Семенович Олег Вячеславович

старший научный сотрудник

ОИЭЯИ-Сосны НАН Беларуси

старший преподаватель

КЯФ, физфак, БГУ

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС

В

ЯДЕРНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ЯДЕРНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

Тема № 1. **Основные положения теории тепломассообмена (4 ч.: Л-1 и Л-2).**

Тема № 2. **Теплопроводность (стационарные и нестационарные процессы) (4 ч.: Л-3 и Л-4).**

Тема №3. **Теплофизические свойства топливных элементов, теплоносителей и конструкционных материалов реакторных установок. Методы определения теплофизических характеристик. Датчики температур (20 ч.: ЛР-1; ЛР-2; ЛР-3; ЛР-4; ЛР-5).**

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС
В ЯДЕРНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

Тема № 4. **Теплообмен излучением (радиационный теплообмен). Сложный теплообмен.**
(1 ч.: Л-5).

Тема № 5. **Диффузионный массообмен**
(1 ч.: Л-5).

Тема №6. **Конвективный тепломассообмен в однофазных потоках**
(4 ч.: Л-6 и Л-7).

Тема № 7. **Основные положения теории пограничного слоя**
(2 ч.: Л-8).

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ЯДЕРНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

Тема № 8. **Конденсация. Кипение**
(2 ч.: Л-9).

Тема № 9. **Гидродинамика и теплообмен двухфазных потоков**
(1 ч.: Л-10).

Тема № 10. **Тепломассообмен при течении в каналах и пучках труб (стержней)**
(1 ч.: Л-10).

Тема № 11. **Процессы гидродинамики и теплообмена в ядерных реакторах при различных режимах работы**
(2 ч.: Л-11).

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ЯДЕРНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

Тема № 12. **Особенности процессов гидродинамики и теплообмена в активных зонах реакторов**
(2 ч.: Л-12).

Тема № 13. **Процессы гидродинамики и теплообмена в парогенераторах**
(1ч.: Л-13).

Тема № 14. **Тепломассообмен в ЯЭУ при аварийных ситуациях**
(1ч.: Л-13).

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

1. Определение коэффициентов теплопроводности материалов абсолютным методом; определение теплофизических характеристик твёрдых материалов в регулярном режиме при граничных условиях 1-го и 2-го рода.
2. Определение коэффициентов теплопроводности и температуропроводности методом источника постоянной тепловой мощности.
3. Определение теплофизических характеристик твёрдых материалов в регулярном режиме при граничных условиях 1-го и 4-го рода и исследование зависимости коэффициента температуропроводности от температуры.
4. Изучение эффекта Зеебека и градуировка термопар.
5. Градуировка металлических термометров сопротивления; градуировка полупроводниковых термометров сопротивления (термисторов).

1. Слеттери, Дж. С. Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах / Дж. С. Слеттери. – М.: Энергия, 1978. – 448 с.

2. Галин, Н.М. Тепломассообмен (в ядерной энергетике): Учеб. пособие для вузов / Н.М. Галин, П.Л. Кириллов. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 376 с.

3. Кириллов, П.Л. Справочник по теплогидравлическим расчётам (ядерные реакторы, теплообменники, парогенераторы); 2-е изд., перераб. и доп. / П.Л. Кириллов, Ю. С. Юрьев, В.П. Бобков; Под общ. ред. П.Л. Кириллова. — М.: Энергоатомиздат, 1990. – 360 с.

4. Теплообмен в ядерных энергетических установках: Учебное пособие для вузов; 3-е изд., перераб. и доп. / Б.С. Петухов [и др.]. – М.: Издательство МЭИ, 2003. – 548 с.

5. Кириллов, П.Л. Тепломассообмен в ядерных энергетических установках: Учебное пособие для вузов; 2-е изд., перераб. / П. Л. Кириллов, Г.П. Богословская. – М.: ИздАт, 2008. – 256 с.

6. Кутателадзе, С.С. Основы теории теплообмена / С.С. Кутателадзе. – Изд. 5-е перераб. и доп. – М.: Атомиздат, 1979. – 416 с.

7. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент: Справочник / Под общ. ред. В.А. Григорьева и В.М. Зорина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 512 с.

8. Берд, Р. Явления переноса / Р. Берд, В. Стьюарт, Е. Лайтфут. – М.: «Химия», 1974. – 688 с.

9. Себиси, Т. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы / Т. Себиси, П. Брэдшоу. – М.: Мир, 1987. – 592 с.

10. Делайе, Дж. Теплообмен и гидродинамика двухфазных потоков в атомной и тепловой энергетики / Дж. Делайе, М. Гио, М. Ритмюллер. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 424 с.

11. Кириллов, П.Л. Гидродинамические расчеты: Справочное учебное пособие / П.Л. Кириллов, Ю.С. Юрьев. – М.: ИздАт, 2009. – 216 с.

12. Кузнецов, Ю.Н. Теплообмен в проблеме безопасности ядерных реакторов / Ю.Н. Кузнецов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 296 с.

13. Лукашевич, Б.И. Парогенераторы реакторных установок ВВЭР для атомных электростанций. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2004.– 391 с.

14. Рассохин, Н.Г. Парогенераторные установки атомных электростанций: Учебник для вузов; 3-е изд., перераб. и доп. / Н.Г. Рассохин. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 384 с.

15. Логвинов, С.А. Экспериментальное обоснование теплогидродинамической надежности реакторов ВВЭР / С.А. Логвинов, Ю.А. Безруков, Ю.Г. Драгунов. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2004. – 255 с.

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ЯДЕРНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

Тема №1

Основные положения теории тепломассообмена

Основные понятия термомеханики сплошных сред:

сплошная среда;

тело;

движение;

деформация;

материальные координаты;

силы –

внешние, взаимные, контактные;

принцип напряжений.

Теорема переноса.

Теорема переноса для области, содержащей сингулярную поверхность.

Законы сохранения массы, импульса, момента импульса, энергии в интегральной форме.

Дифференциальная форма законов сохранения массы, импульса, момента импульса, энергии.

Критерии подобия; критериальные числа (числа подобия).

Критерий Кнудсена.

СПЛОШНАЯ СРЕДА

СПЛОШНАЯ СРЕДА – физико-математическая абстракция, согласно которой материя рассматривается как система «ЧАСТИЦ» или «МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК» (точечных объектов, обладающих массой), распределённых в пространстве Е (трёхмерном евклидовом) таким образом, что существует взаимно однозначное непрерывное отображение этой системы на пространство Е:
каждой точке пространства Е соответствует некоторая (и только одна) частица (материальная точка), и наоборот,
каждой частице (материальной точке) соответствует некоторая (и только одна) точка пространства Е, называемая её МЕСТОМ.

Введём обозначения:

ζ **– частица (материальная точка),** $\quad$ z **– точка пространства** E **(место) .**

В таком случае, сказанное выше можно сформулировать следующим образом:

$$z = X(\zeta) \quad , \qquad \textbf{(1)} \qquad\qquad \zeta = X^{-1}(z) \quad . \qquad \textbf{(2)}$$

ТЕЛО

ТЕЛО – совокупность материальных точек, занимающих в каждый момент времени некоторую замкнутую область пространства Е.

Из вышеизложенного следует, что существует взаимно однозначное непрерывное отображение тела на область пространства Е.

Это отображение называется КОНФИГУРАЦИЕЙ тела.

При рассмотрении поведения тела во времени ***конфигурацию в начальный момент времени*** будем называть ИСХОДНОЙ, *конфигурацию в рассматриваемый (текущий) момент времени* – АКТУАЛЬНОЙ.

СИСТЕМА ОТСЧЁТА

Система отсчёта – возможный способ связи физической реальности с трёхмерным евклидовым пространством Е и действительной осью времени.

СИСТЕМА ОТСЧЁТА – группа объектов (тел), взаимное расположение которых остаётся неизменным в течение всего интервала времени, в который ведётся наблюдение (изучение) поведения исследуемого тела или исследуемой системы тел.

Система отсчёта и система координат – не одно и то же.

Система отсчёта – совокупность материальных объектов.

Система координат – математический способ описания положения тел в пространстве-времени.

СИСТЕМА КООРДИНАТ

СИСТЕМА КООРДИНАТ – схема правил описывающих (представляющих) каждый объект (точку) некоторого класса (пространства, области пространства) *G* соответствующим упорядоченным набором (действительных или комплексных) чисел (компонент, координат) *x1, x2,.. .*

Число координат, требуемых для определения каждой точки (x1,x2, … , xN) называется РАЗМЕРНОСТЬЮ пространства *C.*

В дальнейшем будем иметь дело с ***трёхмерным евклидовым пространством***.

Будет применяться ***декартова прямоугольная*** (как правило) система координат, реже – ***цилиндрическая*** и ***сферическая***.

ДВИЖЕНИЕ

Выбрав систему координат, конфигурацию можно тела ***B*** можно описать, аналогично (1) и (2), задав множество радиус-векторов частиц, составляющих тело:

$$\left\{z^{\alpha}\right\}_{B}=\chi\left(\left\{\zeta\right\}_{B}\right) \quad , \quad (3) \qquad \left\{\zeta\right\}_{B}=\chi^{-1}\left(\left\{z^{\alpha}\right\}_{B}\right) \quad . \quad (4)$$

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА – однопараметрическое семейство конфигураций,

действительным параметром которого является время *t:*

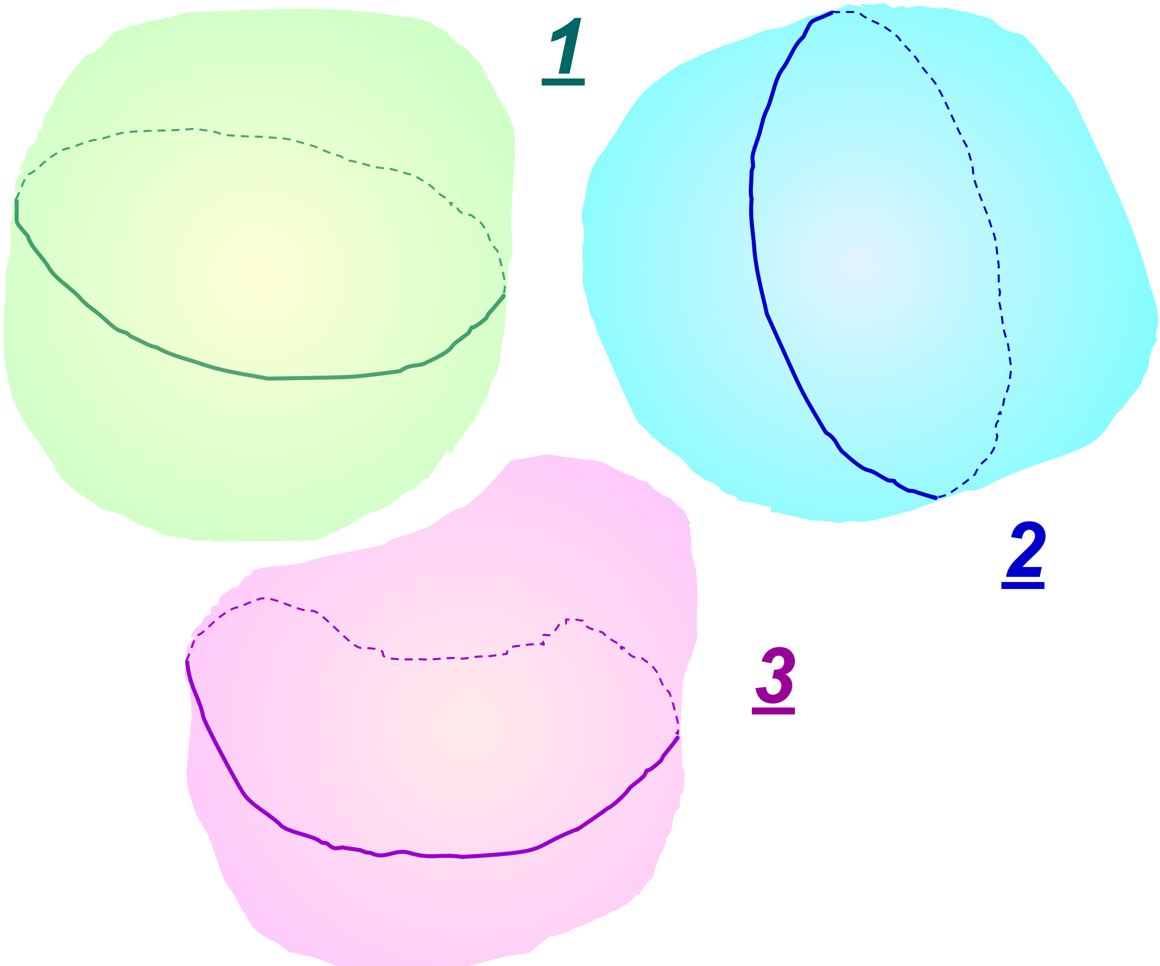
$$\left\{z^{\alpha}\right\}_{B}=\chi\left(\left\{\zeta, t\right\}_{B}\right) \quad , \quad (5) \qquad \left\{\zeta\right\}_{B}=\chi^{-1}\left(\left\{z^{\alpha}, t\right\}_{B}\right) \quad . \quad (6)$$

Тело **B** и любая из его пространственных конфигураций, очевидно, не одно и то же.

Но для наблюдения и изучения тело доступно только в своих конфигурациях.

ДЕФОРМАЦИЯ

ДЕФОРМАЦИЯ (*от лат. Deformatio – «искажение»*) – изменение взаимного положения частиц тела, связанное с их перемещением относительно друг друга.



Место некоторой частицы тела в конфигурации κ обозначим так:

$$z_{\kappa}^{\alpha}=\kappa(\zeta) \quad . \tag{7}$$

Частица в точке z_{κ}^{α} конфигурации κ может быть представлена в виде

$$\zeta=\kappa^{-1}\left(z_{\kappa}^{\alpha}\right) \quad . \tag{8}$$

Если χ – движение тела, то можем записать

$$z^{\alpha}=\chi(\zeta, t)=\chi_{\kappa}\left(z_{\kappa}^{\alpha}, t\right)\equiv\chi\left(\kappa^{-1}\left(z_{\kappa}^{\alpha}\right), t\right). \tag{9}$$

Выражение (9) определяет **семейство *деформаций*** по сравнению с исходной конфигурацией.

Индекс κ указывает на то, что форма χ_{κ} зависит от выбора конфигурации.

МАТЕРИАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Выбрав систему координат (*прямоугольную, декартову*) радиус-вектор z_κ^α частицы ζ в начальный момент времени, когда она находится в начальной конфигурации κ_0, можно записать в координатах :

$$z_{\kappa_0}^\alpha = z_{\kappa_0 i}\, e_i^\alpha \quad . \tag{10}$$

Координаты $z_{\kappa_0 i}$ называются *материальными координатами* материальной частицы ζ .

Таким образом, **МАТЕРИАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ** – координаты в начальной конфигурации.

Уравнение (9) можно записать в материальных координатах:

$$z^\alpha = \chi_\kappa\left(z_\kappa^\alpha, t\right) = \chi_\kappa\left(z_{\kappa 1}, z_{\kappa 2}, z_{\kappa 3}, t\right). \tag{11}$$

Материальная (субстанциональная) производная

Материальная (субстанциональная) производная – это производная по времени в системе материальных координат:

$$\frac{d_m A}{dt} \equiv \frac{DA}{dt} \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{z_\kappa^\alpha} \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{z_\kappa^1, z_\kappa^2, z_\kappa^3} . \qquad (12)$$

Выберем систему координат. Зафиксируем некоторую точку пространства (*например, совпадающую с пространственным положением центра масс тела в его исходной конфигурации*).

Частная производная по времени – производная по времени, вычисляемая в данной точке:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{z^\alpha} \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{z^1, z^2, z^3} . \qquad (13)$$

Если положение точки z^{α} в выбранной системе координат совпадает в её положением $z^{\alpha}_{\kappa_0}$ в исходной конфигурации, то частная производная по времени и субстанциональная производная совпадают в начальный момент.

В дальнейшем по мере движения точки (со скоростью v^{α}) эти величины становятся различными.
Они соотносятся следующим образом:

$$\frac{DA}{dt} \equiv \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla A \cdot v \equiv A_{,t} + A_{,\alpha} \cdot v^{\alpha}. \qquad (14)$$

Рассмотрим поведение частицы в системе отсчёта, которая движется со скоростью w^{α} относительно фиксированной системы координат.

ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ – это производная по времени в системе отсчёта, движущейся относительно выбранной системы координат

со скоростью w^{α} :

$$\frac{dA}{dt} \equiv \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla A \cdot w \equiv A_{,t} + A_{,\alpha} w^{\alpha} . \qquad (15)$$

Очевидно, что справедливы соотношения

$$\frac{dA}{dt} \equiv \frac{DA}{dt} + A_{,\alpha}\left(w^{\alpha} - v^{\alpha}\right) . \qquad (16)$$

$$\frac{DA}{dt} \equiv \frac{dA}{dt} + A_{,\alpha}\left(v^{\alpha} - w^{\alpha}\right) . \qquad (17)$$

Если A вектор или тензор 2-го порядка, выражения (14) и (15) принимают, соответственно, вид (14а), (14б) и (15а), (15б):

$$\frac{D\,A^{\beta}}{d\,t} \equiv A^{\beta}{}_{,t} + A^{\beta}{}_{,\alpha} v^{\alpha} \quad , \tag{14а}$$

$$\frac{D\,A^{\alpha\beta}}{d\,t} \equiv A^{\alpha\beta}{}_{,t} + A^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\, v^{\alpha} \quad , \tag{14б}$$

$$\frac{d\,A^{\beta}}{d\,t} \equiv A^{\beta}{}_{,t} + A^{\beta}{}_{,\alpha} v^{\alpha} \quad , \tag{15а}$$

$$\frac{d\,A^{\alpha\beta}}{d\,t} \equiv A^{\alpha\beta}{}_{,t} + A^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\, v^{\alpha} \quad . \tag{15б}$$

Законы сохранения

МАССЫ,
ИМПУЛЬСА
(КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ),
МОМЕНТА ИМПУЛЬСА,
ЭНЕРГИИ

в интегральной форме.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ

Закон сохранения массы можно сформулировать так:

"***МАССА ТЕЛА НЕ ЗАВИСИТ ОТ ВРЕМЕНИ***".

Таким образом, постулируется, что масса тела (или любого его участка, который в свою очередь также является телом) не изменяется с течением времени при любом числе перемещений, вращений и деформаций.

Введем следующие обозначения:

$\rho(x^{\alpha}, t) \equiv \rho$ – массовая плотность вещества, $\text{кг}/\text{м}^3$ из которого состоит тело,

$V_m(t)$ – материальный объём тела м^3 (объём области пространства, занимаемой телом в его текущей конфигурации),

M – масса тела, кг

x^{α} – радиус вектор,

t – время, с .

Для массы тела можем записать следующее выражение:

$$M = \int\limits_{V_m(t)} \rho\left(x^{\alpha}, t\right) dV. \tag{18}$$

Тогда **закон сохранения массы** выразим в виде

$$\frac{d}{dt} M \equiv \frac{d}{dt} \int\limits_{V_m(t)} \rho \, dV = 0. \tag{19}$$

СИЛА

Каждому телу ***A*** соответствует определённая система тел ***Ã,*** так чтобы масса этих тел являлась массой Вселенной.

Система тел ***Ã*** называется внешней, или окружающей, средой для тела ***A.***

Система сил является векторной функцией $B^{\alpha},(C)$ каждой пары тел.

Величина $B^{\alpha},(C)$ называется **<u>СИЛОЙ</u>**, с которой тело ***B*** действует на тело ***C***.

Система сил определяется следующими двумя свойствами или аксиомами.

1.

Для определённого тела ***A*** сила $f^{\alpha}\left(C, \tilde{A}\right)$

является аддитивной функцией,

определённой для всех тел ***C***, составляющих тело ***A***.

2.

Для определённого тела ***A*** сила $f^{\alpha}(A, C)$

является аддитивной функцией,

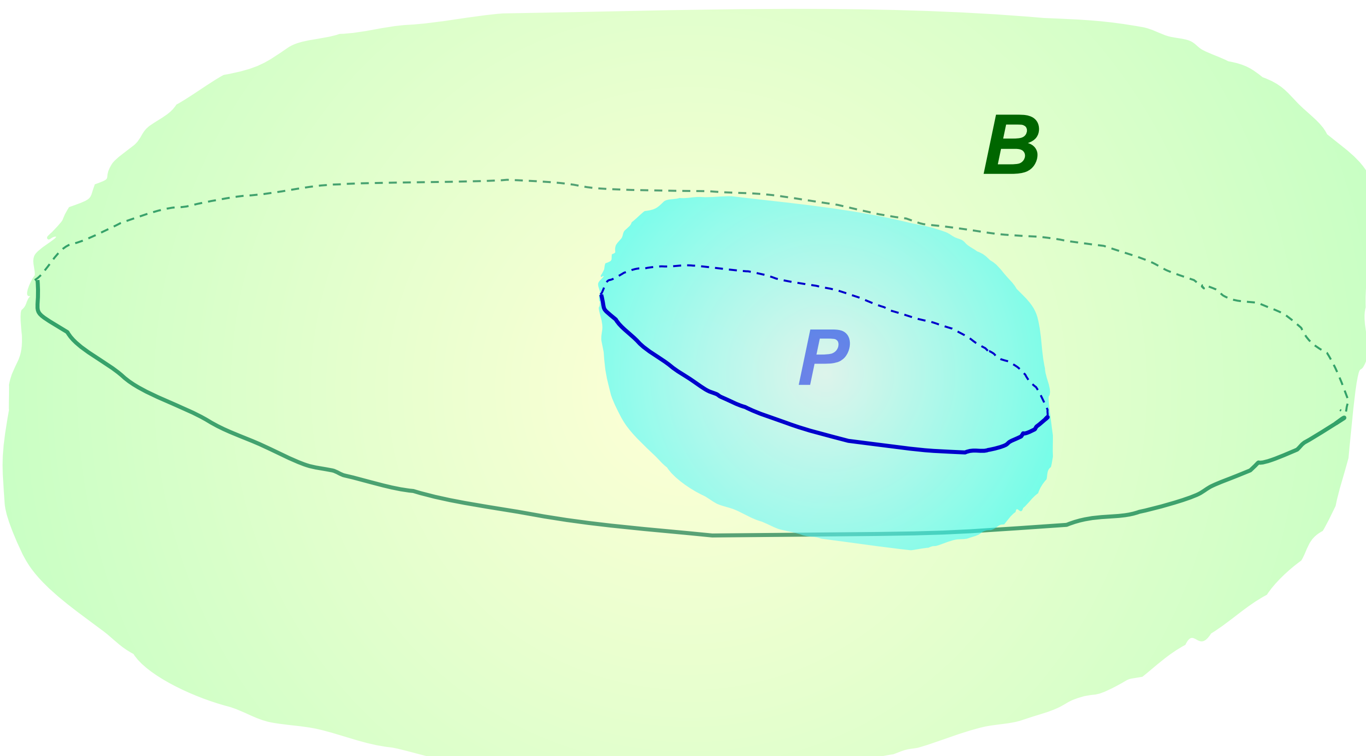
определённой для всех тел ***C***, составляющих тело ***Ã***.

Силы, с которыми приходится иметь дело в механике сплошных сред, ***классифицируют*** следующим образом:

внешние,

взаимные,

контактные.



ВНЕШНЯЯ СИЛА

ВНЕШНЯЯ СИЛА – сила, возникающая (по крайней мере от части) вне тела и действующая на материальные частицы, составляющие тело. *Пространственное векторное поле*.

Примеры: *сила тяжести, электростатическая сила между двумя заряженными телами*.

Пусть f_e^α – ***удельная*** (отнесённая к единице массы) внешняя сила, с которой окружающая среда $\widetilde{B}$ действует на тело **B.**

В таком случае для суммарной внешней силы, действующей на часть ***P*** тела ***B***, справедливо выражение

$$F_e^\alpha\Big|_P = \int\limits_{V_P} \rho f_e^\alpha\left(x^\beta\right) dV \quad . \qquad (21)$$

ВЗАИМНАЯ СИЛА

ВЗАИМНАЯ СИЛА – сила, возникающая внутри тела и действующая на пары материальных частиц, составляющих тело. *Векторное поле – функция материальных координат*.
Примеры: *межмолекулярные силы*, *электростатическая сила между двумя заряженными телами*.
Определим

$$B = (B - P) \cup P \quad ; \quad (B - P) \cap P = 0 \quad . \qquad (22)$$

Пусть f_m^α – ***удельная* взаимная** сила, с которой (***B-P***) действует на ***P***.
Общая взаимная сила, приложенная к ***P*** выражается так:

$$F_m^\alpha \Big|_P = \int\limits_{V_P} \rho f_m^\alpha \left(x^\beta\right) dV \quad . \qquad (23)$$

Сумма взаимных сил между всеми частями тела равна нулю.

КОНТАКТНАЯ СИЛА

КОНТАКТНАЯ СИЛА – сила, действующая на поверхности, ограничивающей часть ***P*** тела и эквивалентная силе, с которой часть (***B-P***) тела действует на ***P*** без учёта взаимных сил. *Контактная сила не является функцией координат*.

Примеры: *сила натяжения, сила, сила трения на границе раздела фаз*.

Пусть $t = t\left(x^{\alpha}, P\right)$ – ***напряжение*** (отнесённая к единице площади сила), с которым (***B-P***) действует на ***B*** в точке ***x***.

В таком случае для суммарная контактная сила, с которой (***B-P***) действует на ***B*** равна

$$T^{\alpha}\Big|_{P} = \int\limits_{S_P} \rho f_e^{\alpha}\left(x^{\beta}\right) dS \quad . \qquad (24)$$

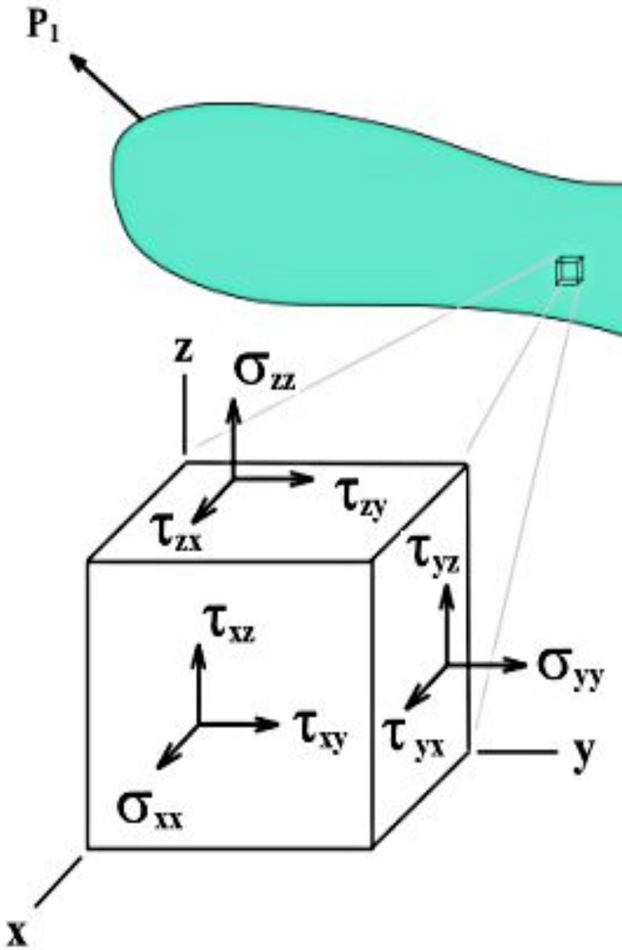
ПРИНЦИП НАПРЯЖЕНИЙ

Существует векторная функция $t^{\alpha} = t^{\alpha}\left(x^{\beta}, n^{\gamma}\right)$, определённая для всех точек тела ***B*** и для всех единичных векторов n^{γ} так, что напряжение, с которым (***B-P***) действует на любую часть ***P*** тела ***B*** можно записать в виде

$$t^{\alpha}\left(x^{\beta}, P\right) = t^{\alpha}\left(x^{\beta}, n^{\gamma}\right) \quad . \qquad (25)$$

n^{γ} – единичный вектор нормали к поверхности, ограничивающей ***P***.

$t^{\alpha}\left(x^{\beta}, n^{\gamma}\right)$ – вектор напряжений в точке x^{β}, действующий на ориентированный элемент поверхности ***P*** с нормалью n^{γ}, направленной внутрь (***B-P***), действующего этот на элемент поверхности с напряжением t^{α} .



$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА (КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ)

$$\int\limits_{V_m(t)} \rho v^{\alpha} dV$$ – ***импульс (количество движения)*. (26)**

"Скорость изменения импульса тела в инерциальной системе отсчета равна сумме сил, действующих на тело":

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V_m(t)} \rho v^{\alpha} dV = \int\limits_{S_m(t)} t^{\alpha} dS + \int\limits_{V_m(t)} \rho f^{\alpha} dV \quad . \qquad (27)$$

где

$v^{\alpha}(x^{\alpha}, t) \equiv v^{\alpha}$ – поле скорости, $м/с$;

S_m – площадь поверхности тела (материальная поверхность), $м^2$;

$f^{\alpha} \equiv f_e^{\alpha} + f_m^{\alpha}$ – суммарное поле внешних и взаимных сил, $Н$;

t^{α} – вектор напряжений, $Па$.

Вектор напряжений можно выразить через тензор напряжений $T^{\alpha\beta}$, $Па$:

$$t^{\alpha} \equiv T^{\alpha\beta} n^{\beta} \quad . \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)} \rho v^{\alpha}\, dV = \int_{S_m(t)} T^{\alpha\beta} n^{\beta}\, dS + \int_{V_m(t)} \rho f^{\alpha}\, dV \quad .$$

(28a)

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА (МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ)

$$\int\limits_{V_m(t)} \rho\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} r^\beta v^\gamma \, dV$$ – ***момент импульса.*** ***(29)***

"Скорость изменения момента импульса тела в инерциальной системе отсчета равна сумме моментов всех сил, действующих на тело":

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V_m(t)} \rho\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} r^\beta v^\gamma \, dV = \qquad (30)$$

$$= \int\limits_{S_m(t)} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} r^\beta t^\gamma \, dS + \int\limits_{V_m(t)} \rho\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} r^\beta f^\gamma \, dV \; .$$

Сделано предположение (общепринятое в механике сплошных сред) о том, что все моменты вращения, действующие на материал тела, являются результатом сил.

$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ – антисимметричный тензор Леви-Чевита;

r^{β} – радиус вектор, $м$.

ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ

Каждому телу ***A*** соответствует определённая система тел ***Ã,*** так чтобы масса этих тел являлась массой Вселенной.

Система тел ***Ã*** называется внешней, или окружающей, средой для тела ***A.***

Совокупность плотностей потоков переноса энергии является

скалярной функцией $Q(B,C)$ пары тел ***B*** и ***C***.

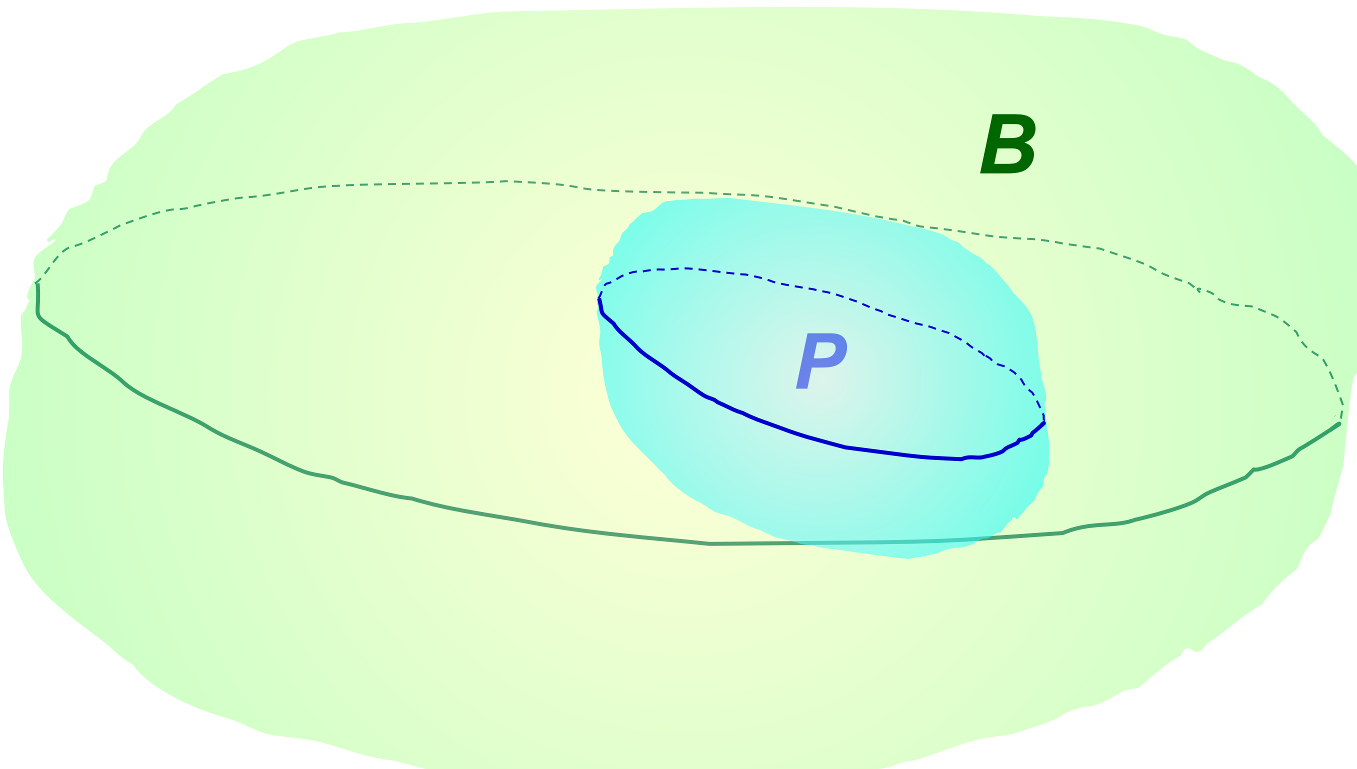
$Q(B,C)$ – плотность потока энергии от тела ***C*** к телу ***B***.

В механике сплошных сред типы переноса (передачи) энергии ***классифицируют*** следующим образом:

внешний,

взаимный,

контактный.



При определении плотностей потоков энергии руководствуются следующими аксиомами.

1.

Для заданного тела B плотность теплового потока $Q\left(C, \widetilde{B}\right)$ является аддитивной функцией, определённой для части C тела B .

2.

Для заданного тела B плотность теплового потока $Q(B, C)$ является аддитивной функцией, определённой для части C тела $\widetilde{B}$.

Из этого следует, что части тела получают энергию независимо друг от друга из различных участков окружающей среды.

ВНЕШНИЙ ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ

ВНЕШНИЙ ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ – энергия передаётся из окружающей среды материальным частицам, составляющим рассматриваемое тело.

Примеры: *передача солнечной радиации атмосфере Земли, индукционный нагрев твёрдого тела.*

Пусть Q_e – ***удельная*** плотность потока внешней энергии

передаваемой от окружающей среды $\tilde{B}$ телу **B.**

Для суммарной плотности потока внешней энергии, переданной части ***P*** тела ***B***, справедливо выражение

$$Q_{e_\Sigma} = \int_{V_P} \rho Q_e dV \quad . \qquad (31)$$

ВЗАИМНЫЙ ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ

ВЗАИМНЫЙ ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ – энергия передаётся между парой материальных частиц, составляющими рассматриваемое тело.

Пример: *излучение внутри потока горячего газа.*

Пусть Q_m – ***удельная*** мощность переноса энергии

от объёма ***(B-P)*** к объёму ***P*** .

Для суммарной плотности взаимного потока энергии, переданной части ***P*** тела ***B***, справедливо выражение

$$Q_{m_\Sigma} = \int_{V_P} \rho Q_m dV \quad . \qquad (32)$$

Сумма взаимных потоков энергии между любыми двумя частями ***P*** равна нулю.

КОНТАКТНЫЙ ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ

КОНТАКТНЫЙ ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ – перенос энергии через поверхность, ограничивающую часть ***P*** тела ***B***, что эквивалентно потоку энергии от части (***B-P***) тела ***B*** к ***P*** без учёта взаимных потоков энергии. *Контактный тепловой поток не является функцией координат*.

Пример: *теплоотдача от горячей стенки к омывающей её жидкости.*

Пусть $h = h\left(x^{\alpha}, P\right)$ – **контактный поток энергии** (отнесённая к единице площади мощность переноса энергии) от (***B-P***) к границе ***P*** в точке ***x***.

В таком случае для суммарная мощность контактного переноса энергии от (***B-P***) к ***P*** равен

$$h_{\Sigma}\Big|_{P} = \int\limits_{S_P} h\left(x^{\beta}, P\right) dS \quad . \qquad (33)$$

ПРИНЦИП ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ

Существует скалярная функция $h = h\left(x^{\beta}, n^{\gamma}\right)$, определённая для всех точек тела ***B*** и для всех единичных векторов n^{γ} так, что мощность контактного переноса энергии к любой части ***P*** тела ***B*** можно представить в виде

$$h\left(x^{\beta}, P\right) = h\left(x^{\beta}, n^{\gamma}\right) \quad . \tag{34}$$

n^{γ} – единичный вектор внешней нормали к поверхности, ограничи-вающей ***P***.

$h\left(x^{\beta}, n^{\gamma}\right)$ – контактный поток энергии в точке x^{β} через ориентированный элемент поверхности ***P*** с нормалью n^{γ}, направленной внутрь (***B-P***).

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

$$\int\limits_{V_m(t)} \rho\left(u + \frac{1}{2}v^{\alpha}v^{\alpha}\right)dV$$ – ***энергия тела.*** ***(35)***

u – удельная внутренняя энергия, $\text{Дж}/\text{кг}$.

"Скорость изменения во времени внутренней и кинетической энергии тела в инерциальной системе отсчёта равна сумме удельной работы, совершаемой над телом контактными силами, действующими на ограничивающую тело поверхность со стороны окружающей среды, удельной работы, совершаемой над телом внешними и взаимными силами, мощности контактного переноса энергии из окружающей среды через ограничивающую тело поверхность и мощности внешнего и взаимного переносов энергии":

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)} \rho\left(u+\frac{1}{2}v^{\alpha}v^{\alpha}\right)dV = \int\limits_{S_m(t)} v^{\alpha}T^{\alpha\beta}n^{\beta}\,dS + \int\limits_{V_m(t)} \rho v^{\alpha}f^{\alpha}\,dV + \int\limits_{S_m(t)} h\,dS + \int\limits_{V_m(t)} \rho Q\,dV \quad . \tag{36}$$

ТЕОРЕМА ПЕРЕНОСА

Теорема переноса (некоторые называют ее теоремой Лейбница или правилом Лейбница) является обобщением известного из математического анализа правила дифференцирования интеграла по параметру.

В случае дифференцирования по времени интеграла по объёму тела (материальному объёму) от некоторой функции координат и времени Ψ теорема переноса формулируется так:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)} \Psi\, dV = \int\limits_{V_m(t)} \left(\frac{D\Psi}{dt} + \Psi v^{\alpha}{}_{,\alpha} \right) dV \quad , \qquad (37)$$

Функция Ψ является функцией времени и координат (скаляр, вектор или тензор 2-го порядка).

Интегрирование ведётся по всей области пространства, занимаемой телом в его текущей конфигурации. В общем случае можно ожидать, что предел интегрирования является функцией времени.

Рассмотрим это интегрирование (левая часть уравнения (37)) по объёму в исходной конфигурации $\boldsymbol{\kappa}$. В этом случае предел интегрирования не зависит от времени и может быть выражен через материальные координаты ограничивающей поверхности. В свою очередь это означает, что в рассматриваемой процедуре можно поменять местами операции дифференцирования и интегрирования.

Пусть $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ – текущие координаты материальной точки, а $\left(x_\kappa^1, x_\kappa^2, x_\kappa^3\right)$ – её материальные координаты.

Выполним преобразование левой части уравнения (37).

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)} \Psi\, dV = \frac{d}{dt}\int\limits_{V_{m\,\kappa}} \Psi J dV =$$

$$= \int\limits_{V_{m\,\kappa}} \left(\frac{D\Psi}{dt} + \frac{\Psi}{J}\frac{DJ}{dt}\right) J\, dV = \qquad (38)$$

$$= \int\limits_{V_m} \left(\frac{D\Psi}{dt} + \frac{\Psi}{J}\frac{DJ}{dt}\right) dV \quad ,$$

где

$$J \equiv \sqrt{\left[\det\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x_{\kappa}^{\beta}}\right)\right]} \qquad (39)$$

Величину ***J*** можно считать объёмом в текущей конфигурации, отнесённым к единице объёма в начальной конфигурации. Обычно ***J*** является функцией как времени, так и координат. Предел интегрирования с пометкой «***κ***» означает, что интегрирование ведётся по всей области пространства, занимаемой телом в его начальной конфигурации.

Определим ***градиент деформации***

$$F^{\beta} \equiv \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x_{\kappa}^{\beta}} e^{\alpha} e^{\beta} \quad . \tag{40}$$

Примем

$$J_{,t} \equiv \frac{DJ}{dt} = J \ \operatorname{tr}\left[\left(F^{-1}\right)^{\alpha} F^{\alpha}{}_{,t}\right] \quad . \tag{41}$$

Легко показать, что

$$\left(F^{-1}\right)^{\beta} = \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x_{\kappa}^{\beta}} e^{\alpha} e^{\beta} \quad . \qquad (42)$$

Используя определение скорости, получим:

$$F^{\beta}{}_{,t} = \frac{\partial x^{\alpha}{}_{,t}}{\partial x_{\kappa}^{\beta}} e^{\alpha} e^{\beta} = \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x_{\kappa}^{\beta}} e^{\alpha} e^{\beta} \quad . \qquad (43)$$

$$\mathrm{tr}\left[\left(F^{\alpha}\right)^{-1} F^{\alpha}{}_{,t}\right] = \frac{\partial x_{\kappa}^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x_{\kappa}^{\beta}} = \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \equiv$$

$$\equiv v^{\alpha}{}_{,\alpha} \equiv \mathrm{div}\left(v^{\alpha}\right) \equiv \mathrm{div}\left(\vec{v}\right) \quad . \qquad (44)$$

Итак

$$\frac{1}{J}\frac{DJ}{dt}=v^{\alpha}{}_{,\alpha} \quad . \qquad (45)$$

Принимая во внимание соотношение (45), уравнение (38) запишем в виде:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)}\Psi\, dV=\int\limits_{V_m(t)}\left(\frac{D\Psi}{dt}+\Psi v^{\alpha}{}_{,\alpha}\right)dV \quad . \qquad (37)$$

Используя определение субстанциональной производной уравнение (37) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)}\Psi\, dV=\int\limits_{V_m(t)}\left[\Psi_{,t}+\left(\Psi v^{\alpha}\right)_{,\alpha}\right]dV \quad . \qquad (37a)$$

Субстанциональные производные от тензоров 0-го ранга (скаляра), 1-го ранга (вектора) и 2-го ранга:

$$\begin{cases} \dfrac{d_{(m)}\Psi}{dt} \equiv \dfrac{D\Psi}{dt} \equiv \Psi_{,t} + \Psi_{,\alpha} v^{\alpha} \\ \dfrac{d_{(m)}\Psi^{\beta}}{dt} \equiv \dfrac{D\Psi^{\beta}}{dt} \equiv \Psi^{\beta}{}_{,t} + \Psi^{\beta}{}_{,\alpha} v^{\alpha} \\ \dfrac{d_{(m)}\Psi^{\alpha\beta}}{dt} \equiv \dfrac{D\Psi^{\alpha\beta}}{dt} \equiv \Psi^{\alpha\beta}{}_{,t} + \Psi^{\alpha\beta}{}_{,\beta} v^{\alpha} \end{cases} . \quad (46)$$

Применив преобразование Грина (частным случаем которого является теорема о дивергенции или теорема Гаусса), соотношение запишем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)} \Psi\, dV = \int\limits_{V_m(t)} \Psi_{,t}\, dV + \oint\limits_{S_m(t)} \Psi\, v_s^{\alpha} n^{\alpha}\, dS \quad . \quad \textit{(37б)}$$

где $S_m(t)$ – замкнутая поверхность, ограничивающая объём $V_m(t)$.

Уравнения (37), (37а), (37б) – три формы ***теоремы переноса***.

Заменим в выражении (15) материальный объём совпадающим с ним в исходной конфигурации пространственным объёмом

$V_{(s)}$, ограниченным поверхностью $S_{(s)}$.

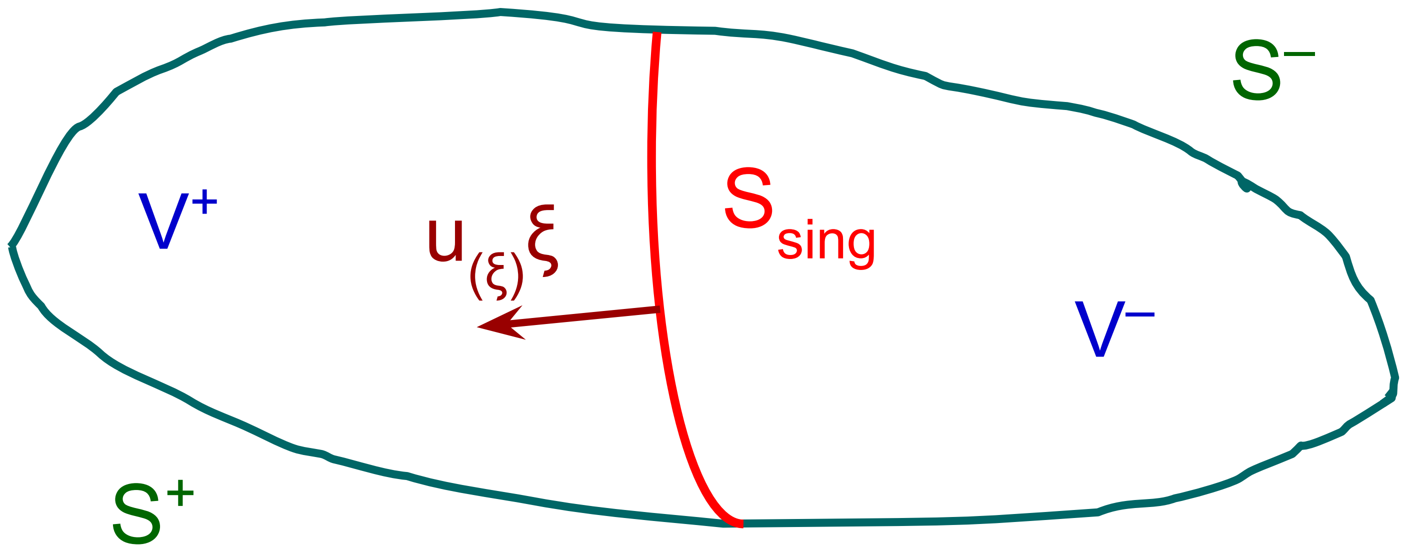
Тогда соотношение (37) легко преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{(s)}(t)} \Psi \, dV = \int\limits_{V_{(s)}(t)} \Psi_{,t} \, dV + \oint\limits_{S_{(s)}(t)} \Psi \, v_s^{\alpha} n^{\alpha} \, dS \quad . \qquad (47)$$

Выражение (47) называют ***обобщённой теоремой переноса.***

ТЕОРЕМА ПЕРЕНОСА ДЛЯ ОБЛАСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ СИНГУЛЯРНУЮ ГРАНИЦУ

Рассмотрим область содержащую сингулярную поверхность (*например, границу раздела фаз*). ***Сингулярная поверхность*** – поверхность, являющаяся разрывной относительно одной или более величин (плотность, скорость и т.п.).



Обобщим теорему переноса на случай, тела содержащего движущуюся границу раздела фаз, которая рассматривается как сингулярная поверхность.

Поверхность сингулярна (разрывна) относительно величины Ψ

и скорости v^{α}.

Поверхность перемещается со скоростью $u^{\beta}_{(\xi)}$

(речь идёт о нормальной компоненте скорости в точке ξ .

Величины Ψ и v^{α} непрерывно дифференцируемы

в областях V^{+} и V^{-} .

Так как сингулярная поверхность не является материальной, области и поверхности также не являются материальными.

Определим поле

$$u^+ \equiv \begin{cases} u^\alpha \text{ на } S^+ \\ u_{(\xi)}\xi^\alpha \text{ на } S_{\sin g} \end{cases};$$

$$u^- \equiv \begin{cases} u^\alpha \text{ на } S^- \\ u_{(\xi)}\xi^\alpha \text{ на } S_{\sin g} \end{cases}. \qquad (48)$$

ξ^α – единичный вектор, перпендикулярный поверхности $S_{\sin g}$ и направленный из области V^- в область V^+.

Можем записать выражение

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{(m)}} \Psi\, dV = \frac{d}{dt}\int\limits_{V^{+}-V^{-}} \Psi\, dV =$$

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_{V^{+}} \Psi\, dV + \frac{d}{dt}\int\limits_{V^{-}} \Psi\, dV = \qquad (49)$$

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_{V^{+}} \Psi\, dV + \frac{d}{dt}\int\limits_{V^{-}} \Psi\, dV \quad .$$

К каждому слагаемому правой части соотношения (49) можно применить обобщённую теорему переноса. В результате сформулируем выражения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V^{+}}\Psi\, dV = \int\limits_{V^{+}}\Psi_{,t}\, dV + \int\limits_{S^{+}}\Psi\, v^{\alpha}\, n^{\alpha}\, dS - \int\limits_{S_{sing}}\Psi^{+}\, u_{(\xi)}\, dS \quad . \tag{50a}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V^-}\Psi\, dV = \int_{V^-}\Psi_{,t}\, dV +$$

$$+\int_{S^-}\Psi\, v^{\alpha}\, n^{\alpha}\, dS + \qquad (50б)$$

$$+\int_{S_{sing}}\Psi^{-}\, u_{(\xi)}\, dS \qquad .$$

Здесь Ψ^- и Ψ^+ – предел функции Ψ, когда точка x^{α} приближается к лежащей на сингулярной поверхности точке x_0^{α} оставаясь при этом в V^- или V^+, соответственно.

Подставив (50а) и (50б) в (49), получим:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{(m)}}\Psi\, dV = \int\limits_{V_{(m)}}\Psi_{,t}\, dV + \int\limits_{S_{(m)}}\Psi\, v^{\alpha} n^{\alpha}\, dS - \int\limits_{S_{sing}}[\Psi]\, u_{(\xi)}\, dS \quad . \qquad (51)$$

$$[\Psi] \equiv \Psi^{+} - \Psi^{-} \quad . \qquad (52)$$

(51) – ***теорема переноса для областей, содержащих сингулярные границы***.

(52) – скачок величины Ψ на сингулярной границе.

Дифференциальная форма законов сохранения

МАССЫ,

ИМПУЛЬСА (КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ),

МОМЕНТА ИМПУЛЬСА,

ЭНЕРГИИ

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ (УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ)

Применив к соотношению (19)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)} \rho \, dV = 0 \qquad (19)$$

теорему переноса в форме (37), получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)} \rho \, dV = \int\limits_{V_m(t)} \left(\frac{D\rho}{dt} + \rho v^{\alpha}{}_{,\alpha} \right) dV = 0 \quad . \qquad (53)$$

Поскольку предел интегрирования выбран произвольно, (53) справедливо для любого тела или части тела (так как часть тела есть тело). По этой же причине равенство (53) выполняется, если равно нулю подынтегральное выражение, то есть справедливо

$$\frac{D\rho}{dt} + \rho v^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \quad . \qquad \textbf{(54)}$$

Воспользовавшись определением субстанциональной производной, уравнение (54) можно записать в виде

$$\rho_{,t} + \left(\rho v^{\alpha}\right)_{,\alpha} = 0 \quad . \qquad \textbf{(55)}$$

Формулы (54) и (55) – две формы закона сохранения массы в дифференциальном виде – ***уравнения неразрывности***.

(55) – *дивергентная форма*.

Если плотность не зависит от времени (***изохорический*** процесс) уравнение (55) принимает вид

$$\left(\rho\, v^{\alpha}\right)_{,\alpha} = 0 \quad . \qquad \textbf{(56)}$$

Если плотность не зависит от времени и координат (***несжимаемая*** жидкость) уравнение (56) сводится к

$$v^{\alpha}{}_{,\alpha} \equiv \mathrm{div}\left(\vec{v}\right) = 0 \quad . \qquad (57)$$

Несжимаемость жидкости – *<u>достаточное</u>* *(но не необходимое) условие изохоричности.*

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА (КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)} \rho v^{\alpha}\, dV = \int\limits_{S_m(t)} t^{\alpha}\, dS + \int\limits_{V_m(t)} \rho f^{\alpha}\, dV \quad . \qquad (27)$$

Уравнение сохранения импульса в дифференциальной форме можно получить из первого закона Эйлера (27), применив теорему переноса и уравнение неразрывности. С учетом выражений (37) и (54) левую часть уравнения (27) преобразуем следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)} \rho v^{\alpha}\, dV = \int\limits_{V_m(t)} \rho \frac{D v^{\alpha}}{dt}\, dV \quad . \qquad (58)$$

Первое слагаемое правой части уравнения (27), используя выражение (28) и преобразование Грина, сформулируем так

$$\int\limits_{S_m(t)} t^{\alpha}\, dS = \int\limits_{S_m(t)} T^{\alpha\beta} n^{\beta}\, dS = \int\limits_{V_m(t)} T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\, dV \quad . \tag{59}$$

Приняв во внимание соотношения (58) и (59), из (27) получим

$$\int\limits_{V_m(t)} \left(\rho \frac{D\,v^{\alpha}}{dt} - T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - \rho f^{\alpha} \right) dV = 0 \quad . \tag{60}$$

Ввиду того, что объём произволен, приходим к выводу о справедливости следующего выражения:

$$\rho \frac{D\,v^{\alpha}}{dt} = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \rho f^{\alpha} \quad . \tag{61}$$

Это и есть искомое ***дифференциальное уравнение сохранения импульса***, которое также называют ***уравнением движения в напряжениях***, или ***первым законом Коши***.
Учитывая определение субстанциональной производной, выражение (61) сформулируем в виде

$$\rho v^{\alpha}{}_{,t} + \rho v^{\alpha} v^{\beta}{}_{,\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \rho f^{\alpha} \quad . \tag{62}$$

Умножив уравнение неразрывности (55) скалярно на вектор скорости v^{β} и сложив с (62), получим

$$\left(\rho v^{\alpha}\right)_{,t} + \left(\rho v^{\alpha} v^{\beta}\right)_{,\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \rho f^{\alpha} \quad . \tag{63}$$

Введем в рассмотрение ***тензор дополнительных напряжений*** $\tau^{\alpha\beta}$, который зададим так:

$$\tau^{\alpha\beta} \equiv T^{\alpha\beta} + P I^{\alpha\beta} \quad , \tag{64}$$

где P – термодинамическое давление, Па ;

$I^{\alpha\beta}$ – единичный тензор.

Теперь соотношение (63) перепишем в виде

$$\left(\rho v^{\alpha}\right)_{,t} + \left(\rho v^{\alpha} v^{\beta}\right)_{,\beta} = -P_{,\alpha} + \tau^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \rho f^{\alpha} . \quad (65)$$

Это дивергентный вид дифференциального уравнения сохранения импульса.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА (МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)} \rho \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} r^\beta v^\gamma \, dV = \tag{30}$$

$$= \int\limits_{S_m(t)} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} r^\beta t^\gamma \, dS + \int\limits_{V_m(t)} \rho \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} r^\beta f^\gamma \, dV \; .$$

Уравнение сохранения момента импульса в дифференциальной форме получим из второго закона Эйлера (уравнение(30)), применив теорему переноса и уравнение неразрывности.

Используя соотношения (37) и (54), преобразуем левую часть выражения (30) следующим образом:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$$

$$\varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{312} = +1$$

$$\varepsilon^{213} = \varepsilon^{321} = \varepsilon^{132} = -1$$

$$1 \leftrightarrow x \quad 2 \leftrightarrow y \quad 3 \leftrightarrow z$$

$$\varepsilon^{xyz} = \varepsilon^{yzx} = \varepsilon^{zxy} = +1$$

$$\varepsilon^{yxz} = \varepsilon^{zyx} = \varepsilon^{xzy} = -1$$

для любых двух минимум совпадающих индексов:

$$\varepsilon^{xx\gamma} = 0 \qquad \varepsilon^{xxx} = 0$$

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{v} \quad .$$

$$\vec{L} \equiv L^x \vec{e}_x + L^y \vec{e}_y + L^z \vec{e}_z \quad .$$

$$\begin{aligned}\vec{L} \equiv & \left(r^y v^z - r^z v^y\right)\vec{e}_x + \\ & + \left(r^z v^x - r^x v^z\right)\vec{e}_y + \\ & + \left(r^x v^y - r^y v^x\right)\vec{e}_z \quad .\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)} \rho\, \varepsilon^{\alpha\beta\chi} r^{\beta} v^{\chi} dV = \int\limits_{V_m(t)} \rho\, \varepsilon^{\alpha\beta\chi} r^{\beta} \frac{d_{(m)} v^{\chi}}{dt} dV. \quad (66)$$

Первое слагаемое правой части уравнения (30), применяя соотношение (28) и преобразования Грина, представим в виде

$$\int\limits_{S_m(t)} \varepsilon^{\alpha\beta\chi} r^{\beta} t^{\chi}\, dS = \int\limits_{V_m(t)} \varepsilon^{\alpha\beta\chi} r^{\beta}{}_{,\gamma} T^{\chi\gamma} dV +$$

$$+ \int\limits_{V_m(t)} \varepsilon^{\alpha\beta\chi} r^{\beta} T^{\chi\gamma}{}_{,\gamma} dV \quad . \qquad (67)$$

Применяя (66) и (67), уравнение (30) запишем как

$$\int\limits_{V_m(t)} \rho \varepsilon^{\alpha\beta\chi} r^{\beta} \frac{D v^{\chi}}{dt} dV =$$

$$= \int\limits_{V_m(t)} \varepsilon^{\alpha\beta\chi} r^{\beta}{}_{,\gamma} T^{\chi\gamma} dV +$$

$$+ \int\limits_{V_m(t)} \varepsilon^{\alpha\beta\chi} r^{\beta} T^{\chi\gamma}{}_{,\gamma} dV +$$

$$+ \int\limits_{V_m(t)} \rho \varepsilon^{\alpha\beta\chi} r^{\beta} f^{\chi} dV \quad ,$$

или

$$\int\limits_{V_m(t)} \left[\varepsilon^{\alpha\beta\chi} r^{\beta} \left(\rho \frac{d_{(m)} v^{\chi}}{dt} - T^{\chi\gamma}{}_{,\gamma} - \rho f^{\chi} \right) - \right. \left. - \varepsilon^{\alpha\beta\chi} r^{\beta}{}_{,\gamma} T^{\chi\gamma} \right] dV = 0 \,. \quad (68)$$

Вследствие того, что объём интегрирования выбран произвольно, подынтегральное выражение в (68) равно нулю. Следовательно,

$$\varepsilon^{\alpha\beta\chi} r^{\beta} \left(\rho \frac{d_{(m)} v^{\chi}}{dt} - T^{\chi\gamma}{}_{,\gamma} - \rho f^{\chi} \right) = \quad (69)$$

$$= \varepsilon^{\alpha\beta\chi} r^{\beta}{}_{,\gamma} T^{\chi\gamma} \,.$$

Преобразуем это соотношение, используя формулу (54). В результате получим выражение

$$\left(\rho\,\varepsilon^{\alpha\beta\chi}\, r^{\beta}\, v^{\chi}\right)_{,t} + \left(\rho\,\varepsilon^{\alpha\beta\chi}\, r^{\beta}\, v^{\chi}\, v^{\gamma}\right)_{,\gamma} =$$

$$= \left(\varepsilon^{\alpha\beta\chi}\, r^{\beta} T^{\chi\gamma}\right)_{,\gamma} + \rho\,\varepsilon^{\alpha\beta\chi}\, r^{\beta} f^{\chi} \quad . \tag{70}$$

Вернёмся к соотношению (69). Принимая во внимание уравнение (61), приходим к выводу, что

$$\varepsilon^{\alpha\beta\chi}\, r^{\beta}{}_{,\gamma} T^{\chi\gamma} = 0 \quad . \tag{71}$$

Так как

$$r^{\beta}{}_{,\gamma} = \delta^{\beta\gamma} \quad ,$$

где $\delta^{\beta\gamma}$ – символ Кронекера, соотношение (71) преобразуется как

$$\varepsilon^{\alpha\beta\chi}\,T^{\chi\beta} = 0 \quad . \tag{72}$$

Можно также записать

$$\varepsilon^{\alpha\eta\xi}\,\varepsilon^{\alpha\beta\chi}\,T^{\chi\beta} = 0 \quad , \tag{73а}$$

откуда следует

$$T^{\eta\xi} - T^{\xi\eta} = 0 \quad . \tag{73б}$$

Уравнения (73а) и (73б) – два варианта записи ***закона сохранения момента импульса в дифференциальной форме***; их также называют ***вторым законом движения Коши***. Из соотношений (73) следует, что ***в случае, когда все моменты вращения, действующие на тело, являются результатом действующих на тело сил, необходимым и достаточным условием сохранения момента импульса является симметричность тензора напряжений:***

$$T = T^{T} \quad . \tag{74}$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)} \rho\left(u+\frac{1}{2}v^{\alpha}v^{\alpha}\right)dV =$$

$$= \int\limits_{S_m(t)} v^{\alpha}T^{\alpha\beta}n^{\beta}\,dS + \int\limits_{V_m(t)} \rho v^{\alpha} f^{\alpha}\,dV + \qquad (36)$$

$$+ \int\limits_{S_m(t)} h\,dS + \int\limits_{V_m(t)} \rho Q\,dV \quad .$$

Из соотношения (36), используя теорему переноса, преобразование Грина и уравнение неразрывности, получим дифференциальное уравнение сохранения энергии. Преобразуем, приняв во внимание соотношения (37) и (54), левую часть выражения (36):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)} \rho\left(u+\frac{1}{2}v^{\alpha}v^{\alpha}\right)dV = \tag{75}$$

$$= \int\limits_{V_m(t)} \rho\,\frac{D}{dt}\left(u+\frac{1}{2}v^{\alpha}v^{\alpha}\right)dV\ .$$

Применяя преобразование Грина и свойство симметрии тензора напряжений, первый член в правой части уравнения (36) представим в виде объёмного интеграла:

$$\int\limits_{S_m(t)} v^{\alpha} T^{\alpha\beta} n^{\beta}\, dS = \int\limits_{V_m(t)} \left(T^{\alpha\beta} v^{\beta}\right)_{,\alpha} dV \ . \qquad (76)$$

q^{α} – вектор плотности потока энергии, $\text{Вт}/\text{м}^2$

Теперь представим контактный перенос энергии так:

$$h \equiv h\left(z^{\alpha}, n^{\alpha}\right) = -q^{\alpha} n^{\alpha} \ . \qquad (77)$$

Получим

$$\int\limits_{S_m(t)} h\,dS \equiv -\int\limits_{S_m(t)} q^{\alpha} n^{\alpha}\,dS = \qquad (78)$$

$$= -\int\limits_{V_m(t)} q^{\alpha}{}_{,\alpha}\,dS \quad .$$

Учитывая соотношения (75), (76) и (78), уравнение (36) запишем в виде

$$\int\limits_{V_m(t)} \left[\begin{array}{l} \rho \dfrac{D}{dt}\left(u + \dfrac{1}{2} v^{\alpha} v^{\alpha}\right) - \left(T^{\alpha\beta} v^{\beta}\right)_{,\alpha} - \\ -\rho v^{\alpha} f^{\alpha} + q^{\alpha}{}_{,\alpha} - \rho Q \end{array} \right] dV = 0 \quad .$$

Так как объём, по которому выполняется интегрирование, выбран произвольно, равенство верно, если равно нулю подынтегральное выражение, т.е. справедливо уравнение

$$\rho\,\frac{D}{dt}\left(u+\frac{1}{2}v^{\alpha}v^{\alpha}\right)=$$

$$=-q^{\alpha}{}_{,\alpha}+\left(T^{\alpha\beta}v^{\beta}\right)_{,\alpha}+\rho v^{\alpha}f^{\alpha}+\rho Q \quad . \qquad (79)$$

Это одна из форм ***дифференциального уравнения сохранения энергии.***

Используя формулу (54), преобразуем (79) к виду

$$\left[\rho\left(u+\frac{1}{2}v^{\alpha}v^{\alpha}\right)\right]_{,t}+\left[\rho\left(u+\frac{1}{2}v^{\alpha}v^{\alpha}\right)v^{\beta}\right]_{,\beta}=$$

$$=-q^{\alpha}{}_{,\alpha}+\left(T^{\alpha\beta}v^{\beta}\right)_{,\alpha}+\rho v^{\alpha}f^{\alpha}+\rho Q \quad .$$

Окончательно имеем

$$\left[\rho\left(u+\frac{1}{2}v^{\alpha}v^{\alpha}\right)\right]_{,t}+\left[\rho\left(u+\frac{1}{2}v^{\alpha}v^{\alpha}\right)v^{\beta}\right]_{,\beta}= \qquad (80)$$

$$=-\left(q^{\beta}-T^{\beta\alpha}v^{\alpha}\right)_{,\beta}+\rho\left(v^{\alpha}f^{\alpha}+Q\right) \quad .$$

Если умножить скалярно на вектор скорости уравнение первого закона Коши (61), то получим

$$\rho\,\frac{D}{dt}\left(\frac{1}{2}v^{\alpha}v^{\alpha}\right)=\left(T^{\alpha\beta}v^{\beta}\right)_{,\alpha}-T^{\alpha\beta}v^{\beta}{}_{,\alpha}+\rho\,v^{\alpha}f^{\alpha}. \quad (81)$$

Вычитая это соотношение из уравнения (79), получим ***дифференциальное уравнение баланса внутренней энергии***

$$\rho\,\frac{Du}{dt}=-q^{\alpha}{}_{,\alpha}+T^{\alpha\beta}v^{\beta}{}_{,\alpha}+\rho Q\ . \qquad (82)$$

или

$$\rho\,\frac{Du}{dt}=-q^{\alpha}{}_{,\alpha}-P\,v^{\alpha}{}_{,\alpha}+\tau^{\alpha\beta}v^{\beta}{}_{,\alpha}+\rho Q\ . \qquad (82a)$$

$$\iota \equiv u + \frac{P}{\rho}$$ – удельная энтальпия, $\text{Дж}/\text{кг}$. *(83)*

Запишем ***дифференциальное уравнение сохранения энергии*** <u>***в терминах энтальпии***</u>:

$$\rho \frac{D\iota}{dt} = -q^{\alpha}{}_{,\alpha} + \frac{DP}{dt} + \tau^{\alpha\beta} v^{\beta}{}_{,\alpha} + \rho Q \ . \qquad \textbf{(84)}$$

Перейдя от субстанциональной производной к частным производным и использовав уравнение неразрывности (55), получим ***дивергентный вид дифференциального уравнения сохранения энергии в терминах энтальпии***

$$
\begin{aligned}
&(\rho \iota)_{,t} + \left(\rho \iota v^{\alpha}\right)_{,\alpha} = \\
&= -q^{\alpha}{}_{,\alpha} + P_{,t} + P_{,\alpha} v^{\alpha} + \tau^{\alpha\beta} v^{\beta}{}_{,\alpha} + \rho Q \quad .
\end{aligned}
\tag{85}
$$

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА

Полученные выше интегральные уравнения сохранения можно рассматривать как частные случаи уравнения, которое, как правило, называют ***общим интегральным уравнением баланса***. Оно имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m(t)} \rho\psi\, dV = \int\limits_{S_m(t)} \phi n^{\alpha}\, dS + \int\limits_{V_m(t)} \rho\varphi\, dV \ . \qquad (86)$$

Аналогично, дифференциальные уравнения сохранения можно рассматривать как частные случаи уравнения, которое принято называть ***общим дифференциальным уравнением баланса***

$$(\rho\psi)_{,t} + \left(\rho\psi v^{\beta}\right)_{,\beta} = -\phi_{,\beta} + \rho\varphi \ . \qquad (87)$$

ψ – характерная для исследуемой субстанции некоторая "транспортная" величина (удельная);

φ – обуславливающий неконвективные приток/утечку поток субстанции (тензор, порядок которого на единицу больше порядка тензора ψ);

ϕ – удельная мощность генерации субстанции (тензор того же порядка, что и тензор ψ).

Если в качестве ψ выбирается не просто скаляр (переменная), а некоторая константа (например, единица), то φ и ϕ полагаются тождественно равными нулю.

Теперь легко заметить, как необходимо выбирать ψ, φ и ϕ, чтобы получить то или иное уравнение сохранения.

уравнение сохранения	ψ	φ	ϕ
НЕРАЗРЫВНОСТИ	1	0	0
ИМПУЛЬСА	v^{α}	$-T^{\alpha\beta}$	f^{α}
МОМЕНТА ИМПУЛЬСА	$\varepsilon^{\alpha\gamma\chi} r^{\gamma} v^{\chi}$	$-\varepsilon^{\alpha\gamma\chi} r^{\gamma} T^{\chi\beta}$	$\varepsilon^{\alpha\gamma\chi} r^{\gamma} f^{\chi}$
ЭНЕРГИИ	$u+\frac{1}{2} v^{\alpha} v^{\alpha}$	$-q^{\beta}+T^{\beta\alpha} v^{\alpha}$	$v^{\alpha} f^{\alpha}+Q$

КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ; КРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЧИСЛА (ЧИСЛА ПОДОБИЯ). КРИТЕРИЙ КНУДСЕНА.

Два процесса «А» и «В» называются подобными, если они удовлетворяют следующим трём требованиям.

1. Математической описание процессов «А» и «В» в одной и той же системе координат отличается только значениями входящих в него размерных величин, тогда как вид уравнений, связывающих эти величины, одинаков.

2. Для любой величины φ_B процесса «В» существует сход-ственная ей величина $\varphi_A = m_\varphi \varphi_B$ в процессе «А».

3. Безразмерные уравнения процессов «А» и «В» одинаковы.

Две величины φ_A и φ_B, имеющие одинаковый физический смысл называются ***сходственными***, если они имеют общее начало отсчёта и связаны соотношением

$$\varphi_A = m_\varphi \, \varphi_B \qquad \mathbf{(88)}$$

где m_φ – положительная безразмерная величина одна и та же

для всей группы величин φ, но, вообще говоря, иная для группы

величин ψ, имеющих иной математический или физический смысл.

Величины m_φ называются ***константами или масштабами подобия***, а связи типа (88) – ***преобразованием подобия***.

Критерий Кнудсена – отношение длины свободного пробега молекул и масштаба течения:

$$\mathrm{Kn} \equiv \frac{\bar{l}}{L} \quad . \qquad (89)$$

$$\mathrm{Kn} \le 0.01 \quad . \qquad (90)$$

Условие (90) – условие применимости модели «сплошной среды».

$$\mathrm{Kn} > 1 \quad . \qquad (91)$$

Неравенство (91) – *свободно-молекулярные режимы.*

Вопросы, выносимые на зачёт

1. Сплошная среда. Дать определение.
2. Производные по времени, связь между ними.
3. Закон сохранения массы (интегральная форма).
4. Сила. Классификация. Дать определения.
5. Закон сохранения импульса (интегральная форма).
6. Закон сохранения момента импульса (интегральная форма).
7. Типы переноса энергии. Классификация. Дать определения.
   Принцип плотности потока энергии.
8. Закон сохранения энергии (интегральная форма).
9. Теорема переноса (без доказательства).
   Обобщённая теорема переноса (без доказательства).
   Теорема переноса для области , содержащей сингулярную границу (без доказательства).
10. Уравнение (без вывода) неразрывности
    (в том числе в дивергентной форме).

Вопросы, выносимые на зачёт

11. Дифференциальная форма закона сохранения импульса (без вывода).

12. Дифференциальная форма закона сохранения момента импульса (без вывода).

13. Дифференциальная форма закона сохранения энергии (в терминах энтальпии) (без вывода).

14. Общие уравнения баланса: интегральное и дифференциальное.

15. Подобные процессы. Преобразование подобия. Критериальные числа (перечислите известные Вам).

16. Критериальное число Кнудсена. Условие применимости «модели» сплошной среды.

ДЗЯКУЙ
ЗА ЎВАГУ

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ

THANK FOR
YOUR ATTENTION