбулентной  
величины  
справедливы  
тождества

$$\Psi$$

$$\tilde{\Psi} = \bar{\Psi} \quad ,$$

$$\Psi' \equiv \Psi'' = 0 \quad ,$$

то есть для несжимаемой жидкости оба метода усреднения эквивалентны.

Можем записать  
выражения

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\rho \psi} \equiv \overline{(\bar{\rho} + \rho'')(\bar{\psi} + \psi'')} = \bar{\rho} \bar{\psi} + \overline{\rho'' \psi''} \\ \rho \psi \equiv \bar{\rho} \tilde{\psi} \end{array} \right.$$

следовательно, имеет место  
соотношение

$$\bar{\rho} \bar{\psi} + \overline{\rho'' \psi''} = \bar{\rho} \tilde{\psi} \quad .$$

Преобразуем его к  
виду

$$\frac{\tilde{\psi} - \bar{\psi}}{\bar{\psi}} = \frac{\sqrt{\overline{\rho''^2}} \sqrt{\overline{\psi''^2}} r_{\rho \psi}}{\bar{\rho} \bar{\psi}} \quad .$$

$r_{\rho\psi}$  – коэффициент корреляции между величинами

$\rho$  и  $\psi$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\frac{\tilde{\psi} - \bar{\psi}}{\bar{\psi}} = r_{\rho\psi} \frac{\sqrt{\bar{\rho}''^2}}{\bar{\rho}} \frac{\sqrt{\bar{\psi}''^2}}{\bar{\psi}} .$$

из которого следует, что оба метода усреднения эквивалентны,

когда все коэффициенты корреляции  $r_{\rho\psi}$  равны нулю.

*АЛЬБОМ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА*  
*AN ALBUM*  
*OF FLUID MOTION*

*Assembled*

*by MILTON VAN DYKE*

Department of Mechanical Engineering  
Stanford University, Stanford, California

*THE PARABOLIC PRESS*  
*STANFORD, CALIFORNIA, 1982*



ББК 22.365

A56

УДК 532

121

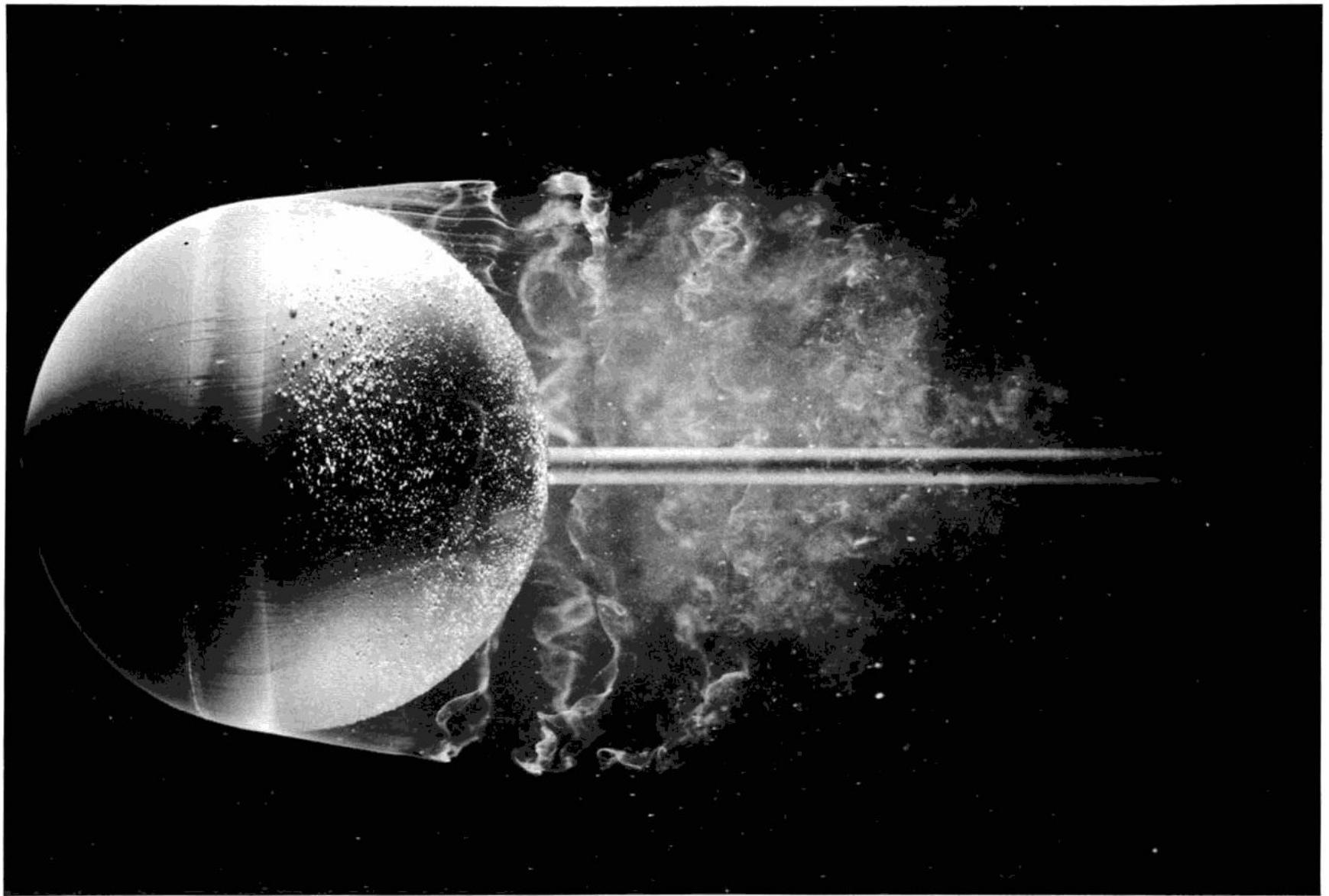
**Альбом течений жидкости и газа:**  
A56 Пер. с англ./Сост. М. Ван-Дайк.— М.: Мир,  
1986.—184 с., ил.

Книга представляет собой собрание фотографий разнообразных течений жидкости и газа, иллюстрирующих закономерности потоков в различных условиях. Представлены результаты экспериментальных исследований специалистов из США, Англии, Франции, Японии и других стран. Классификация, обработка и комментирование этого материала выполнены известным американским ученым М. Ван-Дайком.

Для математиков-вычислителей, механиков, физиков, инженеров, аспирантов и студентов вузов.

A  $\frac{1703040000-114}{041(01)-86}$  38-86, ч. 1

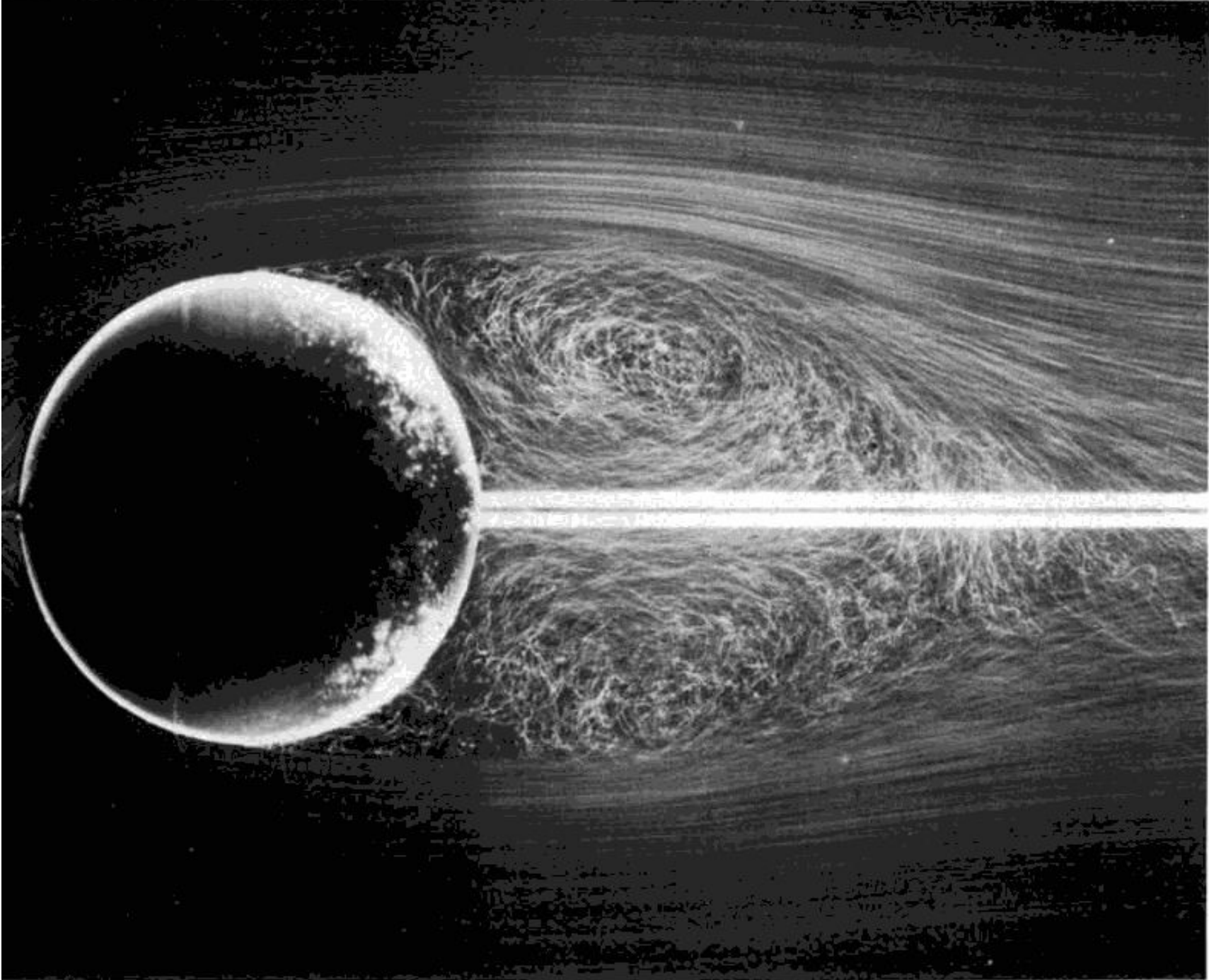
ББК 22.365



**55. Мгновенная картина потока при обтекании шара при  $Re = 15\,000$ .** Подкраска обнаруживает ламинарный пограничный слой, отрывающийся перед экватором, причем этот слой остается ла-

минарным на длине, почти равной радиусу. Затем слой становится неустойчивым и быстро превращается в турбулентный. Фото ONERA. [Werlé, 1980]

**56. Осредненный поток при обтекании шара при  $Re = 15\,000$ .** Длительная экспозиция при съемке воздушных пузырьков в воде показывает осредненную форму линий тока в меридиональной плоскости для течения, мгновенное фото которого приведено на предыдущем снимке. Фото ONERA, сделанное Henri Werlé



Так как для сжимаемой жидкости применение второго метода усреднения позволяет, как уже отмечалось, исключить ряд членов в уравнениях сохранения, а также делает более ясной физическую интерпретацию получаемых усреднённых уравнений, далее рассмотрим второй метод усреднения.

## Дифференциальные уравнения сохранения для турбулентного режима течения.

Усреднённое по времени уравнение неразрывности.

$$\bar{\rho}_{,t} + \left( \bar{\rho} \tilde{v}^\alpha \right)_{,\alpha} = 0 \quad .$$

Усреднённое по времени уравнение сохранения импульса.

$$\left( \bar{\rho} \tilde{v}^\alpha \right)_{,t} + \left( \bar{\rho} \tilde{v}^\alpha \tilde{v}^\beta \right)_{,\beta} = -\bar{P}_{,\alpha} + \left( \bar{\tau}^{\alpha\beta} + T_T^{\alpha\beta} \right)_{,\beta} + \bar{\rho} f^\alpha \quad .$$

$$T_T^{\alpha\beta} \equiv - \overline{\rho v'^\alpha v'^\beta} \quad - \quad \underline{\text{тензор турбулентных напряжений}}$$

Усреднённое по времени уравнение сохранения энергии.

$$\begin{aligned} (\bar{\rho} \tilde{h})_{,t} + (\bar{\rho} \tilde{v}^\alpha \tilde{h})_{,\alpha} = & - \left( q^\alpha + q_T^\alpha \right)_{,\alpha} + \\ & + \bar{P}_{,t} + \tilde{v}^\alpha \bar{P}_{,\alpha} + \left( \bar{\tau}^{\alpha\beta} + T_T^{\alpha\beta} \right) \tilde{v}^\beta_{,\alpha} + \bar{\rho} Q \quad . \end{aligned}$$

$$\tilde{h} \equiv \tilde{\iota} + \tilde{\varepsilon} \equiv \tilde{\varepsilon} + \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \quad - \quad \text{виртуальная энтальпия.}$$

$$q_T^\alpha \equiv \overline{\rho \left( u' + \frac{1}{2} v'^\beta v'^\beta \right) v'^\alpha} - \overline{T^{\alpha\beta} v'^\beta} \quad -$$

$\tilde{\varepsilon} \equiv \tilde{u} + \tilde{\varepsilon}_T$  — виртуальная внутренняя энергия  
 вектор турбулентной теплопроводности

$$\tilde{\varepsilon}_T \equiv \frac{\overline{\frac{1}{2} \rho (v'^\alpha)^2}}{\bar{\rho}} \quad - \quad \text{кинетическая энергия турбулентности.}$$



Свойства турбулентных течений существенно отличаются от свойств ламинарных течений.

Например, подъёмная сила одного и того же крыла при ламинарном и турбулентном обтекании может отличаться в разы.

Поэтому необходимо тем или иным способом учитывать влияние турбулентности, то есть моделировать её.

Результаты расчётов течений существенно зависят от качества моделирования турбулентности.

Механизм влияния турбулентности на усреднённое течение связан с наличием турбулентного переноса всех газодинамических характеристик (импульса, энергии, температуры, концентрации и т. п.).

*Если в ламинарном течении диффузионный перенос осуществляется при помощи броуновского движения, то в турбулентном «вихри» «перемешивают» среду, что существенно (в разы, а часто и на порядки) увеличивает скорость диффузионного переноса.*

*С точки зрения актуального движения этот перенос имеет конвективную природу, однако с точки зрения усреднённого движения он рассматривается как диффузионный.*

# Необходимость создания надежных методов расчета турбулентных течений <sup>130</sup>

- Большинство течений, с которыми приходится иметь дело при решении практических задач, являются турбулентными (числа Рейнольдса достаточно высоки)
- Высокие требования к точности расчета
  - внешняя аэродинамика (самолет и его элементы)
  - турбомашиностроение (турбинные лопатки)
  - кораблестроение (судно, винт)
  - автомобилестроение



Необходимы надежные методы расчета турбулентных течений

# Модели турбулентности

- Попытка замкнуть уравнения для рейнольдсовых напряжений на основе формализма Рейнольдса приводит к появлению еще большего числа неизвестных
  - Необходимо привлекать дополнительные соображения
    - ✓ Эмпирические закономерности
- Формулы для замыкания уравнений Рейнольдса (для определения  $\tau_{ij}^T = \rho \overline{u'_i u'_j}$ ) называются **полуэмпирические модели турбулентности**
  - Устанавливают связь между тензором Рейнольдсовых напряжений  $\tau_{ij}^T$  и параметрами осредненного потока.
- В настоящее время разработаны сотни моделей турбулентности, но ни одна из них не является универсальной, т.е. подходящей для любых течений

# Несовершенство моделей турбулентности

- В отличие от уравнений движения модели турбулентности не являются универсальными физическими законами
- Большинство моделей турбулентности базируются на закономерностях, характерных для простых «канонических» течений
  - ✓ Закон стенки
  - ✓ Формула Колмогорова
  - ✓ ...
  - Как только эти закономерности перестают выполняться – точность расчета падает
- Константы в моделях турбулентности «настраиваются» на определенный набор течений
  - Часто приходится при настройке идти на компромисс



- Не существует универсальных моделей турбулентности, каждая модель имеет свою «область применимости»

# Проблема выбора моделей турбулентности

133

- При расчете конкретных течений необходимо не только выбрать наиболее подходящую модель турбулентности, но и оценить степень достоверности полученных с ее помощью результатов.
- Проводятся многочисленные работы по тестированию моделей турбулентности
  - Стэнфордские конференции
  - Международные проекты
  - Workshop
  - Академические исследования



- Лучшие современные модели турбулентности хорошо изучены
  - Известна их способность предсказывать свойства тех или иных течений
  - Для многих течений известны наиболее надежные модели

Полуэмпирические  
модели турбулентности

# Гипотеза Буссинеска

- Буссинеск (1877) предложил ввести дополнительную (турбулентную) вязкость
- Большинство моделей турбулентности используют обобщенную гипотезу Буссинеска

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_T \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

- Линейная связь между тензором Рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций
  - Аналог реологического закона Ньютона для молекулярной вязкости
- Достоинства
  - Использование гипотезы Буссинеска позволяет сократить количество определяемых в процессе моделирования переменных с 6 до 1.
- Недостатки
  - В некоторых случаях гипотеза Буссинеска несправедлива и ее использование приводит к получению качественно неверного результата

В таких случаях необходимо использование моделей рейнольдсовых напряжений или нелинейных моделей

# История развития моделей турбулентности

- До 1940 г. - введение основных понятий
  - Гипотеза Буссинеска (1877)
  - Осреднение по Рейнольдсу (1895)
  - Теория пути смешения Прандтля (1925)
  - Формула Кармана (1930)
  - Однородная изотропная турбулентность (Тейлор, 1935)
- 40е-50е гг. - создание математической базы и теоретических основ большинства моделей турбулентности.
  - Формула Колмогорова, первая модель  $k-\omega$  (Колмогоров, 1942 )
  - Первая модель Рейнольдсовых напряжений (Ротта, 1951 )
  - Формула Клаузера (1956 )
  - Демпфирующий множитель Ван-Дрифта (1956 )



# Турбулентная вязкость

- Величина  $\nu_T$  в гипотезе Буссинеска  $-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_T \cdot S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}$  называется турбулентной вязкостью

- Не фундаментальная физическая величина, а лишь коэффициент пропорциональности

- Уравнения Рейнольдса с использованием гипотезы Буссинеска

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho(\nu + \nu_T) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{cases}$$

- В них входит модифицированное давление  $\tilde{p} = p + \frac{2}{3}\rho k$

- В несжимаемой жидкости может влиять только около границ
  - В сжимаемом газе все сложнее...

- Турбулентное число Рейнольдса  $Re_t = \frac{\nu_T}{\nu}$

- Характеризует соотношение турбулентного и молекулярного переноса
  - ✓ Часто используется в моделях турбулентности

Для определения турбулентных напряжений используются модели турбулентности - алгебраические или дифференциальные соотношения.

Моделей очень много, но ни одна из них не является идеальной. Причина такого многообразия - отсутствие идеальности и поиски новых, более точных или универсальных моделей.

Спектр моделей турбулентности очень широк: от простых алгебраических связей до сложных моделей рейнольдсовых напряжений, содержащих 7 и более дифференциальных уравнений.

Однако среди всего многообразия моделей можно выделить несколько основных групп (обсуждение основных групп моделей и их краткая характеристика):

1. Алгебраические модели;
2. Модели с одним дифференциальным уравнением;
3. Модели с двумя дифференциальными уравнениями;
4. Модели, не использующие гипотезу Буссинеска.

Следует отметить, что *некоторые модели формально невозможно отнести ни к одной из перечисленных категорий, эти модели мы будем рассматривать вместе с моделями, наиболее близкими к ним по свойствам.*

Многие модели турбулентности, используемые в расчётной практике, основаны на концепции вихревой вязкости и турбулентной диффузии. Следуя Буссинеску, рейнольдсовы напряжения определяются как произведение вихревой вязкости на составляющие тензора осредненных скоростей деформации:

$$\overline{v'^x v'^y} = \nu_t \left( \overline{v^y}_{,x} + \overline{v^x}_{,y} \right) - \frac{1}{3} \delta_{xy} \overline{v'^i v'^j} \quad . \quad (m1)$$

Само по себе уравнение (m1) не вводит модели турбулентности, а только характеризует структуру такой модели, при этом основной задачей является задание функции  $\nu_t$ .

*В отличие от коэффициента молекулярной вязкости  $\nu$  коэффициент  $\nu_t$  определяется состоянием турбулентности и не связан со свойствами жидкости.*

Он может сильно изменяться от точки к точке пространства и в зависимости от типа течения.

Так, например,  $\nu_t$  в зонах циркуляционного течения может на несколько порядков превышать  $\nu$ .

Также известно, что для течения в открытом канале  $\nu_t$  распределен по параболическому закону по глубине, а для плоской струи он изменяется пропорционально квадратному корню из расстояния от источника.

Иногда при расчётах турбулентных течений  $\nu_t$  принимается постоянным (Буссинеск (1877), Васильев (1971)).

*Однако столь грубое описание турбулентности допустимо в тех случаях, когда величина турбулентного переноса не имеет существенного значения или использование более сложных конструкций представляется неоправданным.*

**Концепция турбулентной вязкости предполагает, что перенос количества движения происходит аналогично переносу за счет молекулярного движения.**

Подвергаясь справедливой критике как физически необоснованная, она, однако, широко применяется, поскольку позволяет получать вполне приемлемые результаты в инженерной практике.

Полезно представление о пропорциональности  $\nu_t$  масштабу скорости  $U$  и масштабу турбулентности  $L$ , то есть

$$\nu_t \sim U L \quad (m2)$$

поскольку для многих течений можно аппроксимировать с достаточной точностью распределение характерных масштабов.

По прямой аналогии с турбулентным переносом количества движения понятие турбулентной диффузии предполагает следующее соотношение между переносом массы или тепла и градиентом переносимой субстанции:

141

$$-\overline{v' i \varphi'} = G_t \bar{\varphi}_{,i} \quad . \quad (m3)$$

где  $D_t$  – коэффициент турбулентной диффузии.

*Подобно турбулентной вязкости  $D_t$  не является собственной характеристикой жидкости, а зависит от состояния турбулентности.*

Согласно гипотезе Рейнольдса об аналогии при турбулентном переносе массы или тепла и количества движения,

$$D_t = \nu_t / Sc_t \quad (m4)$$

Величина  $Sc_t$  называется *турбулентным числом Шмидта*.

В отличие от самих коэффициентов турбулентной диффузии ( $D_t$ ) и турбулентной вязкости ( $\nu_t$ ), их отношение –  $Sc_t$  – слабо изменяется как в пределах потока, так и от течения к течению.

Поэтому оно принимается постоянным в ряде моделей, хотя и испытывает влияние плавучести и кривизны линий тока.

Понятие турбулентной вязкости имеет недостатки.

Это прежде всего касается ситуаций, когда в течениях возникают зоны отрицательной вязкости.

К тому же предположение об изотропности коэффициентов турбулентной вязкости (диффузии) является сильным упрощением, имеющим ограниченную пригодность при интерпретации сложных течений, в частности тех, для которых действие массовых сил имеет преобладающее направление.

Поэтому иногда коэффициенты турбулентной вязкости (диффузии) принимаются различными по разным направлениям.

Важными достоинствами моделей турбулентной вязкости являются их

- относительная простота,
- наглядность

и

- вычислительная эффективность: в рамках приближения Буссинеска проблема замыкания сводится к определению одной скалярной величины

(турбулентной вязкости) вместо 6 компонент тензора  $T_t$ .

Во многих случаях, особенно при анализе течений, в которых основное влияние на усредненное движение оказывает лишь одна из компонент тензора рейнольдсовых напряжений (напряжение сдвига  $\tau_{xy}^t$ ), нарушение гипотезы Буссинеска не приводит к сколько-нибудь заметным погрешностям.

Указанные обстоятельства (относительная простота и приемлемость для широкого круга сдвиговых турбулентных течений) обуславливают широкую применимость моделей турбулентной вязкости.

Более сложным подходом к решению проблемы замыкания является использование различных нелинейных соотношений между тензором анизотропии и тензором скоростей деформаций и составляющими вектора завихренности, характеризующими кинематику усреднённого течения.

Построенные на указанных принципах модели называются нелинейными моделями турбулентной вязкости.

Впервые такой подход был предложен Поупом (1975), а в дальнейшем получил развитие в работах Спезайла (Speziale).

Алгебраические модели принадлежат к простейшим типам моделей турбулентности, в которых связь между турбулентной вязкостью и параметрами усреднённого потока задается алгебраическими соотношениями.

Отсюда следуют достоинства моделей такого типа: вычислительная эффективность, простота калибровки и модификаций с учётом специфики рассматриваемых течений.

Однако очевидна и узкая специализация этих моделей, поскольку они опираются на априорную (эмпирическую) информацию о структуре конкретного рассматриваемого течения.

Расширенное использование алгебраических моделей для других типов течений подчас невозможно в принципе (поскольку, например, опираясь на структурные кинематические характеристики пограничного слоя, такие как толщина вытеснения и потери импульса, скорость на внешней границе пограничного слоя, нельзя анализировать течения, для которых указанные характеристики не определены).

Кроме того, алгебраическая формулировка моделей обуславливает их мгновенную реакцию на изменения параметров и условий на границах пограничного слоя.

Тем не менее, алгебраические модели турбулентной вязкости многие десятилетия были (а во многих областях остаются) основным инструментом расчёта турбулентных сдвиговых течений.



## Модель пути смешения Прандтля

Модель для описания распределения  $v_t$  впервые была предложена Л. Прандтлем в 1925 году и известна как модель пути смешения.

Доказано, что она довольно хорошо воспроизводит тонкие вязкие слои.

Рассматривая усредненные сдвиговые течения без градиента давления, Прандтль постулировал, что характерный масштаб пульсаций скорости  $\mathbf{V}'$  равен градиенту усреднённой скорости, умноженному на характерный масштаб длины  $l_m$ , который он назвал **путем смешения**.

Получим выражения коэффициентов турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности.

Возьмем два слоя жидкости на расстоянии  $l_m$  друг от друга (среднее расстояние пульсаций). Истинные скорости в этом случае

$$v^x = \overline{v^x} + v'^x \quad ; \quad v^y = v'^y \quad . \quad (m5)$$

Вследствие пульсаций составляющей скорости  $\mathbf{v}'_y$  имеет место турбулентное перемешивание (перенос количества движения и тепла). Действительно, через единичную площадку, перпендикулярную оси  $y$ , в единицу времени переносится масса жидкости  $\rho v'_y$ . Находясь в первом слое, она имела количество движения  $\rho v'_y \bar{v}^x$ . Во втором слое ее количество движения стало

$$\rho v'_y \left( \bar{v}^x + l_m \bar{v}^x_{,y} \right)$$

146

Таким образом, вследствие наличия пульсаций изменение количества движения обуславливает напряжение турбулентного трения

$$\tau_t^{xy} = \rho v'_y l_m \bar{v}^x_{,y} \quad . \quad (m6)$$

Путь смешения (или перемешивания)  $l_m$  определяется таким образом, чтобы

$$v'^x = l_m \bar{v}^x_{,y} \quad . \quad (m7)$$

Предполагая  $\mathbf{v}'_x \sim \mathbf{v}'_y$ , получаем

$$\tau_t^{xy} = \rho (l_m)^2 \left( \bar{v}^x_{,y} \right)^2 \quad .$$

Следовательно,

$$v_t = \left( l_m \right)^2 \left| \overline{v^{x,y}} \right| . \quad (m8)$$

Длина пути смешения определяется эмпирически. Успех предложенной Прандтлем модели объясняется тем, что для многих простых типов течений со сдвигом  $l_m$  может быть выражена относительно несложными формулами.

При рассмотрении течения в пограничном слое полагают

$$l_m = ky, \quad (m9)$$

где  $k$  – универсальный коэффициент пропорциональности, не зависящий от числа Рейнольдса:  $k \approx 0.39$ . Это объясняется тем, что пульсации больше там, где выше скорость. По мере приближения к стенке скорость стремится к нулю; следовательно пульсации уменьшаются. Поэтому путь перемешивания пропорционален расстоянию до стенки.

Для свободных слоёв со сдвигом можно в направлении в поперёк слоя полагать константой, пропорциональной толщине слоя. Коэффициент пропорциональности, то есть эмпирическая константа, зависит от типа течения.

В дополнение к модели пути смешения Прандтль предложил (1942) простую модель вихревой вязкости для свободных сдвиговых течений (*модель Прандтля-Райхарда* или *вторая модель Прандтля*):

$$v_t = \chi \cdot [U_{max} - U_{min}] \cdot \delta(x) , \quad (m10)$$

где  $U_{max}$  и  $U_{min}$  – максимальная и минимальная величины скорости в слое;  $\delta$  – полуширина слоя смешения;  $\chi$  – эмпирический безразмерный параметр, постоянный по толщине слоя;  $x$  – расстояние, измеренное вниз по течению (в направлении течения).

Выражение (m10) получено Райхардом экспериментально для струйных потоков.

Для свободных струй, истекающих в затопленное пространство,  $U_{max} = U_m$  – скорости на оси симметрии.  $U_{min} = 0$ .

Модель Прандтля является незамкнутой, поскольку длина пути смешения не определена.

Несколько позже (около 1940) Карман сделал попытку замкнуть модель Прандтля воспользовавшись второй производной скорости. Из анализа размерности следует

$$l_m = -\kappa \frac{\overline{v^{x,y}}}{\left(\overline{v^{x,y}}\right)_{,y}} \quad . \quad (m11)$$

что приводит к

$$v_t = -\kappa^2 \frac{\left[\overline{v^{x,y}}\right]^3}{\left[\left(\overline{v^{x,y}}\right)_{,y}\right]^2} \quad . \quad (m12)$$

Однако эта гипотеза оказалась менее удачной, чем модель Прандтля.

## Значение гипотезы Прандтля для всей теории турбулентных течений

1. Все алгебраические модели построены на основе модели Прандтля.
2. Огромное влияние на дифференциальные модели с одним и двумя уравнениями. Линейный масштаб турбулентности входит практически во все модели.

## *Пристенные версии алгебраических моделей турбулентности*

Пристенные версии алгебраических моделей турбулентности в первую очередь настроены на расчёт пограничных слоев.

В этой связи, прежде всего, необходимо вспомнить о двухслойной структуре турбулентного пограничного слоя. Важно, что внутренняя и внешняя область пограничного слоя существенно различаются (масштабами, автомодельными законами и т.п.).

Это привело к тому, что подавляющее большинство алгебраических моделей турбулентности для пограничных слоев имеют двухслойную структуру.

## *«Сшивка» решений*

Как правило, сшивка решений во внутренней и внешней областях производится в точке равенства турбулентной вязкости.

С формальной точки зрения это не очень хорошо, поскольку в точке сшивки турбулентная вязкость не дифференцируема, а в уравнениях Рейнольдса она стоит под знаком производной.

С практической точки зрения это редко играет существенную роль. Тем не менее, иногда используются гладкие сопряжения (например - TanH).



## Дополнительные сложности, возникающие при расчёте пограничных слоев

При расчёте пристенных течений зачастую возникают некоторые дополнительные сложности.

Как правило, они обусловлены наличием дополнительных факторов так или иначе меняющих как профиль скорости в пограничном слое, так и непосредственно характеристики турбулентности.

Приведём примеры названных сложностей.

1. *Проблема малых чисел Рейнольдса.* Рассмотренная модель опирается на обобщение экспериментальных данных по развитым пограничным слоям при значительных числах Рейнольдса. В ситуации, когда число Рейнольдса (по толщине пограничного слоя) не очень велико, турбулентность в пограничном слое не успевает до конца развиться и корреляции, на которых построена данная модель, оказываются не совсем верными.

2. Массообмен через стенку (вдув-отсос) приводит к увеличению (в случае вдува) или уменьшению (в случае отсоса) турбулентных пульсаций. При отсосе толщина пограничного слоя уменьшается (относительно отсутствия массообмена), а при вдуве увеличивается. Кроме того, с точки зрения закона стенки, это приводит к изменению угла наклона логарифмического профиля скорости.

3. Продольный градиент давления не меняет логарифмического закона, но существенно изменяет интенсивность турбулентных пульсаций. Кроме того, при положительном градиенте давления толщина пограничного слоя становится больше, а при отрицательном - меньше, чем в безградиентном пограничном слое.

4. Эффекты сжимаемости, вызванные как большими числами Маха в набегающем потоке, так и сильной неизотермичностью потока, также приводят к изменению логарифмического закона.

5. Шероховатость поверхности может приводить к сдвигу логарифма (изменению константы  $B$ ).

6. Продольная кривизна поверхности приводит к увеличению (на вогнутой стенке) или уменьшению (на выпуклой стенке) турбулентных пульсаций.

## Моделирование пограничных слоев

Современные представления о структуре турбулентного пограничного слоя (ТПС) основываются на анализе опытных данных.

В ТПС выделяется по меньшей мере пять подобластей: *вязкий подслой, переходная или буферная область, область логарифмического профиля скорости, область закона следа и область перемежаемости.*

*Первые три принято объединять в одну внутреннюю область или область закона стенки.*

Внутренняя область пограничного слоя на плоской пластине занимает примерно 15-20% от толщины всего слоя. Согласно измерениям в ней генерируется до 80% энергии турбулентности, причем первые 5% толщины дают более половины вклада в полное производство турбулентной энергии.

*Область закона следа и область перемежаемости обычно объединяют во внешнюю область ТПС, которая занимает порядка 80% от толщины всего слоя.*

Внешняя область ТПС с характерной для нее крупномасштабной турбулентностью обладает «долгой памятью» по Клаузеру. Полное затухание возмущений в этой области происходит на расстоянии, во много раз превышающем линейный масштаб турбулентности. Следовательно, свойства течения во внешней области могут зависеть в большей степени от предыстории потока.

*Различные области ТПС отличаются друг от друга разномасштабностью вихревых (когерентных) структур.*

Цепочка вращающихся в противоположных направлениях продольных вихрей плотно покрывает гладкую стенку.

Эти вихри подвержены колебаниям вблизи стенки и в свою очередь порождают низкоскоростные поперечные к потоку жгуты. В эволюции жгутов можно выделить следующие фазы: формирования, подъёма, колебания и разрушения. Последовательность последних трёх фаз принято называть всплеском.

Выше низкоскоростных продольных вихрей, но все еще достаточно близко к стенке находится слой, постоянно разрушаемый всплесками. По некоторым данным, всплески дают порядка 70% рейнольдсовых напряжений.

Характерным элементом внутренней области являются также мелкомасштабные поперечные вихри большой энергии. Эти вихри частично заполняют буферную область и полностью участок логарифмического профиля скорости.

Основными элементами внешней области ТПС являются крупномасштабные поперечные вихревые структуры с характерными размерами порядка толщины слоя и «типичные» вихри с большой энергией в области перемежаемости. Очевидно, что даже схематизированное представление о структуре ТПС являет собой достаточно сложную и не до конца изученную картину взаимодействия структурных элементов.

На рисунке показан типичный профиль скорости в ТПС, развивающемся на плоской пластине без градиента давления. Величина  $y^+$  выражает обезразмеренное расстояние от стенки.

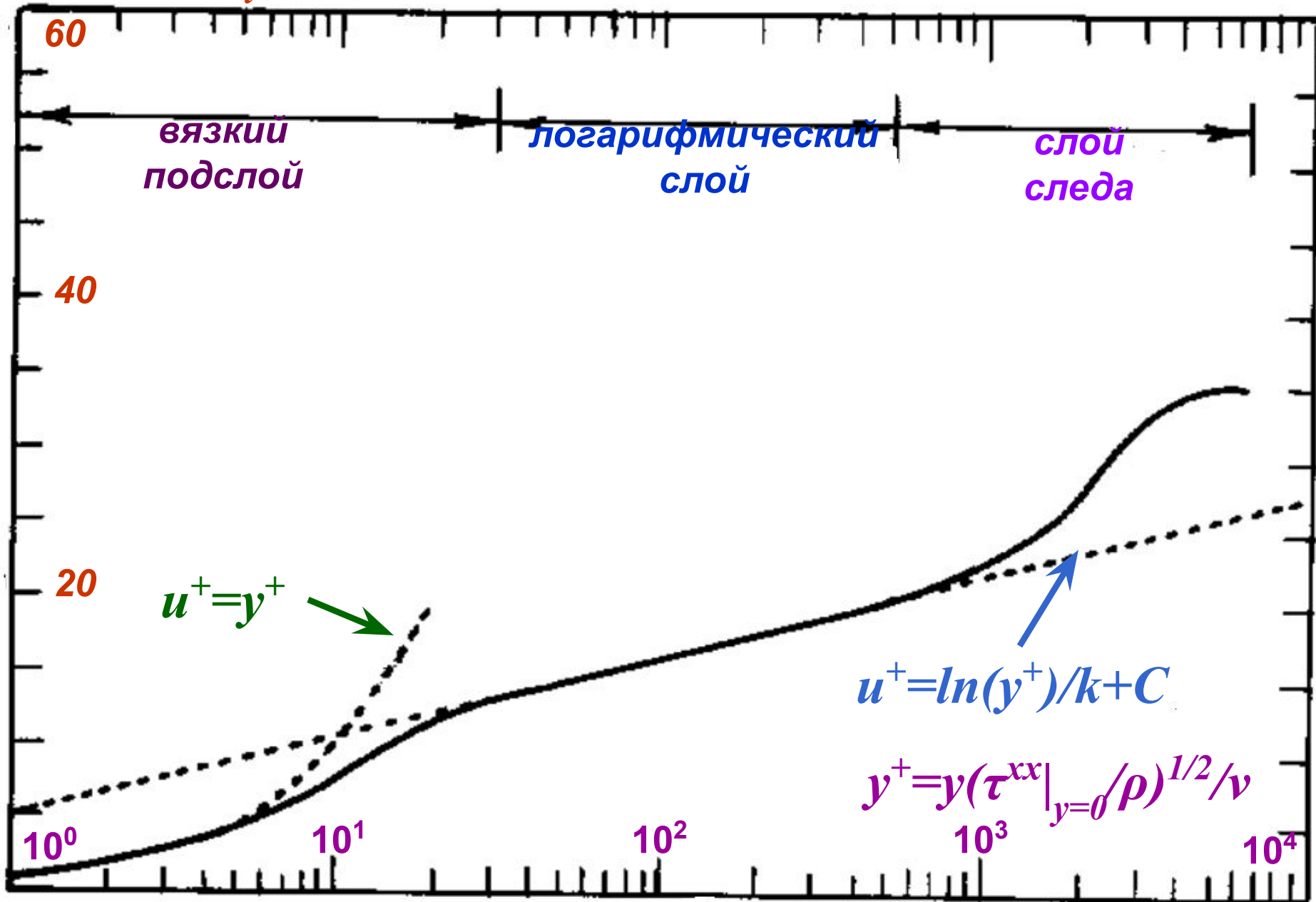
Показаны три участка разбиения профиля: *вязкий подслой*, *логарифмический слой* и *слой следа*.

*Логарифмический слой* определяется как близкая к стенке часть ТПС, где напряжения, обусловленные молекулярной вязкостью, пренебрежимо малы по сравнению с рейнольдсовыми напряжениями, а также незначительны инерционные, конвективные члены. Эта область пролегает между  $y^+=30$  и  $y=0.1\delta$ , где  $\delta$  – толщина ТПС, а  $y^+$  на верхней границе зависит от числа Рейнольдса. Интересно отметить, что закон стенки имеет место в логарифмическом слое.

Вязкий подслой располагается между стенкой и логарифмическим слоем. Вблизи стенки скорость изменяется приблизительно линейно с  $y^+$  и постепенно переходит к закону стенки при больших  $y^+$ .

Область следа пролегает между логарифмическим слоем и кромкой ТПС. Скорость асимптотически стремится к закону стенки при  $y/\delta \rightarrow 0$  и значительно отличается от него при приближении к внешнему потоку.

$$u^+ = v^x / (\tau^{xx}|_{y=0} / \rho)^{1/2}$$



## ***Область применимости алгебраических моделей***

В настоящее время алгебраические модели практически уступили свое место дифференциальным.

***Однако в течениях, для которых разработаны алгебраические модели их применение, безусловно, является оправданным.***

***Но даже в таких ситуациях реализация и использование алгебраических моделей в современных кодах может быть довольно непростой задачей.***

Кроме того, *эти модели могут быть использованы в пристенной области при использовании гибридных методов и при разработке пристенных функций.*

# Полуэмпирические модели турбулентности

160

- Модели, использующие гипотезу Буссинеска (линейные модели, EVM). Обычно классифицируются по количеству дифференциальных уравнений переноса
  - Алгебраические модели
  - Модели с одним уравнением
    - ✓ модель Спаларта-Аллмареса SA
    - ✓ модель Секундова  $v_f$ -92
  - Модели с двумя уравнениями
    - ✓ Модели типа  $k$ - $\varepsilon$
    - ✓ Модели типа  $k$ - $\omega$ 
      - Модель Ментера SST
  - .....
- Модели рейнольдсовых напряжений (нелинейные модели)
  - Дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений (DRSM)
  - Алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (ARSM)
  - Явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (EARSM)
    - ✓ Нелинейные модели (NLM)



# Модели с одним дифференциальным уравнением

Дифференциальное уравнение может быть записано относительно различных переменных

- Первые модели были основаны на уравнении для кинетической энергии турбулентности
  - Требуется дополнительных алгебраических соотношений для замыкания
    - ✓ Диссипация (формула Колмогорова)  $\varepsilon = C_d \frac{K_t^{3/2}}{L_t}$
    - ✓ Турбулентная вязкость  $\nu_t = C_\mu \frac{K_t^2}{\varepsilon}$
    - ✓ Линейный масштаб турбулентности
  - Эти модели не более универсальны чем алгебраические модели
- Аналогичные проблемы характерны для моделей, основанных на других переменных
  - Турбулентное число Рейнольдса (модель Болдуина-Барса)
- Наиболее успешными являются модели, решающие уравнение относительно турбулентной вязкости
  - Модель Спаларта-Аллмареса
  - Модель Секундова  $\nu_t$ -92

Модели с двумя уравнениями  
для кинетической энергии  
турбулентности  $k$   
и диссипации  $\varepsilon$

## Модели типа $k-\varepsilon$

Различаются по способу описания влияния пристенных эффектов

- Высокорейнольдсовые модели
  - «Стандартная» модель
  - RNG модель
  - Для учета влияния стенок используются пристенные функции
    - ✓ Основаны на законе стенки
  - **Достоинство: возможно использование более грубых сеток**
  - **Недостаток: предписанный закон стенки**
- Низкорейнольдсовые модели
  - Launder-Sharma
  - Chien
  - Для учета влияния стенок в модель вводятся специальные демпфирующие функции
    - ✓ Аналог демпфирующей функции Ван-Дрифта
  - **Недостаток: получается жесткая система уравнений**
- Модели типа  $k-\varepsilon$ 
  - **Достоинство: расчет свободных течений**
  - **Недостаток: неправильное предсказание точки отрыва**



Модели типа  $k-\varepsilon$  постепенно вытесняются более совершенными моделями

# Уравнение переноса кинетической энергии турбулентности

- Уравнение для кинетической энергии турбулентности  $k = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}$  получается путем свертки уравнений для рейнольдсовых напряжений

- В случае несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} + D_j \right) - \varepsilon$$

➤ Турбулентная диффузия  $D_j = -\overline{u'_j \left( \frac{u'_i u'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)}$

➤ Генерация  $P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$

➤ Диссипация  $\varepsilon = -2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$

- Для замыкания этого уравнения необходимо определить турбулентную диффузию, диссипацию и соотношение, связывающее напряжения Рейнольдса и кинетическую энергию турбулентности

- В сжимаемом случае добавляются слагаемые «работа давления» и «давление-растяжение»

## Замыкание уравнения для $k$

- Без привлечения дополнительного уравнения переноса для замыкания уравнения для  $k$  можно воспользоваться следующими соотношениями

➤ Гипотеза Буссинеска  $-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_T \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$

➤ Гипотеза градиентной диффузии  $-\overline{u'_i \phi'} \approx \nu_T \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$

- ✓ Если пренебречь корреляцией давления и скорости (для некоторых течений это обосновано на базе DNS)

$$-u'_j \left( \frac{u'_i u'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right) = \frac{\nu_T}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

➤ Замена диссипации линейным масштабом  $\varepsilon = C_D \frac{k^{1.5}}{L_t}$

- ✓ Для определения линейного масштаба необходимо привлечь дополнительные соотношения

– Например, во внутренней области ПС  $L_t = \kappa \cdot d_w$

➤ Формула Колмогорова  $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$

➤ Гипотеза Невзглядова-Драйдена  $\tau_{xy} \approx a_1 k \Rightarrow \nu_t S = a_1 k$

- Эти гипотезы могут быть дополнены теми или иными демпфирующими функциями, учитывающими близость твердых стенок

## Модели с одним дифференциальным уравнением

- На основе уравнения для кинетической энергии турбулентности было построено большое количество различных моделей
  - Emmons (1954)
  - Глушко (1965)
  - Wolfshtein (1967)
  - Bradshaw, Ferriss, Atwell (1967)
  - Goldberg (1991)
- Эти модели не намного более универсальны чем алгебраические модели
  - Аналогичные проблемы характерны для моделей, основанных на других переменных
    - ✓ Турбулентное число Рейнольдса
      - Baldwin, Barth (1990)



Практически не используются в настоящее время

# Уравнение переноса изотропной диссипации $\varepsilon$

- Это уравнение можно вывести из уравнений Навье-Стокса при помощи процедуры осреднения по Рейнольдсу
  - Продифференцировать уравнение Навье-Стокса по координате
  - Свернуть с производной пульсации скорости
  - Осреднить по Рейнольдсу

$$\overline{2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} [NS]} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = P_\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + D_{\varepsilon,j} \right) - \varepsilon_\varepsilon$$

- Полученное уравнение содержит много слагаемых, которые необходимо моделировать

➤ Генерация 
$$P_\varepsilon = -2\nu \left[ \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - 2\nu \cdot u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j} - 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m}$$

➤ Диссипация 
$$\varepsilon_\varepsilon = -2\nu^2 \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m}$$

➤ Турбулентная диффузия 
$$D_{\varepsilon,j} = -\nu \cdot u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}$$

- Обычно предполагают, что генерация, диссипация и коэффициент диффузии для  $\varepsilon$  пропорциональны аналогичным величинам для  $k$

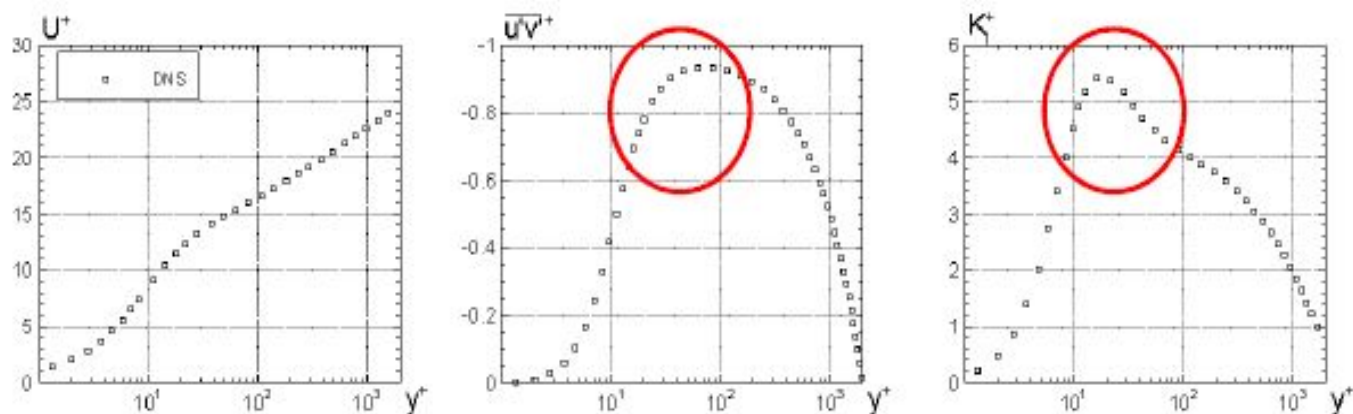
# Особенности пристенной турбулентности 168

- Характерной особенностью пристенной турбулентности является наличие пика  $k$  в переходной области
  - В профиле касательного напряжения пика нет
- Это невозможно воспроизвести с использованием формулы Колмогорова

$$\overline{u'v'} = \nu_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$



«Стандартная»  $k$ - $\varepsilon$  модель не применима в переходной области



Профили скорости, касательного напряжения Рейнольдса и кинетической энергии турбулентности во внутренней области пограничного слоя



## Модели типа $k-\varepsilon$

Модели типа  $k-\varepsilon$  можно разделить по способу описания влияния пристенных эффектов

- Низкорейнольдсовые модели
  - Chien
  - Launder-Sharma
  - Для учета влияния стенок в модель вводятся специальные демпфирующие функции
    - ✓ Аналог демпфирующей функции Ван-Дрифта
  - Недостаток: получается жесткая система уравнений
- Высокореинольдсовые модели
  - «Стандартная» модель
  - RNG модель
  - Для учета влияния стенок используются пристенные функции
    - ✓ Основаны на законе стенки
  - Достоинство: возможно использование более грубых сеток
  - Недостаток: предписанный закон стенки

# Гибридные модели

- Гибридные модели (зональные, двухслойные) - еще один способ использования высокорейнольдсовых  $k$ - $\varepsilon$  моделей турбулентности для расчета пристенных течений
  - Вблизи стенки используется другая модель турбулентности
    - ✓ Алгебраическая
    - ✓ С одним уравнением для  $k$
- Недостатки
  - Алгоритм определения границы между моделями
    - ✓ Автоматическое определение снижает устойчивость
    - ✓ Определение «вручную» неприменимо к областям сложной геометрии
  - «Сшивки» условий для турбулентных характеристик
  - Определение характеристик пограничного слоя, необходимых для алгебраических моделей
  - Неуниверсальность пристенных моделей
- В пакете Fluent при использовании стандартной  $k$ - $\varepsilon$  модели вблизи стенки можно использовать модель Wolfstein с одним уравнением для  $k$

# Достоинства и недостатки моделей типа $k-\varepsilon$

171

- Достоинства
  - Расчет свободных сдвиговых течений
  - Огромный опыт расчетов
    - ✓ Хорошо изучены их свойства и границы применимости
- Недостатки
  - Проблемы при расчете пристенных течений
    - ✓ Низкорейнольдсовы модели крайне капризны в вычислительном плане
    - ✓ Применение пристенных функций приводит к ошибкам при расчете отрывных течений (и не только)
  - При расчете пограничных слоев с положительным (неблагоприятным) градиентом давление все модели склонны к завышению генерации кинетической энергии турбулентности
    - ✓ Завышение трения
    - ✓ Затягивание отрыва
  - Существуют модификации для устранения этого недостатка
    - ✓ Добавление в уравнение для  $\varepsilon$  слагаемых вида
      - Дополнительная нелинейность

$$f_\varepsilon = \max \left[ \left( \frac{l}{\kappa C_\mu^{-3/4} y} - 1 \right) \left( \frac{l}{\kappa C_\mu^{-3/4} y} \right)^2 \frac{\varepsilon^2}{k}, 0 \right]$$



Модели типа  $k-\varepsilon$  постепенно вытесняются более совершенными моделями

## Модели типа $k-\omega$

- Вместо  $\varepsilon$  используется для удельная диссипация  $\omega$  ( $\varepsilon = C_\mu k \omega$ )
- Комбинацию уравнений для  $k$  и  $\omega$  предложил Колмогоров (1942)
- Модели типа  $k-\omega$  активно продвигались с 70х годов усилиями Wilcox'a
  - Оказалось, что эти модели способны к расчету пристенной турбулентности без введения специальных функций
    - Это выгодно отличает их от  $k-\varepsilon$  моделей
  - Однако их характеризует чрезвычайно высокая чувствительность к граничным условиям во внешнем потоке. В зависимости от значения  $\omega$  во внешнем потоке результат существенно меняется
    - ✓ Толщина плоских свободных сдвиговых течений в  $\sim 1.5$  раза
    - ✓ Толщина осесимметричных свободных сдвиговых течений в  $\sim 5$  раз
- Для преодоления чувствительности к граничным условиям в уравнении для  $\omega$  должен присутствовать cross-diffusion term

$$\rho \frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_\omega \mu_T) \nabla \omega) + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \rho \beta \omega^2 + \sigma_d \frac{\rho}{\omega} (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)$$

В настоящее время существуют десятки  $k-\omega$ , но наиболее успешной среди них является модель Ментера SST

# Модель Ментера SST.

- Модели типа  $k-\varepsilon$ 
  - Хорошо предсказывают свойства свободных сдвиговых течений
  - При расчете пристенных течений
    - ✓ Требуют специальных усилий
      - Пристенные функции
      - Низкорейнольдсовы поправки
    - ✓ Проблемы с положительным градиентом давления
- Модели типа  $k-\omega$ 
  - Обеспечивают правильное описание пристенной турбулентности
  - Чувствительны к граничным условиям во внешнем потоке
- Модель SST - гибридная модель
  - В пристенной области используется  $k-\omega$  модель
  - Во внешнем потоке используется  $k-\varepsilon$  модель
  - Используется формула Брэдшоу в середине пограничного слоя

$$\overline{u'v'} = 0.31 \cdot k$$

В целом по качеству превосходит все другие модели турбулентности, но по вычислительной простоте и затратам уступает моделям с одним уравнением

- Дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений (DRSM)
  - Для каждой из 6 независимых компонент тензора рейнольдсовых напряжений решается дифференциальное уравнение
  - Для замыкания этой системы необходимо добавить еще одно уравнение
    - ✓ для  $\varepsilon$  или  $\omega$
- Алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (ARSM)
  - Алгебраические связи между рейнольдсовыми напряжениями и осредненными параметрами потока
  - Необходимо получить масштабы турбулентности
    - ✓ База модели: два дифференциальных уравнения ( $k$ - $\varepsilon$  или  $k$ - $\omega$ )
- Явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (EARSM)
  - Алгебраические связи разрешаются относительно рейнольдсовых напряжений.
    - ✓ Для связи между тензором рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций используются нелинейные соотношения
    - ✓ Эти модели часто называют нелинейными моделями (NLM)

- Потенциально превосходят модели турбулентной вязкости по способности расчета различных течений
- Полученное решение может быть неприемлемым с физической точки зрения. Это происходит, когда оно не удовлетворяет принципу реализуемости  $\overline{u_i'^2} \geq 0, \overline{u_i'^2} \cdot \overline{u_j'^2} \geq (\overline{u_i' u_j'})^2, \det \{ \overline{u_i' u_j'} \} \geq 0$

- Проблемы вычислительного характера
  - Существенные вычислительные затраты и проблемы со сходимостью
  - Дифференциальные модели
    - ✓ Решение системы из 7 уравнений переноса
  - Алгебраические модели
    - ✓ Решение системы трансцендентных алгебраических уравнений
    - ✓ Невозможность гарантировать существование и единственность решения



Несмотря на потенциальные преимущества, модели Рейнольдсовых напряжений используются гораздо реже, чем модели турбулентной вязкости

## Кризис в развитии моделей турбулентности

- Предложены сотни полуэмпирических моделей турбулентности
  - Универсальная RANS модель так и не создана
    - ✓ Это означает наличие кризиса в полуэмпирической теории турбулентности
- Параметры многих турбулентных течений определяется относительно крупными (с размерами порядка макро-масштаба течения) устойчивыми когерентными вихревыми структурами, зависящими от конкретной геометрии течения и граничных условий
  - Эти структуры имеют мало общего с универсальными хаотичными вихрями, населяющими тонкие сдвиговые слои, для которых строятся и на которых калибруются полуэмпирические модели



Невозможно создать универсальную полуэмпирическую модель турбулентности



Огромный опыт, накопленный при эксплуатации полуэмпирических моделей турбулентности, привёл к ясному осознанию того, что надежды на создание универсальной модели турбулентности пригодной для расчёта всех или, по крайней мере, большинства турбулентных течений, казавшиеся вполне реальными ещё в 70–80-х годах прошлого (XX) века, едва ли осуществимы.

Это, в свою очередь, привело к значительному смещению акцентов в исследованиях, посвящённых моделированию турбулентности.

Всё больше внимания стало уделяться альтернативным (не использующим RANS) подходам.

Однако, в силу *исключительной вычислительной трудоёмкости* этих подходов, основным инструментом для расчёта сложных турбулентных течений, представляющих практический интерес, по-прежнему остаётся Полуэмпирическая Теория Турбулентности (ПТТ).

В этой области, наряду с традиционными исследованиями, направленными на усовершенствование существующих и разработку новых моделей турбулентности, в последнее время большое внимание уделяется проблеме тестирования и определения границ применимости таких моделей.

Эта работа проводится как отдельными исследователями, так и в рамках специальных международных программ, координируемых, в частности, Стэнфордским университетом в США, Комиссией ЕС по развитию научных исследований и Европейским Сообществом по Течениям, Турбулентности и Горению (ERC OFTAC).

Целью этих программ является выработка конкретных рекомендаций, позволяющих обоснованно выбрать ту или иную модель турбулентности при решении различных прикладных задач.

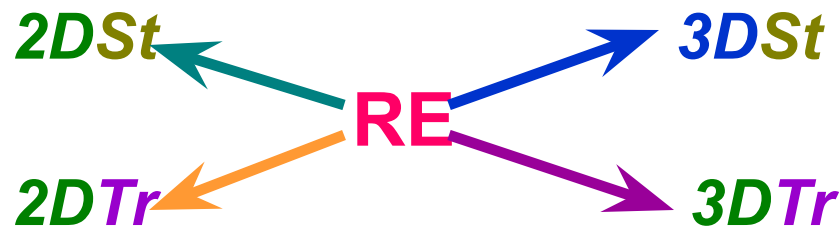
Значительный вклад в решение данной проблемы внесли три Стэнфордские международные конференции (1968, 1980 и 1990 гг.), получившие неофициальное название «олимпиад моделей турбулентности».

Среди более поздних попыток организации тщательного и всестороннего тестирования моделей турбулентности следует отметить Европейский проект по вычислительной гидродинамике ECARP, в рамках которого проведено сопоставление результатов расчётов достаточно широкого круга турбулентных течений, полученных с использованием самых разнообразных моделей турбулентности несколькими исследовательскими группами с помощью их собственных вычислительных программ.

Аналогичные усилия предпринимаются ERCOFTAC, под эгидой которого регулярно проводятся специализированные международные рабочие семинары, посвящённые детальному анализу результаты расчётов, полученных участниками в рамках одних и тех же моделей турбулентности для так называемых "тестовых течений", то есть специально отобранных экспериментов, содержащих, по мнению организаторов, наиболее надёжные и полные данные по тем или иным турбулентным течениям.

В результате в настоящее время накоплена весьма обширная и объективная (свободная от вычислительных ошибок и не связанная со спецификой конкретных численных реализации) информация о возможностях различных полуэмпирических моделей турбулентности.

Следует отметить, что в рамках этого подхода уравнения Рейнольдса (**RE**) могут решаться в двумерной (**2D**) или трёхмерной (**3D**) постановках, стационарными (**St**) или нестационарными (**Tr**):



180

Кроме того, в некоторых задачах могут быть использованы упрощённые уравнения:

- ♦ приближение пограничного слоя,
- ♣ приближение узкого канала,
- ♥ параболизированные уравнения.

Выбор системы уравнений зависит от рассматриваемой задачи и должен соответствовать рассматриваемому типу течения (примеры: пограничный слой, канал, струя, цилиндр).

В частности, иногда изначально двумерные задачи решаются в трёхмерной нестационарной постановке (такой подход в западной литературе называется URANS).

При этом наиболее крупные когерентные структуры оказываются разрешёнными и характер решения напоминает LES.

***Однако в силу отсутствия достаточного обоснования этот подход в настоящее время оценивается неоднозначно.***

**Вычислительные ресурсы и перспективы  
практического применения различных методов  
моделирования турбулентных течений  
(P. Spalart, 2000)**

Метод	Необходимое число узлов сетки	Необходимое число шагов по времени	Готовность
2D Steady RANS	$10^5$	$10^{3.5}$	1980
3D Steady RANS	$10^7$	$10^3$	1985
3D Unsteady RANS	$10^7$	$10^{3.5}$	1995
DES (гибридный метод)	$10^8$	$10^4$	2000
LES	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
DNS	$10^{16}$	$10^{7.7}$	2080

Из таблицы видно, что в ближайшие годы основными подходами к решению сложных прикладных задач будет классический подход, основанный на двумерных и трёхмерных уравнениях Рейнольдса (RANS URANS), или гибридные подходы, включающие его как составную часть.

***Таким образом, по крайней мере в течение ближайших 40-50 лет, человечество обречено использовать те или иные модели турбулентности.***

## **Вопросы, выносимые на зачёт**

1. Конвекция: естественная и вынужденная.  
Определить, основные различия. Конвективный теплообмен, типы.
2. Конвективная теплоотдача.  
Коэффициент теплоотдачи (определение, размерность в СИ, типы).  
Основные факторы, влияющие на величину коэффициента теплоотдачи.  
Общий вид функциональных зависимостей для числа Нуссельта при различных видах конвекции (сходящие в соотношения величины пояснить).
3. Реологическое соотношение. Ньютоновская жидкость.  
Идеальная жидкость. Коэффициент (динамически и кинематический) вязкости (определения, размерность).
4. Критериальные числа Рейнольдса, Грасгоффа, Прандтля, Пекле, Нуссельта, Маха.
5. Ламинарное и турбулентное течение. Критическое число Рейнольдса.  
Каскадный перенос энергии. Колмогоровский масштаб.
6. Усреднение по Рейнольдсу. Общие принципы. Классификация моделей турбулентности.



*ДЗЯКУЙ  
ЗА ЎВАГУ*

*СПАСИБО  
ЗА ВНИМАНИЕ*

*THANK FOR  
YOUR ATTENTION*